

2024 学年第一学期期中测试

七年级数学 (2024 年 10 月)

一、选择题 (每题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列各式中: $2m$, 0 , $-2n$, $\frac{b}{a}$, $x^2 + \frac{1}{x}$, $a+b=ab$, 单项式有 ()

- A. 3 个 B. 4 个 C. 5 个 D. 6 个

【答案】 A

【解析】

【分析】 直接利用单项式的定义分别分析得出答案.

【详解】 解: $2m, 0, -2n$ 是单项式, 共 3 个.

$\frac{b}{a}$ 分母上有字母, 故排除,

$x^2 + \frac{1}{x}$ 不是单项式, 故排除,

$a+b=ab$ 是等式, 故排除,

$\therefore$ 单项式共 3 个,

故选: A

【点睛】 此题主要考查了单项式, 正确把握单项式的定义是解题关键.

2. 下列各组单项式中, 不是同类项的为 ()

- A. $-2x^2y$ 和 $-5x^2y$ B. $7m^2n$ 和 $2mn^2$
C. $-3a$ 和 $99a$ D. $-abc$ 和 $\frac{3}{2}abc$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查同类项是定义, 根据同类项的定义: “所含字母相同, 且字母的指数也相同的单项式,” 进行判断即可.

【详解】 解: A、 $-2x^2y$ 和 $-5x^2y$ 是同类项, 故不符合题意;

B、 $7m^2n$ 和 $2mn^2$ 不是同类项, 故符合题意;

C、 $-3a$ 和 $99a$ 是同类项, 故不符合题意;

D、 $-abc$ 和 $\frac{3}{2}abc$ 是同类项, 故不符合题意;

故选：B.

3. 已知 $a^2 - 5 = 2a$ ，则代数式 $(a-2)(a+3) - 3(a-1)$ 的值是 ()

A. 2

B. -2

C. 8

D. -8

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查整式的混合运算，代数式求值. 先根据整式的混合运算法则进行计算，化简后，利用整体思想代入求值即可.

【详解】解： $\because a^2 - 5 = 2a$,

$$\therefore a^2 - 2a = 5,$$

$$\therefore (a-2)(a+3) - 3(a-1)$$

$$= a^2 + a - 6 - 3a + 3$$

$$= a^2 - 2a - 3$$

$$= 5 - 3$$

$$= 2.$$

故选：A.

4. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2024} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^{2025}$ 的计算结果是 ().

A. -1

B. $\frac{4}{3}$

C. 1

D. $-\frac{4}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了逆用积的乘方，逆用同底数幂的乘法，有理数的乘方运算，熟练掌握知识点是解题的关键，将原式化为 $\left(\frac{3}{4}\right)^{2024} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^{2024} \times \left(-\frac{4}{3}\right)$ ，再逆用积的乘方计算即可.

$$\text{【详解】解：} \left(\frac{3}{4}\right)^{2024} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^{2025}$$

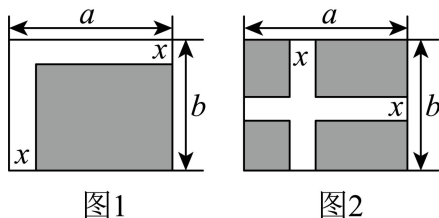
$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{2024} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^{2024} \times \left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} \right)^{2024} \times \left(-\frac{4}{3} \right)$$

$$= -\frac{4}{3}.$$

故选：D.

5. 通过计算，比较图 1，图 2 中阴影部分的面积，可以验证的算式是（ ）



A. $a(b-x) = ab - ax$

B. $(a-x)(b-x) = ab - ax - bx + x^2$

C. $(a-x)(b-x) = ab - ax - bx$

D. $b(a-x) = ab - bx$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查多项式乘多项式，单项式乘多项式，整式运算．要求阴影部分面积，若不规则图形可考虑利用大图形的面积减去小图形的面积进行计算，若规则图形可以直接利用公式进行求解．

【详解】解：图 1 中，阴影部分 = 长 $(a-x)$ 宽 $(b-x)$ 长方形面积，

$$\therefore \text{阴影部分的面积} = (a-x)(b-x),$$

图 2 中，阴影部分 = 大长方形面积 - 长 a 宽 x 长方形面积 - 长 b 宽 x 长方形面积 + 边长 x 的正方形面积，

$$\therefore \text{阴影部分的面积} = ab - ax - bx + x^2,$$

$$\therefore (a-x)(b-x) = ab - ax - bx + x^2.$$

故选：B.

6. 设 $a = x - 2023$ ， $b = x - 2025$ ， $c = x - 2024$ ，若 $a^2 + b^2 = 34$ ，则 c^2 的值是（ ）.

A. 16

B. 12

C. 8

D. 4

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了完全平方公式，对所给条件灵活变形以及正确应用整体思想是解答本题的关键．先将 $a = x - 2023$ ， $b = x - 2025$ ，代入 $a^2 + b^2 = 34$ ，得到 $(x - 2023)^2 + (x - 2025)^2 = 34$ ，再变形为

$(x-2024+1)^2 + (x-2024-1)^2 = 34$ ，然后将 $(x-2024)$ 作为一个整体即可解答.

【详解】解：∵ $a = x - 2023$ ， $b = x - 2025$ ， $a^2 + b^2 = 34$ ，

$$\therefore (x-2023)^2 + (x-2025)^2 = 34,$$

$$\therefore (x-2024+1)^2 + (x-2024-1)^2 = 34,$$

$$\therefore (x-2024)^2 + 2(x-2024)+1 + (x-2024)^2 - 2(x-2024)+1 = 34,$$

$$\therefore 2(x-2024)^2 = 32,$$

$$\therefore (x-2024)^2 = 16,$$

$$\text{又} \because c = x - 2024,$$

$$\therefore c^2 = 16.$$

故选：A.

二、填空题（每题 2 分，共 24 分）

7. 下列式子： $x^2 + 2$ ， $\frac{1}{a} + 4$ ， $\frac{3ab^2}{7}$ ， $\frac{ab}{c}$ ， $-\frac{5}{6}x$ ，0，整式的个数是_____个.

【答案】4##四

【解析】

【分析】本题主要考查了整式的定义，表示数或字母的积的式子叫做单项式，几个单项式的和的形式叫做多项式，而整式是多项式和单项式的统称，据此求解即可.

【详解】解：在式子 $x^2 + 2$ ， $\frac{1}{a} + 4$ ， $\frac{3ab^2}{7}$ ， $\frac{ab}{c}$ ， $-\frac{5}{6}x$ ，0中，整式有 $x^2 + 2$ ， $\frac{3ab^2}{7}$ ， $-\frac{5}{6}x$ ，0，共4个，

故答案为：4.

8. 计算： $102 \times 98 - 99^2 =$ _____.

【答案】195

【解析】

【分析】本题考查了，掌握整式的乘除法法则和乘法公式是解决本题的关键，把102、98、99分别变形为 $(100+2)$ 、 $(100-2)$ 、 $(100-1)$ ，再套用平方差和完全平方公式计算比较简便.

【详解】原式 $= (100 + 2)(100 - 2) - (100 - 1)^2$

$$= 100^2 - 2^2 - (100^2 - 200 + 1)$$

$$= 100^2 - 4 - 100^2 + 200 - 1$$

$$= 195.$$

故答案为：195

9. 将多项式 $2 - 3xy^2 + 5x^3y - \frac{1}{3}x^2y^3$ 按字母 y 降幂排列是_____.

【答案】 $-\frac{1}{3}x^2y^3 - 3xy^2 + 5x^3y + 2$

【解析】

【分析】根据多项式的项的概念和降幂排列的概念，将多项式的各项按 y 的指数由大到小排列可得.

【详解】解：将多项式 $2 - 3xy^2 + 5x^3y - \frac{1}{3}x^2y^3$ 按字母 y 的降幂排列是 $-\frac{1}{3}x^2y^3 - 3xy^2 + 5x^3y + 2$.

故答案为： $-\frac{1}{3}x^2y^3 - 3xy^2 + 5x^3y + 2$.

【点睛】本题考查了多项式的项的概念和降幂排列的概念. (1) 多项式中的每个单项式叫做多项式的项；(2) 一个多项式的各项按照某个字母指数从大到小或者从小到大的顺序排列，叫做降幂或升幂排列. 解题时要注意灵活运用.

10. 一个多项式 M 减去多项式 $-2x^2 + 5x - 3$ ，小马虎却误解为先加上这个多项式，结果，得 $x^2 + 3x + 7$ ，则正确的结果是_____.

【答案】 $5x^2 - 7x + 13$

【解析】

【分析】(1) 根据题意可得 $M + (-2x^2 + 5x - 3) = x^2 + 3x + 7$ ，求出 M ，然后求出 $M - (-2x^2 + 5x - 3)$ 即可；

(2) 设 $N = -2x^2 + 5x - 3$ ， $P = x^2 + 3x + 7$ ，根据 $M + N = P$ 即 $M = P - N$ ，因此所求的 $M - N = P - N - N = P - 2N$.

【详解】【方法1】由题意，得 $M + (-2x^2 + 5x - 3) = x^2 + 3x + 7$.

易得 $M = x^2 + 3x + 7 - (-2x^2 + 5x - 3) = 3x^2 - 2x + 10$.

$\therefore M - (-2x^2 + 5x - 3) = (3x^2 - 2x + 10) - (-2x^2 + 5x - 3) = 5x^2 - 7x + 13$.

则正确的结果是 $5x^2 - 7x + 13$.

【方法2】设 $N = -2x^2 + 5x - 3$, $P = x^2 + 3x + 7$.

由题意, 得 $M + N = P$, 故 $M = P - N$, 因此所求的 $M - N = P - N - N = P - 2N$.

$$\therefore M - N = P - 2N = x^2 + 3x + 7 - 2(-2x^2 + 5x - 3) = 5x^2 - 7x + 13.$$

则正确的结果是 $5x^2 - 7x + 13$.

【点睛】在整式运算应用过程中, 我们可以发现, 在尽量避免烦琐计算的同时要运用一些整体代入的思想, 这样可以有效地将计算过程缩短, 达到化繁为简的目的. 方法二在进行运算之前, 先采用换元思想将运算过程简化为 $P - 2N$, 这样能在优化算法的同时减少计算量.

11. 计算: $(x - y)^3 \cdot (y - x)^2 =$ _____. (结果用幂的形式表示)

【答案】 $(x - y)^5$

【解析】

【分析】运用同底数幂运算法则即可求解, 本题主要考查同底数幂的乘法运算, 掌握其运算法则是解题的关键.

【详解】解: $(x - y)^3 \cdot (y - x)^2$

$$= (x - y)^3 \cdot (x - y)^2$$
$$= (x - y)^5,$$

故答案为: $(x - y)^5$.

12. 计算: $\left(-\frac{2}{3}x^2y^3 + \frac{3}{4}xy^2 - 2x^2y\right) \div \left(-\frac{1}{2}xy\right) =$ _____.

【答案】 $\frac{4}{3}xy^2 - \frac{3}{2}y + 4x$

【解析】

【分析】本题考查多项式除以单项式, 解题的关键是掌握: 多项式除以单项式, 先把这个多项式的每一项除以单项式, 再把所得的商相加. 本题根据多项式除以单项式的运算法则进行计算即可.

【详解】解: $\left(-\frac{2}{3}x^2y^3 + \frac{3}{4}xy^2 - 2x^2y\right) \div \left(-\frac{1}{2}xy\right)$

$$= -\frac{2}{3}x^2y^3 \div \left(-\frac{1}{2}xy\right) + \frac{3}{4}xy^2 \div \left(-\frac{1}{2}xy\right) - 2x^2y \div \left(-\frac{1}{2}xy\right)$$

$$= \frac{4}{3}xy^2 - \frac{3}{2}y + 4x.$$

13. 要使 $(-2x^2 + mx + 1) \cdot (-3x^2)$ 的展开式中不含 x^3 项, 则 $m =$ _____.

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题考查了单项式乘多项式, 以此判断不含某一项的结果, 先根据单项式乘多项式进行化简, 然后让 x^3 这一项的系数为 0 即可, 正确计算是解题的关键.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & (-2x^2 + mx + 1) \cdot (-3x^2) \\ &= -2x^2 \times (-3x^2) + mx \times (-3x^2) + 1 \times (-3x^2) \\ &= 6x^4 - 3mx^3 - 3x^2, \end{aligned}$$

$\therefore$ 展开式中不含 x^3 项,

$$\therefore m = 0,$$

故答案为: 0.

14. 计算: $(-2x^2y)^3 + (-x^3)^2(-y)^2y =$ _____.

【答案】 $-7x^6y^3$

【解析】

【分析】 本题考查幂的运算法则, 包括积的乘方、幂的乘方、同底数的幂的乘方, 掌握幂的运算法则是解题的关键.

根据幂的运算法则逐一计算, 再合并即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & (-2x^2y)^3 + (-x^3)^2(-y)^2y \\ &= -8x^6y^3 + x^6y^2y \\ &= -8x^6y^3 + x^6y^3 \\ &= -7x^6y^3 \end{aligned}$$

故答案为: $-7x^6y^3$.

15. 如果 $9a^2 - (2k-1)ab + \frac{1}{4}b^2$ 是完全平方公式, 则 $k =$ _____.

【答案】 -1 或 2

【解析】

【分析】 本题主要考查求完全平方式中的字母系数，根据完全平方公式中的字母系数的关系进行求解即可

【详解】 解： $\because 9a^2 - (2k-1)ab + \frac{1}{4}b^2 = (3a)^2 - (2k-1)ab + \left(\frac{1}{2}b\right)^2$

$$\therefore -(2k-1) = \pm 2 \times 3 \times \frac{1}{2}$$

解得， $k = -1$ 或 2 ，

故答案为： -1 或 2

16. 已知 $2^m = 3$ ， $2^n = 5$ ， 则 2^{4m-2n} 的值为_____.

【答案】 $\frac{81}{25}$

【解析】

【分析】 此题考查了同底数幂的除法以及幂的乘方的逆用，根据同底数幂的除法法则和幂的乘方的运算法则求解即可.

【详解】 解： $\because 2^m = 3$ ， $2^n = 5$ ，

$$\therefore 2^{4m-2n} = 2^{4m} \div 2^{2n} = (2^m)^4 \div (2^n)^2 = 3^4 \div 5^2 = \frac{81}{25}.$$

故答案为： $\frac{81}{25}$.

17. 如果 a ， b ， c 满足 $a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 6c + 9 = 0$ ， 则 abc 等于_____.

【答案】 27

【解析】

【分析】 本题主要考查完全平方公式，把 $a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 6c + 9$ 通过拆分重新组合成完全平方形式的和的形式，写成非负数之和等于 0 的形式，即可求解. 熟记公式结构，把多项式利用完全平方公式写成平方和的形式是解题的关键.

【详解】 解： $\because a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 6c + 9 = 0$ ，

$$\text{即： } a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 6c + 9 = 0，$$

$$\therefore (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-3)^2 = 0，$$

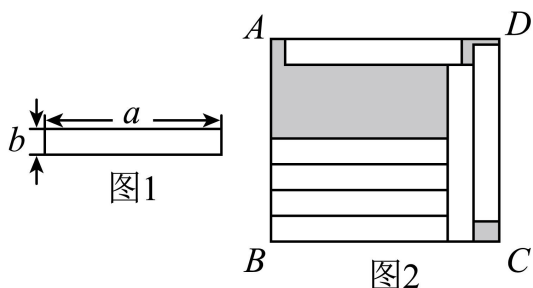
$$\therefore (a-b)^2 = 0， (b-c)^2 = 0， (c-3)^2 = 0，$$

$$\therefore a = b, \quad b = c, \quad c = 3, \quad \text{即: } a = b = c = 3,$$

$$\therefore abc = 27,$$

故答案为: 27.

18. 如图, 把 7 个长和宽分别为 a , b 的小长方形 (图 1), 拼接在一起构成如图 2 所示的长方形 $ABCD$, 则图中阴影部分的面积为_____. (用含有 a , b 的代数式表示)



【答案】 $a^2 - 4ab + 2b^2$

【解析】

【分析】 由图 2 可知, 该图形长是图 1 小长方形的一个长加上两个宽, 该图形宽是图 1 小长方形的一个长加上一个宽, 用矩形面积公式即可求出整个图形的面积, 再减去 7 个小长方形面积即可.

【详解】 解: $(a+2b)(a+b) - 7ab = a^2 + 3ab + 2b^2 - 7ab = a^2 - 4ab + 2b^2$

【点睛】 本题主要考查了多项式乘以多项式, 熟练地掌握多项式乘以多项式的运算法则是解题的关键. 多项式乘以多项式, 把前面一个多项式的每一项分别乘以后面一个多项式的每一项的结果作为积的因式.

三、简答题 (每小题 4 分, 共 28 分)

19 计算:

(1) $\left(-p^2 + 3pq - \frac{1}{2}q^2\right) - \left(-\frac{1}{2}p^2 + 4pq - \frac{3}{2}q^2\right)$

(2) $-3x^2(2x - 4y) + 2x(x^2 - x)$

(3) $\left(mn^2 - \frac{1}{3}nm^2\right)(nm^2 + 3mn^2)$

(4) $(a - 2b + 3c)(a + 2b - 3c)$

(5) $(x - 3)(x + 5) - 3(x - 1)(x - 3)$

(6) $(a - 2b)(-a - 2b)(a^2 - 4b^2)$

【答案】 (1) $-\frac{1}{2}p^2 - pq + q^2$

$$(2) -4x^3 + 12x^2y - 2x^2$$

$$(3) 3m^2n^4 - \frac{1}{3}n^2m^4$$

$$(4) a^2 - 4b^2 - 9c^2 + 12bc$$

$$(5) -2x^2 + 14x - 24$$

$$(6) -a^4 + 8a^2b^2 - 16b^4$$

【解析】

【分析】 本题考查了整式的乘法，加减法运算，乘法公式，熟练掌握知识点和运算法则是解题的关键.

(1) 先去括号，再合并同类项；

(2) 先进行整式的乘法运算，再进行加减法计算；

(3) 先将其变形为 $\frac{1}{3}(3mn^2 - nm^2)(nm^2 + 3mn^2)$ ，再利用平方差公式计算，最后再合并；

(4) 先变形为 $(a + 2b - 3c)[a - (2b - 3c)]$ ，再利用平方差公式计算，最后再合并；

(5) 先进行整式的乘法运算，再进行加减法计算；

(6) 先变形为 $-(a - 2b)(a + 2b)(a^2 - 4b^2)$ ，然后利用平方差公式和完全平方公式计算.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: } & \left(-p^2 + 3pq - \frac{1}{2}q^2\right) - \left(-\frac{1}{2}p^2 + 4pq - \frac{3}{2}q^2\right) \\ &= -p^2 + 3pq - \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}p^2 - 4pq + \frac{3}{2}q^2 \\ &= -\frac{1}{2}p^2 - pq + q^2; \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: } & -3x^2(2x - 4y) + 2x(x^2 - x) \\ &= -6x^3 + 12x^2y + 2x^3 - 2x^2 \\ &= -4x^3 + 12x^2y - 2x^2 \end{aligned}$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: } \left(mn^2 - \frac{1}{3}nm^2\right)(nm^2 + 3mn^2)$$

$$= \frac{1}{3}(3mn^2 - nm^2)(nm^2 + 3mn^2)$$

$$= \frac{1}{3} \times \left[(3mn^2)^2 - (nm^2)^2\right]$$

$$= \frac{1}{3} \times (9m^2n^4 - n^2m^4)$$

$$= 3m^2n^4 - \frac{1}{3}n^2m^4;$$

【小问 4 详解】

$$\text{解: } (a - 2b + 3c)(a + 2b - 3c)$$

$$= (a + 2b - 3c)[a - (2b - 3c)]$$

$$= a^2 - (2b - 3c)^2$$

$$= a^2 - (4b^2 + 9c^2 - 12bc)$$

$$= a^2 - 4b^2 - 9c^2 + 12bc$$

【小问 5 详解】

$$\text{解: } (x - 3)(x + 5) - 3(x - 1)(x - 3)$$

$$= x^2 + 5x - 3x - 15 - 3(x^2 - 3x - x + 3)$$

$$= x^2 + 5x - 3x - 15 - 3x^2 + 9x + 3x - 9$$

$$= -2x^2 + 14x - 24$$

【小问 6 详解】

$$\text{解: } (a - 2b)(-a - 2b)(a^2 - 4b^2)$$

$$= -(a - 2b)(a + 2b)(a^2 - 4b^2)$$

$$= -(a^2 - 4b^2)(a^2 - 4b^2)$$

$$= -(a^4 - 8a^2b^2 + 16b^4)$$

$$= -a^4 + 8a^2b^2 - 16b^4.$$

20. 解方程: $(2x+1)^2 + 5(x-1)^2 = (3x+2)(3x-2) - 2.$

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次方程，整式的混合运算，完全平方公式和平方差公式，熟练掌握知识点是解题的关键. 利用完全平方公式和平方差公式先化简，再解一元一次方程.

【详解】 解: $(2x+1)^2 + 5(x-1)^2 = (3x+2)(3x-2) - 2$

$$4x^2 + 4x + 1 + 5x^2 - 10x + 5 = 9x^2 - 4 - 2$$

$$-6x = -12$$

解得: $x = 2$

四、解答题 (第 21 题 4 分, 其余每题 6 分, 满分 28 分)

21. 已知 $x + y = 6$, $x^2 + y^2 = 8$, 求 $\frac{1}{2}xy$ 的值.

【答案】 7

【解析】

【分析】 本题主要考查了完全平方公式的变形求值, 根据完全平方公式得到 $x^2 + 2xy + y^2 = 36$, 则可求出 $xy = 14$, 则 $\frac{1}{2}xy = 7$.

【详解】 解: $\because x + y = 6,$

$$\therefore (x + y)^2 = 6^2,$$

$$\therefore x^2 + 2xy + y^2 = 36,$$

$$\because x^2 + y^2 = 8,$$

$$\therefore 2xy + 8 = 36,$$

$$\therefore xy = 14,$$

$$\therefore \frac{1}{2}xy = 7.$$

22. 长方体的长、宽、高分别为 $2x+5$, $2x-1$, $2x+1$, 求表示长方体表面积 S 的代数式, 并求出 $x=2$ 时表面积的值.

【答案】 $24x^2 + 40x - 2$, 174

【解析】

【分析】 本题主要考查了整式的化简求值，长方体的表面积 $=2 \times (\text{长} \times \text{宽} + \text{长} \times \text{高} + \text{宽} \times \text{高})$ ，据此列式求出 S ，最后代值计算即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解：} S &= 2(2x+5)(2x-1) + 2(2x+5)(2x+1) + 2(2x-1)(2x-1) \\ &= 2(4x^2+10x-2x-5) + 2(4x^2+10x+2x+5) + 2(4x^2-1) \\ &= 8x^2+20x-4x-10+8x^2+20x+4x+10+8x^2-2 \\ &= 24x^2+40x-2, \end{aligned}$$

$$\text{当 } x=2 \text{ 时, } S=24 \times 2^2+40 \times 2-2=24 \times 4+80-2=96+80-2=174.$$

23. 先化简，再求值： $(2x+y)^2-(x+3y)(x-3y)-(2x-y)^2$ ，其中 $x=2$ ， $y=-\frac{1}{2}$.

【答案】 $-x^2+8xy+9y^2$ ， $-\frac{39}{4}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了整式的化简求值，先根据平方差公式和完全平方公式去括号，然后合并同类项化简，最后代值计算即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解：} &(2x+y)^2-(x+3y)(x-3y)-(2x-y)^2 \\ &= 4x^2+4xy+y^2-(x^2-9y^2)-(4x^2-4xy+y^2) \\ &= 4x^2+4xy+y^2-x^2+9y^2-4x^2+4xy-y^2 \\ &= -x^2+8xy+9y^2, \end{aligned}$$

$$\text{当 } x=2, y=-\frac{1}{2} \text{ 时, 原式} = -2^2+8 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)+9 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -4-8+\frac{9}{4} = -\frac{39}{4}.$$

24. 在一次测试中，甲、乙两同学计算同一道整式乘法： $(2x+a)(3x+b)$ ，甲由于抄错了第一个多项式中 a 的符号，得到的结果为 $6x^2+11x-10$ ；乙由于漏抄了第二个多项式中 x 的系数，得到的结果为 $2x^2-9x+10$.

- (1) 试求出式子中 a ， b 的值；
- (2) 请你计算出这道整式乘法的正确结果.

【答案】 (1) $a=-5$ ， $b=-2$

(2) $6x^2 - 19x + 10$

【解析】

【分析】 本题考查了多项式乘多项式、二元一次方程组的应用等知识点，根据多项式乘多项式的运算法则分别进行计算，求出 a 与 b 的值是解题的关键.

(1) 根据题意将错就错，分别列出两个等式，整理后根据多项式相等的条件列出关于 a 、 b 的二元一次方程，再求出 a 与 b 的值；

(2) 把 a 与 b 的值代入原式，进而确定出正确的算式及结果即可.

【小问 1 详解】

解：由题意得 $(2x - a)(3x + b)$

$$= 6x^2 + (2b - 3a)x - ab$$

$$= 6x^2 + 11x - 10,$$

$$(2x + a)(x + b)$$

$$= 2x^2 + (a + 2b)x + ab$$

$$= 2x^2 - 9x + 10,$$

$$\text{所以 } 2b - 3a = 11, \text{ ①}$$

$$a + 2b = -9 \cdot \text{②}$$

由②得 $2b = -9 - a$ ，代入①得 $-9 - a - 3a = 11$ ，

$$\text{所以 } a = -5.$$

$$\text{所以 } 2b = -4.$$

$$\text{所以 } b = -2.$$

【小问 2 详解】

解：当 $a = -5$ 、 $b = -2$ 时，由 (1) 得 $(2x + a)(3x + b) = (2x - 5)(3x - 2) = 6x^2 - 19x + 10$.

25. 已知 $3^{18} = a^9 = 729^b$ ，化简代数式： $\frac{1}{3}ab^2 - 4a \cdot \left(\frac{1}{4}b^2 - 1\right) - (5a - 3)$ 并求出它的值.

【答案】 $-\frac{2}{3}ab^2 - a + 3$ ， -60

【解析】

【分析】本题考查了整式的乘法和加减法，化简求值，幂的乘方的逆用，熟练掌握知识点是解题的关键。先逆用幂的乘方求出 $a=9, b=3$ ，再利用整式的乘法和加减法的运算法则化简，最后代入求值即可。

【详解】解： $\because 3^{18} = a^9 = 729^b$

$$\therefore (3^2)^9 = a^9 = (3^6)^3 = 729^3 = 729^b,$$

$$\therefore a=9, b=3,$$

$$\text{原式} = \frac{1}{3}ab^2 - ab^2 + 4a - 5a + 3$$

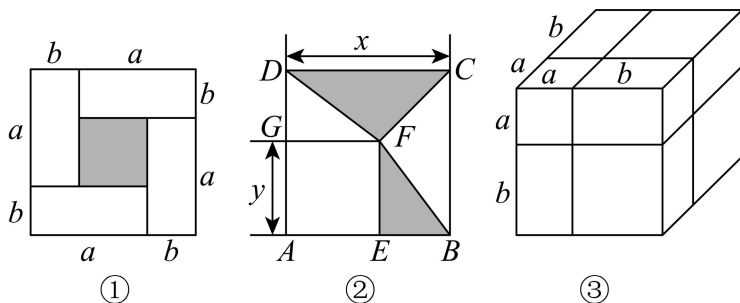
$$= -\frac{2}{3}ab^2 - a + 3,$$

$$\text{当 } a=9, b=3,$$

$$\text{原式} = -\frac{2}{3} \times 9 \times 3^2 - 9 + 3 = -60$$

五、综合题（本题满分 8 分）

26. 通常，用两种不同的方法计算同一个图形的面积，可以得到一个恒等式。



(1) 请利用图①所得的恒等式解决如下问题：若 $(a+b)^2 = 5$ ， $a-b=1$ ，求 ab 的值；

(2) 正方形 $ABCD$ 、正方形 $AEFG$ 如图②所示方式摆放，边长分别为 x ， y 。若 $x^2 + y^2 = 34$ ， $BE = 2$ ，请直接写出图中阴影部分的面积；

(3) 类似的，用两种不同的方法计算同一个几何体的体积，也可以得到一个恒等式。图③是由 2 个正方体和 6 个长方体拼成的一个大正方体，请写出一个恒等式；

(4) 已知 $a+b=3$ ， $ab=1$ ，利用(3)中的恒等式求 $\frac{a^3+b^3}{2}$ 的值。

【答案】(1) 1

(2) 8

$$(3) (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(4) 9$$

【解析】

【分析】 本题考查完全平方公式和立方公式，熟练掌握数形结合是解题的关键；

(1) 根据图形的面积即可求解；

(2) 根据四边形 $ABCD$ 和 $AEFG$ 都是正方形，设 $BC = AB = DC = x$ ， $AE = AG = EF = y$ ，根据

$$S_{\text{阴影}} = S_{\triangle DFC} + S_{\triangle EBF}，\text{即可求解；}$$

(3) 根据题意可得，正方形面积表示为 $(a+b)^2$ 或 $a^2 + a^2b + a^2b + ab^2 + a^2b + ab^2 + ab^2 + b^2$ ，即可求解；

(4) 根据 $a+b=3$ ， $ab=1$ ，结合 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 即可求解；

【小问 1 详解】

由图 1 可知，大正方形面积为 $(a+b)^2$ 或 $(a-b)^2 + 4ab$ ，

$$\therefore (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab，$$

$$\therefore 5 = 1 + 4ab，$$

$$\therefore ab = 1$$

【小问 2 详解】

由图可知， $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 和 $AEFG$ 都是正方形，

$$\therefore BC = AB = DC = x，$$

$$AE = AG = EF = y，$$

$$BE = 2$$

$$\therefore x - y = BE = 2，\text{又 } x^2 + y^2 = 34，$$

$$\therefore (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 4，$$

$$\therefore xy = 15，$$

$$S_{\text{阴影}} = S_{\triangle DFC} + S_{\triangle EBF}$$

$$= \frac{1}{2}x(x - y) + \frac{1}{2} \times 2 \times y$$

$$= \frac{1}{2} \times 2x + y$$

$$= x + y$$

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 34 + 30 = 64,$$

$$\because x + y > 0,$$

$$\therefore x + y = 8$$

即阴影部分的面积为 8

【小问 3 详解】

由图 3 得，正方形体积表示为 $(a + b)^3$ ，

也可以表示为 $a^3 + a^2b + a^2b + ab^2 + a^2b + ab^2 + ab^2 + b^3$ ，

$$\therefore (a + b)^3 = a^3 + a^2b + a^2b + ab^2 + a^2b + ab^2 + ab^2 + b^3,$$

$$\text{即 } a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2$$

【小问 4 详解】

$$\because a + b = 3, \quad ab = 1,$$

$$\text{由 (3) 得 } a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2,$$

$$= (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$= 27 - 3 \times 1 \times 3$$

$$= 18,$$

$$\therefore \frac{a^3 + b^3}{2} = 9$$