

2024 学年第一学期期中质量调研卷

七年级数学学科

(时间: 100 分钟 分值: 150 分)

一卷 (满分 100 分)

一、选择题 (每题 2 分, 共 6 题, 满分 12 分)

1. 在下列代数式: $x^2 + 5$, -1 , $-3x + 2$, π , $\frac{5}{x}$, $x^2 + \frac{1}{x+5}$, $5x$ 中, 整式有 ()

- A. 3 个 B. 4 个 C. 5 个 D. 6 个

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题主要考查了整式的定义, 解题的关键在于能够熟练掌握整式的定义.

根据整式的定义: 整式为单项式和多项式的统称, 是有理式的一部分, 在有理式中可以包含加, 减, 乘, 除、乘方五种运算, 但在整式中除数不能含有字母, 进行判断即可.

【详解】 解: 下列代数式: $x^2 + 5$, -1 , $-3x + 2$, π , $\frac{5}{x}$, $x^2 + \frac{1}{x+5}$, $5x$ 中,
属于整式的有: $x^2 + 5$, -1 , $-3x + 2$, π , $5x$.

$\therefore$ 一共有 5 个整式.

故选: C.

2. 下列说法错误的是 ()

- A. $-2x^2y$ 的次数是 3 B. $-x^3 + 2x^2 - 1$ 的常数项是 -1
C. $-\frac{2a^2+5}{3}$ 是二次二项式 D. $5ab^3 - 2a^2bc + 1$ 是按 a 的升幂排列的

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了单项式和多项式的有关概念, 单项式中的数字因数叫做单项式的系数, 系数包括它前面的符号, 单项式的次数是所有字母的指数的和; 多项式的次数是多项式中次数最高的项的次数.

【详解】 解: A. $-2x^2y$ 的次数是 3, 正确;

B. $-x^3 + 2x^2 - 1$ 的常数项是 -1 , 正确;

C. $-\frac{2a^2+5}{3}$ 是二次二项式，正确；

D. $1+5ab^3-2a^2bc$ 是按 a 的升幂排列的，故原说法不正确；

故选 D.

3. 下列计算正确的是 ()

A. $a^8 \div a = a^9$

B. $2a + a = 2a^2$

C. $-a^3 \cdot 3a^4 = -3a^7$

D. $(2ab^2)^3 = 6a^3b^6$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题主要考查了整式运算，熟练掌握相关运算法则是解题关键. 根据同底数幂的除法、合并同类项法则、单项式乘以单项式法则、积的乘方运算法则，逐项分析判断即可.

【详解】 解： A. $a^8 \div a = a^7$ ，故原运算错误，不符合题意；

B. $2a + a = 3a$ ，故原运算错误，不符合题意；

C. $-a^3 \cdot 3a^4 = -3a^7$ ，选项正确，符合题意；

D. $(2ab^2)^3 = 8a^3b^6$ ，故原运算错误，不符合题意.

故选： C.

4. 下列各式中能用平方差公式计算的是 ()

A. $(3a+2b)(3b-2a)$

B. $(2-3x)(3x-2)$

C. $(m+3n)(3n-m)$

D. $(4x-y)(-4x+y)$

【答案】 C

【解析】

【分析】 此题考查了平方差公式，熟练掌握平方差公式是解本题的关键. 可以用平方差公式计算的式子的特点是：两个二项式相乘，并且这两个二项式中有一项完全相同，另一项互为相反数. 相乘的结果是乘式中两项的平方差（相同项的平方减去相反项的平方）.

【详解】 解： A. $(3a+2b)(3b-2a)$ 不符合平方差公式的形式，故不符合题意；

B. $(2-3x)(3x-2)$ 不符合平方差公式的形式，故不符合题意；

C. $(m+3n)(3n-m) = 9n^2 - m^2$ ，故符合题意；

D. $(4x-y)(-4x+y)$ 不符合平方差公式的形式，故不符合题意；

故选：C.

5. 下列等式从左到右的变形，是因式分解的是（ ）

A. $2x(x-3)=2x^2-6x$

B. $12m^2n=3m^2\times 4n$

C. $a^2-2ab+b^2-1=(a-b)^2-1$

D. $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了因式分解，因式分解是把一个多项式转化成几个整式积的形式．根据定义逐一判定即可得答案．

【详解】解：A、 $2x(x-3)=2x^2-6x$ ，是整式乘法，不是因式分解，故本选项不合题意；

B、 $12m^2n=3m^2\times 4n$ ，等式左边不是多项式，不是因式分解，故本选项不合题意；

C、 $a^2-2ab+b^2-1=(a-b)^2-1$ ，等式的右边不是积的形式，不是因式分解，故本选项不合题意；

D、 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ ，是因式分解，故本选项符合题意；

故选：D.

6. 如图 1，把一个长为 m 、宽为 n 的长方形（ $m>n$ ），沿虚线剪开，将其与阴影部分所表示的小正方形一起拼接成如图 2 所示的正方形，则下列说法错误的是（ ）

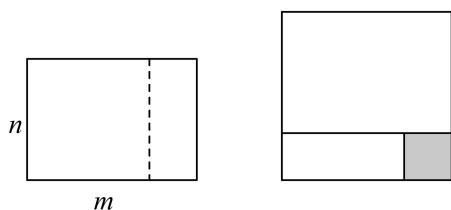


图1

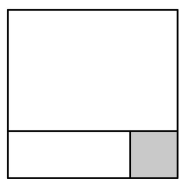


图2

A. 图 1 所示的长方形周长 $= 2m + 2n$

B. 图 2 所示的大正方形周长 $= 2m + 2n$

C. 图 2 阴影部分所表示的小正方形边长 $= m - n$

D. 图 2 空白部分的周长 $= 2m + 2n$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了列代数式，正方形的判定和性质，拼图的几何意义，熟练掌握拼图的意义是解题的关

键.

设小正方形的边长为 x ，则剪下的小长方形的长为 n ，宽为 x ，较大长方形的另一边为 $m-x$ ，结合图 2，大长方形的长为 $n+x$ ，阴影部分的宽为 $n+x$ ，上端来自剪下的大长方形宽为 $m-x$ ，根据矩形的性质，正方形的判定和性质，计算判断即可.

【详解】解：设小正方形的边长为 x ，则剪下的小长方形的长为 n ，宽为 x ，较大正方形的边长为 $m-x$ ，结合图 2，大正方形的长为 $n+x$ 或 $m-x$ ，

$$\therefore n+x=m-x,$$

$$\therefore x=\frac{m-n}{2}, n+x=\frac{m+n}{2},$$

图 1 所示的长方形周长 $=2m+2n$ ，故 A 选项正确，不符合题意；

$$n+x=m-x,$$

图 2 所示的大正方形周长 $=4(n+x)=4\times\frac{m+n}{2}=2m+2n$ ，故 B 选项正确，不符合题意；

图 2 阴影部分所表示的小正方形边长 $x=\frac{m-n}{2}\neq m-n$ ，故 C 选项错误，符合题意；

图 2 空白部分的周长 $=2m+2n$ ，故 D 选项正确，不符合题意；

故选 C.

二、填空题（每题 2 分，共 14 题，满分 28 分）

7. 计算： $2a-a=$ _____.

【答案】 a

【解析】

【分析】按照合并同类项法则合并即可.

【详解】解： $2a-a=a$ ，

故答案为： a

【点睛】本题考查了合并同类项，解题关键是熟练运用合并同类项法则进行计算.

8. 计算： $(-2a^2)(a-3)=$ _____.

【答案】 $-2a^3+6a^2$

【解析】

【分析】本题主要考查了单项式乘多项式，熟练掌握单项式乘多项式运算法则是解题的关键. 根据单项式乘多项式运算法则进行计算即可.

【详解】解： $(-2a^2)(a-3)$

$$= -2a^2 \cdot a - 3(-2a^2)$$

$$= -2a^3 + 6a^2.$$

故答案为： $-2a^3 + 6a^2$.

9. 计算： $(a-b)(b-a)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ (结果用幂的形式表示).

【答案】 $(a-b)^3$

【解析】

【详解】 分析： 本题首先转化为同底数， 然后根据同底数幂的乘法计算法则即可得出答案.

详解： 原式 $= (a-b)(a-b)^2 = (a-b)^3$.

点睛： 本题主要考查的就是同底数幂的乘法计算法则， 属于基础题型. 互为相反数的两个数的偶数次幂相等是解决这个问题的关键.

10. 计算： $(-2)^{2024} \times (\frac{1}{2})^{2025} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{2}$ ## 0.5

【解析】

【分析】 本题考查了积的乘方， 逆向运用积的乘方运算法则计算即可. 积的乘方法则： 把每一个因式分别乘方， 再把所得的幂相乘.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解： } & (-2)^{2024} \times (\frac{1}{2})^{2025} \\ &= 2^{2024} \times (\frac{1}{2})^{2024} \times \frac{1}{2} \\ &= (2 \times \frac{1}{2})^{2024} \times \frac{1}{2} \\ &= 1^{2024} \times \frac{1}{2} \\ &= 1 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

故答案为： $\frac{1}{2}$.

11. 计算： $2023^2 - 2022 \times 2024 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查的是利用平方差公式进行简便运算，把原式化为 $2023^2 - (2023-1) \times (2023+1)$ ，再进一步计算即可.

【详解】 解： $2023^2 - 2022 \times 2024$
 $= 2023^2 - (2023-1) \times (2023+1)$
 $= 2023^2 - 2023^2 + 1$
 $= 1,$

故答案为： 1

12. 若 $3^x = 6a$ ， $3^y = 3b$ ， 则 $3^{x-y} =$ _____.

【答案】 $\frac{2a}{b}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了同底数幂除法逆用，熟练掌握同底数幂除法运算法则，是解题的关键. 根据同底数幂除法运算法则进行计算即可.

【详解】 解： $\because 3^x = 6a$ ， $3^y = 3b$ ，
 $\therefore 3^{x-y} = 3^x \div 3^y = 6a \div 3b = \frac{2a}{b}.$

故答案为： $\frac{2a}{b}.$

13. 已知关于 x 、 y 的多项式 $(m-1)x^{|m|}y^3 + 3x - 6$ 是一个四次三项式， 则 $m =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 直接利用绝对值的意义以及多项式的次数与项数确定方法分析得出答案即可.

【详解】 解： $\because$ 关于 x 、 y 的多项式 $(m-1)x^{|m|}y^3 + 3x - 6$ 是一个四次三项式，
 $\therefore m-1 \neq 0$ ， $|m|+3=4$ ，

解得： $m = -1$ ，

故答案为： -1.

【点睛】 本题主要考查了多项式的相关概念及绝对值，熟练掌握以上知识点是解此题的关键.

14. 若 $(x+m)$ 与 $(x-3)$ 的乘积中不含 x 的一次项， 则 m 的值为_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】把式子展开，找到所有 x 的一次项的系数，令其为 0，可求出 m 的值.

【详解】解： $\because (x+m)(x-3) = x^2 - 3x + mx - 3m = x^2 + (m-3)x - 3m$,

又 $\because$ 结果中不含 x 的一次项，

$\therefore m-3=0$ ，解得 $m=3$.

故答案为： 3.

【点睛】本题主要考查了多项式乘多项式的运算，注意当要求多项式中不含有哪一项时，应让这一项的系数为 0.

15. 已知 $a+b=2$ ， $ab=-8$ ， 则 $a^2+b^2=$ _____.

【答案】 20

【解析】

【分析】本题主要考查了完全平方公式的变形求值，熟练掌握完全平方公式，是解题的关键. 根据 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ ， 结合 $a+b=2$ ， $ab=-8$ ， 进行求值即可.

【详解】解： $\because a+b=2$ ， $ab=-8$ ，

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=2^2-2\times(-8)=4+16=20$.

故答案为： 20.

16. 分解因式： $2a^3b^2-3a^2b^2=$ _____.

【答案】 $a^2b^2(2a-3)$

【解析】

【分析】此题主要考查了提取公因式法分解因式，正确找出公因式是解题关键. 直接提取公因式 a^2b^2 ， 进而分解因式得出答案.

【详解】解： 原式 $= a^2b^2(2a-3)$.

故答案为： $a^2b^2(2a-3)$.

17. 分解因式： $x^2-5x-6=$ _____.

【答案】 $(x-6)(x+1)$

【解析】

【分析】直接根据十字相乘法分解即可.

【详解】 $x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1)$,

故答案为 $(x - 6)(x + 1)$.

【点睛】本题考查了因式分解, 把一个多项式化成几个整式的乘积的形式, 叫做因式分解. 因式分解常用的方法有: ①提公因式法; ②公式法; ③十字相乘法; ④分组分解法. 因式分解必须分解到每个因式都不能再分解为止.

18. 若 $x^2 + mx + \frac{1}{9}$ 是关于 x 的完全平方式, 则常数 m 的值为_____.

【答案】 $\pm \frac{2}{3}$

【解析】

【分析】本题考查了完全平方公式的应用, 根据 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, 进行作答即可

【详解】解: $\because x^2 + mx + \frac{1}{9}$ 是关于 x 的完全平方式,

$$\therefore mx = \pm 2 \times x \times \frac{1}{3}$$

$$\text{解得 } m = \pm \frac{2}{3}$$

$$\text{故答案为: } \pm \frac{2}{3}$$

19. 多项式 $a^2 - b^2 + 2a$ 添加一个单项式后能用分组分解法进行因式分解. 如果将 a^2 和 $+2a$ 分成一组, $-b^2$ 和此单项式分成一组, 那么这个单项式为_____.

【答案】 $\frac{1}{4}a^2b^2$ 或 $-\frac{1}{2}ab^2$

【解析】

【分析】本题考查的是因式分解, 掌握分组分解因式的方法是解本题的关键, 先分解 $a^2 + 2a$ 得到分组后的公因式是 $(a + 2)$, 由此可得 $-b^2$ 和此单项式分成一组后应得到公因式 $(a + 2)$, 从而可得答案.

【详解】解: $\because a^2 + 2a = a(a + 2)$,

$\therefore$ 第一种情况, $-b^2$ 与 $\frac{1}{4}a^2b^2$ 一组,

$$\therefore a^2 - b^2 + 2a + \frac{1}{4}a^2b^2$$

$$= a^2 + 2a + \frac{1}{4}a^2b^2 - b^2$$

$$\begin{aligned}
&= a(a+2) + \frac{1}{4}b^2(a^2-4) \\
&= a(a+2) + \frac{1}{4}b^2(a+2)(a-2) \\
&= (a+2)\left[a + \frac{1}{4}b^2(a-2)\right] \\
&= (a+2)\left(a + \frac{1}{4}ab^2 - \frac{1}{2}b^2\right);
\end{aligned}$$

第二种情况, $-b^2$ 与 $-\frac{1}{2}ab^2$ 一组,

$$\begin{aligned}
&\therefore a^2 - b^2 + 2a - \frac{1}{2}ab^2 \\
&= (a^2 + 2a) - \left(b^2 + \frac{1}{2}ab^2\right) \\
&= a(a+2) - \frac{1}{2}b^2(2+a) \\
&= a(a+2) - \frac{1}{2}b^2(a+2) \\
&= (a+2)\left(a - \frac{1}{2}b^2\right);
\end{aligned}$$

故答案为: $\frac{1}{4}a^2b^2$ 或 $-\frac{1}{2}ab^2$.

20. 已知: $(x+2)^{x+5} = 1$, 则 $x =$ _____.

【答案】 -5 或 -1 或 -3

【解析】

【分析】 根据零指数幂和 1 的任何次幂都等于 1 分情况讨论求解.

【详解】 解: 根据 0 指数的意义得:

当 $x+2 \neq 0$ 时, $x+5=0$, 解得: $x=-5$.

当 $x+2=1$ 时, $x=-1$,

当 $x+2=-1$ 时, $x=-3$, $x+5=2$, 指数为偶数, 符合题意.

故答案为: -5 或 -1 或 -3.

【点睛】 本题考查零指数幂和有理数的乘方, 掌握零指数幂和 1 的任何次幂都是 1 是本题的解题关键.

三、简答题 (每题 5 分, 共 6 题, 满分 30 分)

21. 计算: $(-2xy^2)^2 \cdot (\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}xy)$.

【答案】 $x^2y^6 - 2x^4y^4 - 6x^3y^5$

【解析】

【详解】 试题分析：先利用幂的乘方与积的乘方运算法则计算 $(-2xy^2)^2$ ，再运用乘法对加法的分配律把括号展开即可求解.

试题解析： $(-2xy^2)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}xy\right)$

$$= 4x^2y^4 \cdot \left(\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}xy\right)$$

$$= x^2y^6 - 2x^4y^4 - 6x^3y^5$$

22. 计算： $(-3a^m)^2 - a^{m+1} \cdot a^{m-1} + 2(a^{m+1})^2 \div a^2$.

【答案】 $10a^{2m}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了幂的混合运算，解题的关键是熟练掌握幂的乘方，积的乘方，同底数幂乘法运算法则. 根据幂的乘方，积的乘方，同底数幂乘法运算法则进行计算即可.

【详解】 解： $(-3a^m)^2 - a^{m+1} \cdot a^{m-1} + 2(a^{m+1})^2 \div a^2$

$$= 9a^{2m} - a^{2m} + 2a^{2m+2} \div a^2$$

$$= 9a^{2m} - a^{2m} + 2a^{2m}$$

$$= 10a^{2m}.$$

23. 计算： $(a + 2b - 3c)(a - 2b - 3c)$.

【答案】 $a^2 + 9c^2 - 6ac - 4b^2$

【解析】

【分析】 本题考查了平方差公式和完全平方公式. 此题难度适中，注意首先把原式变形为： $[(a - 3c) + 2b][(a - 3c) - 2b]$ 是解答此题的关键.

所求的式子可化成 $[(a - 3c) + 2b][(a - 3c) - 2b]$ ，然后利用平方差公式和完全平方公式即可求解.

【详解】 解： $(a + 2b - 3c)(a - 2b - 3c)$

$$=[(a-3c)+2b][(a-3c)-2b]$$

$$=(a-3c)^2-(2b)^2$$

$$=a^2+9c^2-6ac-4b^2.$$

24. 解不等式: $(4x-3)(3+4x)-(5x+1)^2 < (3x+1)(4-3x).$

【答案】 $x > -\frac{14}{19}$

【解析】

【分析】 本题考查了求不等式的解集, 先根据乘法公式、多项式与多项式的乘法法则化简, 然后移项、合并同类项、系数化为1即可.

【详解】 解: $(4x-3)(3+4x)-(5x+1)^2 < (3x+1)(4-3x),$

$$16x^2-9-25x^2-10x-1 < 12x-9x^2+4-3x,$$

$$16x^2-25x^2-10x-12x+9x^2+3x < 1+9+4,$$

$$-19x < 14,$$

$$x > -\frac{14}{19}.$$

25. 分解因式: $(x^2+y^2)^2-4x^2y^2.$

【答案】 $(x+y)^2(x-y)^2$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解;

先利用平方差公式进行分解, 再分别利用完全平方公式继续分解即可.

【详解】 解: 原式 $= (x^2+y^2+2xy)(x^2+y^2-2xy)$

$$= (x+y)^2(x-y)^2.$$

26. 分解因式: $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12.$

【答案】 $(x+2)(x-1)(x+3)(x-2)$

【解析】

【分析】 本题考查十字相乘法分解因式, 先把 (x^2+x) 当成一个整体进行分解, 再逐个括号进行分解即可.

【详解】 $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$

$$= (x^2 + x - 2)(x^2 + x - 6)$$

$$= (x + 2)(x - 1)(x + 3)(x - 2).$$

四、解答题（第 27、28 题每题 6 分，第 29、30 题每题 9 分，共 30 分）

27. 小杰准备完成题目“求整式 A： $\blacksquare x^2 + 6x + 9$ 与整式 B： $6x + 4x^2 - 7$ 的差”，发现系数“ $\blacksquare$ ”印刷不清楚.

(1) 他把“ $\blacksquare$ ”猜成 3，求 A 与 B 的差；

(2) 小明说：“你猜错了，我看到该题的标准答案结果是常数”. 请通过计算说明原题中的“ $\blacksquare$ ”是多少？

【答案】 (1) $-x^2 + 16$ ；

(2) 4.

【解析】

【分析】 本题主要考查整式的加减，解题的关键是掌握去括号、合并同类项法则.

(1) 原式去括号、合并同类项即可得；

(2) 设“ $\blacksquare$ ”是 a ，将 a 看作常数，去括号、合并同类项后根据结果为常数知二次项系数为 0，据此得出 a 的值.

【小问 1 详解】

$$\text{解：} (3x^2 + 6x + 9) - (6x + 4x^2 - 7)$$

$$= 3x^2 + 6x + 9 - 6x - 4x^2 + 7$$

$$= -x^2 + 16;$$

【小问 2 详解】

解：设“ $\blacksquare$ ”是 a ,

$$\text{则原式} (ax^2 + 6x + 9) - (6x + 4x^2 - 7)$$

$$= ax^2 + 6x + 9 - 6x - 4x^2 + 7$$

$$= (a - 4)x^2 + 16,$$

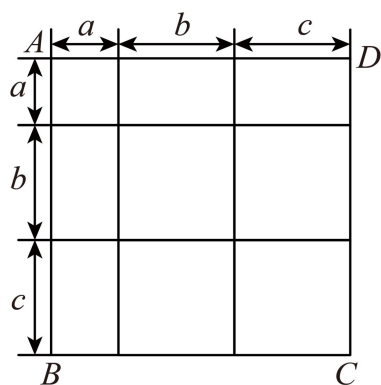
$\because$ 标准答案的结果是常数,

$$\therefore a - 4 = 0,$$

解得： $a = 4$.

原题中的“ $\blacksquare$ ”是 4.

28. 我们知道，利用图形的面积能解释与得出代数恒等式，请你解答下列问题：



(1) 如图，根据 3 个正方形和 6 个长方形的面积之和等于大正方形 $ABCD$ 的面积，可以得到代数恒等式：

$$(a+b+c)^2 = \underline{\hspace{2cm}};$$

(2) 若 n 、 t 满足： $(n-2024)^2 + (2026-2n)^2 + (n+1)^2 = t^2 + 2t - 18$,

$(n-2024)(2026-2n) + (n-2024)(n+1) + (2026-2n)(n+1) = 1-t$ ，求 t 的值.

【答案】 (1) $2ab + 2ac + 2bc$

(2) $t = 5$

【解析】

【分析】 本题考查因式分解的应用，代数恒等式与图形的面积，解题的关键是熟练掌握完全平方公式的几何背景.

(1) 利用面积相等求解即可；

(2) 利用 (1) 的结论，得到方程 $t^2 - 16 = 9$ ，求出 t 的值，再由 $t^2 + 2t - 18 \geq 0$ ，求符合条件的 t 的值即可.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 图中 3 个正方形的边长分别为 a 、 b 、 c ,

$\therefore$ 面积分别为 a^2, b^2, c^2 ,

$\because$ 边长为 a 、 b 的长方形有两个，边长为 a 、 c 的长方形有两个，边长为 b 、 c 的长方形有两个，

$\therefore$ 面积分别为 ab, ac, bc ,

$$\therefore (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

故答案为： $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ ；

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}
&\text{解: } \because (n-2024)(2026-2n) + (n-2024)(n+1) + (2026-2n)(n+1) = 1-t, \\
&\therefore 2(n-2024)(2026-2n) + 2(n-2024)(n+1) + 2(2026-2n)(n+1) = 2-2t, \\
&\therefore (n-2024)^2 + (2026-2n)^2 + (n+1)^2 = t^2 + 2t - 18, \\
&\therefore (n-2024+2026-2n+n+1)^2, \\
&= (n-2024)^2 + (2026-2n)^2 + (n+1)^2 + 2(n-2024)(2026-2n) + 2(n-2024)(n+1) + 2(2026-2n)(n+1) \\
&= t^2 + 2t - 18 + 2 - 2t \\
&= t^2 - 16, \\
&\therefore t^2 - 16 = 9, \\
&\text{解得 } t = \pm 5, \\
&\because t^2 + 2t - 18 \geq 0, \\
&\therefore t = -5 \text{ 舍去}, \\
&\therefore t = 5.
\end{aligned}$$

29. 【数学背景】幻方是一种中国传统益智游戏，它是将数字安排在正方形格子中使每行、每列及对角线上的数字和都相等的方法。

【问题提出】

(1) 如表①，将 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 九个数填入到 3×3 的方格内，使每行、每列及对角线上的数字和都相等，则这个和是_____.

表①

【模型迁移】

(2) 表②是显示部分式子的幻方，用含 b 的式子表示 a .

$2a$		
$3b$		$5b$

		$-2b$
--	--	-------

表②

(3) 表③是显示部分式子的幻方，求 x 的值.

$2m^2 + m$	$m^2 + m$	
$x - 2m^2 + 6m$		$2m^2 + 3m$
		$2m + 5$

表③

【答案】(1) 15；见详解；(2) $a = 5b$ ；(3) 15

【解析】

【分析】本题主要考查了整式运算以及代数式求值，理解题意，准确运用整式运算法则是解题关键.

(1) 分析题意，确定答案即可；填入符合要求的数字即可；

(2) 根据题意可得 $2a + (-2b) = 3b + 5b$ ，整理即可获得答案；

(3) 结合题意，先求得 $m^2 - 3m = 5$ ，进而计算出 $x = 2m^2 - 6m + 5$ ，然后整体代入求值即可.

【详解】解：(1) 将1,2,3,4,5,6,7,8,9九个数填入到 3×3 的方格内，

若使每行、每列及对角线上的数字和都相等，则这个和是 15.

故答案为：15；

在图①中填入数字，如下图；

2	9	4
7	5	3
6	1	8

(2) 根据题意，可有 $2a + (-2b) = 3b + 5b$ ，

整理可得 $a = 5b$ ；

(3) 根据题意，可有 $2m^2 + m + m^2 + m = 2m^2 + 3m + 2m + 5$ ，

整理，可得 $m^2 - 3m = 5$ ，

又因为 $x - 2m^2 + 6m + 2m^2 + 3m = 2m^2 + m + 2m + 5$ ，

所以 $x = 2m^2 - 6m + 5 = 2(m^2 - 3m) + 5 = 2 \times 5 + 5 = 15$.

30. 如果 $10^b = n$. 那么称 b 为 n 的劳格数, 记为 $b = d(n)$, 由定义可知, $10^b = n$ 和 $b = d(n)$ 所表示的 b 、 n 两个量之间具有同一关系.

(1) 根据定义, 填空: $d(10) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 劳格数有如下性质: $d(mn) = d(m) + d(n)$, $d\left(\frac{m}{n}\right) = d(m) - d(n)$, 根据运算性质. 回答问题:

① $\frac{d(a^2)}{d(a)} = \underline{\hspace{2cm}}$. (a 为正数)

②若 $d(2) = 0.3010$. 求 $d(4)$ 、 $d(5)$ 的值.

【答案】 (1) 1 (2) ①2; ②0.6020; 0.6990

【解析】

【分析】 (1) 根据新定义可知, $10^b = n$ 和 $b = d(n)$ 所表示的 b 、 n 两个量之间具有同一关系, 再计算即可.

(2) ①根据 $d(mn) = d(m) + d(n)$, $d\left(\frac{m}{n}\right) = d(m) - d(n)$, 据此求出算式的值是多少即可.

②首先根据 $d(2) = 0.3010$, $d(4) = d(2) + d(2)$, 求出 $d(4)$ 的值是多少; 根据

$$d(5) = d\left(\frac{20}{4}\right) = d(20) - d(4) = d(10) + d(2) - d(4) \text{ 计算即可.}$$

【小问 1 详解】

解: 由新定义可得, $n = 10 = 10^b$,

$$\therefore b = d(10) = 1;$$

【小问 2 详解】

解: ① $\frac{d(a^2)}{d(a)} = \frac{d(a) + d(a)}{d(a)} = \frac{2d(a)}{d(a)} = 2;$

② $\because d(2) = 0.3010,$

$$\therefore d(4) = d(2 \times 2) = d(2) + d(2) = 0.3010 + 0.3010 = 0.6020;$$

由题意得, $d(5) = d\left(\frac{20}{4}\right)$

$$= d(20) - d(4)$$

$$\begin{aligned}
 &= d(10) + d(2) - d(4) \\
 &= 1 + 0.3010 - 0.6020 \\
 &= 0.6990.
 \end{aligned}$$

【点睛】此题主要考查了幂的定义，同底数幂的乘法和除法。解答此题的关键还要明确劳格数的含义和应用，要熟练掌握。

二卷 (满分 50 分)

五、选择题 (每题 4 分，共 3 题，满分 12 分)

31. 已知 $(x-2021)^2 + (x-2025)^2 = 34$ ，则 $(x-2023)^2$ 的值是 ()

- A. 5 B. 9 C. 13 D. 17

【答案】C

【解析】

【分析】设 $A = x - 2021$ ， $B = x - 2025$ ，根据完全平方公式的变形求出 $AB = 9$ ，则 $[(x-2023)+2][(x-2023)-2] = 9$ ，即可利用平方差公式求出 $(x-2023)^2 = 13$ 。

【详解】解：设 $A = x - 2021$ ， $B = x - 2025$ ，

$$\therefore A^2 + B^2 = 34, \quad A - B = 4,$$

$$\therefore (A - B)^2 = 16,$$

$$\therefore -2AB = (A - B)^2 - (A^2 + B^2) = -18,$$

$$\therefore AB = 9,$$

$$\therefore (x - 2021)(x - 2025) = 9,$$

$$\therefore [(x - 2023) + 2][(x - 2023) - 2] = 9,$$

$$\therefore (x - 2023)^2 - 4 = 9,$$

$$\therefore (x - 2023)^2 = 13,$$

故选：C。

【点睛】本题主要考查了完全平方公式的变形求值，平方差公式，正确推出 $(x - 2021)(x - 2025) = 9$ 是解题的关键。

32. 观察： $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ ，

$$(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1,$$

$$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=x^4-1,$$

$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=x^5-1,$$

据此规律，求 $2^{2023}+2^{2022}+2^{2021}+\cdots+2^2+2+1$ 的个位数字是（ ）

A. 1

B. 3

C. 5

D. 7

【答案】C

【解析】

【分析】根据题目规律解答即可.

【详解】根据题意可得规律： $(x-1)(x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x+1)=x^{n+1}-1$,

$$\therefore 2^{2023}+2^{2022}+2^{2021}+\cdots+2^2+2+1=(2-1)(2^{2023}+2^{2022}+2^{2021}+\cdots+2^2+2+1)=2^{2024}-1,$$

$\because 2^1-1$ 的个位数字是1;

2^2-1 的个位数字是3;

2^3-1 的个位数字是7;

2^4-1 的个位数字是5;

2^5-1 的个位数字是1;

2^6-1 的个位数字是3;

而 $2024 \div 4 = 506$

$\therefore 2^{2024}-1$ 的个位数字是5;

故选：C.

【点睛】本题主要考查了平方差公式，根据材料找出规律是解答本题的关键.

33. 若 m, n 是正整数，那么整式 $4^m+4^n-2^{m+n+1}$ 是（ ）

A. 正数

B. 非负数

C. 负数

D. 可能是正数，也可能是

负数

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了同底数幂的乘法和完全平方公式，解题的关键是掌握同底数幂的乘法运算法则和完全平方公式的应用.

利用幂的运算法则和完全平方公式计算.

【详解】解：∵ m, n 是正整数，

$$\begin{aligned} &\therefore 4^m + 4^n - 2^{m+n+1} \\ &= 2^{2m} + 2^{2n} - 2 \cdot 2^m \cdot 2^n \\ &= (2^m - 2^n)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

∴ 整式 $4^m + 4^n - 2^{m+n+1}$ 是非负数.

故选：B.

六、填空题 (每题 4 分, 共 5 题, 满分 20 分)

34. 已知 $x = 3$ 时, 代数式 $ax^3 + bx + 8$ 的值是 12; 那么当 $x = -3$ 时, 代数式 $ax^3 + bx - 5$ 的值为_____.

【答案】 -9

【解析】

【分析】将 $x = 3$ 代入 $ax^3 + bx + 8$, 求出 $27a + 3b$ 值, 将 $x = -3$, 以及 $27a + 3b$ 值, 代入 $ax^3 + bx - 5$ 进行求值即可.

【详解】解：∵ $x = 3$ 时, 代数式 $ax^3 + bx + 8$ 的值是 12,

$$\text{即: } 27a + 3b + 8 = 12,$$

$$\therefore 27a + 3b = 4;$$

$$\text{当 } x = -3 \text{ 时: } ax^3 + bx - 5 = -27a - 3b - 5 = -(27a + 3b) - 5 = -4 - 5 = -9.$$

故答案为：-9.

【点睛】本题考查代数式求值. 解题的关键是利用整体思想, 代入求值.

35. 比较大小: 15^{16} _____ 33^{13} (填 “>”、“<” 或 “=”).

【答案】 <

【解析】

【分析】本题主要考查了幂的乘方的逆用, 熟练掌握运算法则, 是解题的关键. 根据 $32^{13} = (2^5)^{13} = 2^{65}$, $2^{64} = (2^4)^{16} = 16^{16}$, 由 $33^{13} > 32^{13}$, $2^{65} > 2^{64}$, 得出 $33^{13} > 16^{16}$, 根据 $16^{16} > 15^{16}$, 即可得出结论.

【详解】解： $32^{13} = (2^5)^{13} = 2^{65}$,

$$2^{64} = (2^4)^{16} = 16^{16},$$

$$\therefore 33^{13} > 32^{13}, \quad 2^{65} > 2^{64},$$

$$\therefore 33^{13} > 16^{16},$$

$$\therefore 16^{16} > 15^{16},$$

$$\therefore 33^{13} > 15^{16},$$

$$\text{即 } 15^{16} < 33^{13}.$$

故答案为：<.

36. 已知 a, b, c 是三个连续的正整数, $a^2 = 33124$, $c^2 = 33856$, 那么 $b^2 =$ _____.

【答案】 33489

【解析】

【分析】 利用平方差公式得到 $(c+a)(c-a) = 732$, 再根据 a, b, c 是三个连续正整数得到 $c-a = 2$, 于是可计算出 $c+a = 366$, 然后可得 c , 从而得到 b 的值.

【详解】 解: $c^2 - a^2 = (c+a)(c-a) = 33856 - 33124 = 732$,

$\therefore a, b, c$ 是三个连续正整数,

$$\therefore c - a = 2,$$

$$\therefore c + a = 366,$$

$$\therefore c = 184, a = 182,$$

$$\therefore b = 183,$$

$$\therefore b^2 = 33489.$$

故答案为: 33489.

【点睛】 本题考查了因式分解的应用: 利用因式分解解决求值问题; 利用因式分解解决证明问题; 利用因式分解简化计算问题.

37. 若 $x^2 + 4x + 1 = 0$, 求 $\frac{x^4 + 19x^2 + 1}{2x^3 + 19x^2 + 2x} =$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查分式的基本性质、完全平方公式变形求值, 解答的关键是分式的基本性质的灵活运用. 先

将 $x^2 + 4x + 1 = 0$ 化为 $x + \frac{1}{x} = -4$, 进而求得 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$, 将 $\frac{x^4 + 19x^2 + 1}{2x^3 + 19x^2 + 2x}$ 分子、分母同除以 x^2 得到

$$\frac{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 19}{2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 19}, \text{ 进而代入即可求解.}$$

【详解】解： $\because x^2 + 4x + 1 = 0$,

$$\therefore x \neq 0, \text{ 则 } x + \frac{1}{x} = -4,$$

$$\text{两边平方, 得 } x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 16, \text{ 则 } x^2 + \frac{1}{x^2} = 14,$$

$$\therefore \frac{x^4 + 19x^2 + 1}{2x^3 + 19x^2 + 2x}$$

$$= \frac{x^2 + 19 + \frac{1}{x^2}}{2x + 19 + \frac{2}{x}}$$

$$= \frac{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 19}{2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 19}$$

$$= \frac{14 + 19}{2 \times (-4) + 19}$$

$$= \frac{33}{11}$$

$$= 3.$$

故答案为：3.

38. 有一种整式处理器，能将二次多项式处理成一次多项式，处理方法是：将二次多项式的二次项系数与一次项系数的和（和为非零数）作为一次多项式的一次项系数，将二次多项式的常数项作为一次多项式的常数项. 例如： $A = x^2 + 2x - 3$ ，A 经过处理器得到 $B = (1 + 2)x - 3 = 3x - 3$ ，若 $M = x - 2(m - 4)x^2 + 7$ ， M 是关于 x 的二次多项式，若 N 是 M 经过处理器得到的整式，满足 $N = 3x + 7$ ， $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】3

【解析】

【分析】本题考查了新定义运算，多项式的定义，一元一次方程，根据题意列出一元一次方程是解题的关键. 根据题意进行计算即可求解；根据题意得 $M = x - 2(m - 4)x^2 + 7$ ，又 $N = 3x + 7$ ，根据

$M = x - 2(m-4)x^2 + 7$ 是关于 x 的二次多项式, 得出 $m \neq 4$, 进而即可求解.

【详解】解: 由 $M = x - 2(m-4)x^2 + 7$ 整理得到:

$$M = -2(m-4)x^2 + x + 7,$$

$$\therefore N = (-2m+9)x + 7$$

则关于 x 的方程 $N = 3x + 7$,

$$\therefore (-2m+9)x + 7 = 3x + 7,$$

$$\therefore -2m+9 = 3,$$

解得: $m = 3$,

$\because M = x - 2(m-4)x^2 + 7$ 是关于 x 的二次多项式

$$\therefore m \neq 4,$$

$\therefore m = 3$ 符合题意,

$$\therefore m = 3.$$

故答案为: 3.

七、解答题 (第 39 题 8 分, 第 40 题 10 分, 满分 18 分)

39 因式分解:

$$(1) a^4 - a^2 + 4a - 4;$$

$$(2) (x-6)(x-2)(x+1)(x+3) + 9x^2.$$

$$\text{【答案】} (1) (a-1)(a+2)(a^2 - a + 2)$$

$$(2) (x^2 - 2x - 6)^2$$

【解析】

【分析】(1) 根据式子特点先分组为: $a^4 - (a^2 - 4a + 4)$, 然后利用平方差公式和完全平方公式, 最后再用十字相乘法分解答即可;

(2) 根据式子特点将原式变形为 $[(x-6)(x+1)][(x-2)(x+3)] + 9x^2$, 然后整理得 $(x^2 - 5x - 6)(x^2 + x - 6) + 9x^2$, 设 $x^2 - 6 = M$, 整理得 $(M - 2x)^2$, 最后把 $x^2 - 6 = M$ 代入即可得出答案.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= a^4 - (a^2 - 4a + 4) \\ &= (a^2)^2 - (a - 2)^2 \\ &= (a^2 + a - 2)(a^2 - a + 2) \\ &= (a - 1)(a + 2)(a^2 - a + 2);\end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= [(x - 6)(x + 1)][(x - 2)(x + 3)] + 9x^2 \\ &= (x^2 - 5x - 6)(x^2 + x - 6) + 9x^2,\end{aligned}$$

$$\text{设 } x^2 - 6 = M,$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{原式} &= (M - 5x)(M + x) + 9x^2 \\ &= M^2 - 4Mx - 5x^2 + 9x^2 \\ &= M^2 - 4Mx + 4x^2 \\ &= (M - 2x)^2 \\ &= (x^2 - 6 - 2x)^2 \\ &= (x^2 - 2x - 6)^2.\end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了因式分解，把一个多项式化成几个整式的乘积的形式，叫做因式分解．因式分解常用的方法有：①提公因式法；②公式法；③十字相乘法；④分组分解法．因式分解必须分解到每个因式都不能再分解为止．

40. 阅读材料，完成下列问题．

材料：已知多项式 $2x^3 - x^2 + m$ 有一个因式是 $2x + 1$ ，求 m 的值．

$$\text{解法一：设 } 2x^3 - x^2 + m = (2x + 1)(x^2 + ax + b),$$

$$\text{则： } 2x^3 - x^2 + m = 2x^3 + (2a + 1)x^2 + (a + 2b)x + b,$$

$$\text{比较系数得: } \begin{cases} 2a+1=-1 \\ a+2b=0 \\ b=m \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a=-1 \\ b=\frac{1}{2} \\ m=\frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\therefore m = \frac{1}{2};$$

解法二: 设 $2x^3 - x^2 + m = A \cdot (2x+1)$ (A 为整式);

由于上式为恒等式, 为方便计算了取 $x = -\frac{1}{2}$, $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + m = 0$, 故 $m = \frac{1}{2}$.

(1) 已知多项式 $x^4 - mx^3 + 2nx - 16$ 有两个因式分别是 $(x-1)$ 和 $(x-2)$, 求 m 和 n 的值;

(2) 已知多项式 $x^3 + kx^2 + 3$ 除以 $x+2$ 所得的余数, 比该多项式除以 $x+3$ 所得的余数少 1, 求 k 的值.

【答案】(1) $\begin{cases} m=5 \\ n=10 \end{cases}$

(2) $k=4$

【解析】

【分析】本题主要考查了因式分解及其应用, 解题关键是熟练掌握常见的几种因式分解的方法和多项式乘多项式法则.

(1) 先设 $x^4 - mx^3 + 2nx - 16 = A(x-1)(x-2)$, 然后令 $x=1$, $x=2$, 从而列出关于 m , n 的方程, 解方程即可;

(2) 先令 $x^3 + kx^2 + 3 = (x+2)(x^2 + ax + b) + m$, $x^3 + kx^2 + 3 = (x+3)(x^2 + cx + d) + n$, 再令 $x=-2$, $x=-3$, 求出 m , n , 再根据已知条件中 m , n 的关系, 列出关于 k 的方程, 解方程即可.

【小问 1 详解】

解: 设 $x^4 - mx^3 + 2nx - 16 = A(x-1)(x-2)$,

令 $x=1$, 则 $1 - m + 2n - 16 = 0$,

令 $x=2$, 则 $16 - 8m + 4n - 16 = 0$,

$$\text{即 } \begin{cases} m - 2n = -15 \\ 8m - 4n = 0 \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} m=5 \\ n=10 \end{cases}$;

【小问 2 详解】

解: 令 $x^3 + kx^2 + 3 = (x+2)(x^2 + ax + b) + m$,

$$x^3 + kx^2 + 3 = (x+3)(x^2 + cx + d) + n,$$

再令 $x = -2$, 则 $-8 + 4k + 3 = m$;

令 $x = -3$, 则 $-27 + 9k + 3 = n$;

$\therefore$ 多项式 $x^3 + kx^2 + 3$ 除以 $x+2$ 所得的余数, 比该多项式除以 $x+3$ 所得的余数少 1,

$$\therefore n - m = 2,$$

$$\therefore (9k - 24) - (4k - 5) = 1,$$

$$\therefore 9k - 24 - 4k + 5 = 1,$$

$$\therefore 5k = 20,$$

$$\therefore k = 4.$$