

华理附中 2024 学年第一学期七年级数学学科期中考试卷

2024.10

(满分 100 分，考试时间 80 分钟)

考生注意：

1. 本试卷含四个大题，共 26 题；
2. 答题时，考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答，在草稿纸、本试卷上答题一律无效；
3. 除第一、二大题外，其余各题如无特别说明，须在答题纸的相应位置上写出主要步骤。

一、选择题（本大题共 6 题，每题 3 分，满分 18 分）

[下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.]

1. 下列各式中： $2m$ ， 0 ， $-2n$ ， $a+b=ab$ ， 单项式有 ()

- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了单项式，根据单项式的定义判断即可求解，掌握单项式的定义是解题的关键.

【详解】 解：下列各式中： $2m$ ， 0 ， $-2n$ ， $a+b=ab$ ， 单项式有 $2m$ ， 0 ， $-2n$ ， 共 3 个，
故选： B.

2. 若 $-2a^nb^5$ 与 $5a^3b^{2m+n}$ 是同类项， m 值是 ()

- A. 2 B. 0 C. -1 D. 1

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题主要考查了同类项的定义，熟练掌握所含字母相同，且相同字母的指数相同的两个单项式，称为同类项是解题的关键.

根据同类项的定义，可得 $n=3$ ， $2m+n=5$ ， 即可求解.

【详解】 解： $\because -2a^nb^5$ 与 $5a^3b^{2m+n}$ 是同类项，

$$\therefore n=3, \quad 2m+n=5,$$

解得： $n=3$ ， $m=1$ ，

故选： D

3. 对于自然数 n ，等式 $(-a)^n = -a^n (a \neq 0)$ 成立的条件是 ()

- A. n 是正奇数 B. n 是正偶数 C. n 是零 D. n 是正整数

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了有理数的乘方运算，根据有理数的乘方运算法则判断即可求解，掌握有理数的乘方运算法则是解题的关键.

【详解】 解：当 n 为正奇数时， $(-a)^n = -a^n$ ；当 n 为正偶数时， $(-a)^n = a^n$ ；当 n 是零时， $(-a)^n = 1$ ， $-a^n = -1$ ，

综上，对于自然数 n ，等式 $(-a)^n = -a^n (a \neq 0)$ 成立的条件是 n 是正奇数，

故选： A .

4. 下列多项式乘法中可以用平方差公式计算的是 ()

A. $\left(a + \frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{2}a - b\right)$ B. $(-x+3)(-x-3)$

C. $(-x+y)(x-y)$ D. $(a^2-b)(a+b^2)$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了平方差公式，用平方差公式进行计算时，公式的特点是：两个二项式相乘，其中一项相同，另一项互为相反数，符合这个特点就能用公式进行计算，根据以上内容判断即可，能理解公式的特点是解此题的关键.

【详解】 解：A、不能用平方差公式进行计算，故本选项符合题意；

B、能用平方差公式进行计算，故本选项不符合题意；

C、不能用平方差公式进行计算，故本选项不符合题意；

D、不能用平方差公式进行计算，故本选项不符合题意；

故选： B .

5. 如果 $a - (b + c - d) = (a - c) + A$ ，那么 A 等于 ()

- A. $b - d$ B. $-b + d$ C. bd D. $b + d$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查代数式的计算，熟练掌握代数式的计算法则是解题的关键；

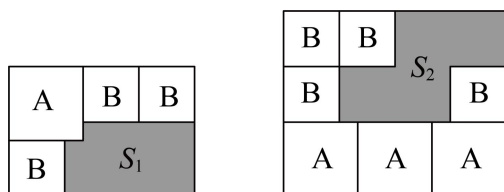
根据代数式的计算法则计算即可求解；

【详解】 解： $a - (b + c - d) = a - c - b + d$ ，

则 $A = -b + d$

故答案为： B

6. 用边长分别为 $a, b (a > b)$ 的两种正方形 A 和 B，拼成如图所示的两个图形，若图中阴影部分面积分别记为 S_1, S_2 ，下列关于 S_1, S_2 的大小关系表述正确的是（ ）



A. $S_1 > S_2$

B. $S_1 < S_2$

C. $S_1 \geq S_2$

D. $S_1 = S_2$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了整式的混合运算：利用面积的和差分别表示出 S_1 和 S_2 ，然后利用整式的混合运算计算它们的差.

【详解】 解： $S_1 = (a + 2b)(a + b) - a^2 - 3b^2$

$$= a^2 + 3ab + 2b^2 - a^2 - 3b^2$$

$$= 3ab - b^2;$$

$$S_2 = 3a(a + 2b) - 3a^2 - 3b^2$$

$$= 3a^2 + 6ab - 3a^2 - 3b^2$$

$$= 6ab - b^2$$

$$\therefore S_2 - S_1 = 6ab - b^2 - (3ab - b^2) = 3ab > 0$$

$$\therefore S_1 < S_2$$

故选： B.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 3 分，满分 36 分）

【请将结果直接填入答题纸的相应位置】

7. 计算 $(-a)^8$ 的结果是_____.

【答案】 a^8

【解析】

【分析】 本题考查积的乘方，熟练掌握积的乘方的运算法则是解题的关键.

根据积的乘方的计算法则计算即可求解；

【详解】 解： $(-a)^8 = a^8$ ，

故答案为： a^8

8. 已知单项式 $-\frac{3bx^3y^2}{8}$ 的次数是_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了单项式次数的概念，熟练掌握单项式次数的定义是解题的关键；

根据单项式次数的定义即可求解

【详解】 解： 单项式 $-\frac{3bx^3y^2}{8}$ 的次数为 $1+3+2=6$ ；

故答案为： 6

9. 将多项式 $2-3xy^2+5x^3y-\frac{1}{3}x^2y^3$ 按字母 y 降幂排列是_____.

【答案】 $-\frac{1}{3}x^2y^3-3xy^2+5x^3y+2$

【解析】

【分析】 根据多项式的项的概念和降幂排列的概念，将多项式的各项按 y 的指数由大到小排列可得.

【详解】 解： 将多项式 $2-3xy^2+5x^3y-\frac{1}{3}x^2y^3$ 按字母 y 的降幂排列是 $-\frac{1}{3}x^2y^3-3xy^2+5x^3y+2$.

故答案为： $-\frac{1}{3}x^2y^3-3xy^2+5x^3y+2$.

【点睛】 本题考查了多项式的项的概念和降幂排列的概念. (1) 多项式中的每个单项式叫做多项式的项；(2) 一个多项式的各项按照某个字母指数从大到小或者从小到大的顺序排列，叫做降幂或升幂排列. 解题时要注意灵活运用.

10. 计算 $2a^3b^2c \div \left(\frac{1}{3}a^2b\right)$ 的结果是_____.

【答案】 $6abc$

【解析】

【分析】 本题考查了单项式除以单项式，解题的关键是掌握运算法则，正确的进行计算.

由单项式除以单项式进行计算，即可求出答案.

【详解】 解： $2a^3b^2c \div \left(\frac{1}{3}a^2b\right) = 6abc$,

故答案为： $6abc$

11. 计算 $(4 \times 10^2)^3 \div (-2 \times 10^3)$ 的结果是_____.

【答案】 -32000

【解析】

【分析】 本题考查积的乘方，有理数的除法，熟练掌握相关计算法则是解题的关键；

根据相关计算法则计算即可求解；

【详解】 解： $(4 \times 10^2)^3 \div (-2 \times 10^3) = (4^3 \times 10^6) \div (-2 \times 10^3) = -32000$,

故答案为： -32000

12. 若多项式 $(x-1)(x+3) = x^2 + ax + b$ ，则 $a+b =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题主要考查了多项式乘以多项式，代数式求值，先按照多项式乘以多项式得出 a, b 的值，然后再代入计算即可.

【详解】 解： $\because (x-1)(x+3) = x^2 + 3x - x - 3 = x^2 + 2x - 3$,

$$(x-1)(x+2) = x^2 + ax + b,$$

$$\therefore a = 2, \quad b = -3,$$

$$\therefore a + b = 2 - 3 = -1,$$

故答案为： -1 .

13. 若关于 x 的多项式 $-4x^3 - 2mx^2 + 2x^2 - 6$ 合并同类项后是一个三次二项式，则 $m =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 此题考查了合并同类项和多项式的相关定义，先将原式进行合并同类项，根据多项式是三次二项

式可知二次项的系数为 0，据此求解即可.

【详解】解： $-4x^3 - 2mx^2 + 2x^2 - 6 = -4x^3 + (2 - 2m)x^2 - 6$ ，

$\therefore -4x^3 - 2mx^2 + 2x^2 - 6$ 合并同类项后是一个三次二项式，

$\therefore 2 - 2m = 0$ ，解得 $m = 1$ ，

故答案为：1.

14. 若整式 $-2x^2 + 3$ 与另一个整式的和为 $4x^2 + 5x - 1$ ，则这个整式为_____.

【答案】 $6x^2 + 5x - 4$

【解析】

【分析】用 $4x^2 + 5x - 1$ 减去 $-2x^2 + 3$ ，根据整式的加减进行计算即可求解.

【详解】解：依题意 $(4x^2 + 5x - 1) - (-2x^2 + 3) = 4x^2 + 5x - 1 + 2x^2 - 3 = 6x^2 + 5x - 4$ ，

故答案为： $6x^2 + 5x - 4$.

【点睛】本题考查了整式的加减，熟练掌握整式的加减的运算法则是解题的关键.

15. 如果 A 、 B 都是关于 x 的单项式，且 $A \cdot B$ 是一个九次单项式， $A + B$ 是一个五次整式，那么 $A - B$ 是一个_____次整式.

【答案】 五

【解析】

【分析】本题考查了整式的加减计算，单项式乘以单项式，解题的关键是掌握单项式乘单项式，整式的加减运算.

利用单项式乘单项式，整式的加减运算法则来判断即可.

【详解】解： $\because A$ 、 B 都是关于 x 的单项式，且 $A \cdot B$ 是一个九次单项式， $A + B$ 是一个五次多项式，

$\therefore$ 单项式 A 、 B 一个是五次单项式，一个是四次单项式，

$\therefore A - B$ 的次数是五次.

故答案为：五.

16. 已知 $A = 2x$ ， B 是一个多项式，在计算 $B + A$ 时，小马同学把 $B + A$ 看成了 $B \div A$ ，结果得 $x + \frac{1}{2}$ ，则 $B + A =$ _____.

【答案】 $2x^2 + 3x$

【解析】

【分析】 本题考查的是单项式乘以多项式的运算，多项式除以单项式的含义，整式的加减运算，由除法的

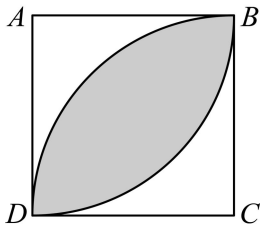
意义列式 $B = A \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$ ，求解 B 后，再进一步计算即可.

【详解】 解：根据题意得 $B = A \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) = 2x \left(x + \frac{1}{2}\right) = 2x^2 + x$ ，

$$\therefore B + A = 2x^2 + x + 2x = 2x^2 + 3x.$$

故答案为： $2x^2 + 3x$

17. 在正方形 $ABCD$ 中，分别以 A 点和 C 点为圆心，以正方形边长为半径在正方形内部画两条弧，两条弧围成了图中的阴影部分，设正方形边长为 2，则图中阴影部分的面积是_____（结果保留 π ）.



【答案】 $2\pi - 4$

【解析】

【分析】 本题考查了代数式求值，根据阴影部分的面积等于 $\frac{1}{4}$ 圆的面积减去三角形面积的差的 2 倍即可，掌握代数式求值是解题的关键.

【详解】 解：由题意得：阴影部分的面积 $2 \times \left(\frac{1}{4} \pi \times 2^2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \right) = 2 \times (\pi - 2) = 2\pi - 4$ ，

故答案为： $2\pi - 4$.

18. 如果 $10^b = n$ ，那么称 b 为 n 的“拉格数”，记为 $d(n)$ 由定义可知： $d(n) = b$. 如 $10^2 = 100$ ，则

$d(100) = d(10^2) = 2$ ，给出下列关于“拉格数” $d(n)$ 的结论：

$$\textcircled{1} d(10) = 10, \textcircled{2} d(10^{-2}) = -2, \textcircled{3} \frac{d(10^3)}{d(10)} = 3, \textcircled{4} d(mn) = d(m) + d(n), \textcircled{5} d\left(\frac{m}{n}\right) = d(m) \div d(n)$$

其中正确的结论有_____.

【答案】 $\textcircled{2}\textcircled{3}\textcircled{4}$

【解析】

【分析】 本题考查同底数幂的乘除法的实际应用，掌握同底数幂的乘除法法则是解题的关键. 结合定义，

利用同底数幂的乘除法的逆运算进行计算即可.

【详解】解：由题意， $\because 10^1 = 10$

$d(10) = 1$ ，故①错误；

$$\because 10^{-2} = 10^{-2}$$

$\therefore d(10^{-2}) = -2$ ，故②正确；

$$\because d(10^3) = 3, \quad d(10) = 1,$$

$$\therefore \frac{d(10^3)}{d(10)} = 3, \quad \text{故③正确；}$$

$$\text{设 } 10^a = m, \quad 10^b = n$$

$$\therefore 10^{a+b} = 10^a \cdot 10^b = mn$$

$$\therefore d(mn) = a + b,$$

$$\therefore d(m) = a, \quad d(n) = b$$

$$\therefore d(m) + d(n) = a + b$$

$$\therefore d(mn) = d(m) + d(n), \quad \text{故④正确；}$$

$$\therefore d(m) \div d(n) = \frac{a}{b},$$

$$\because 10^{a-b} = 10^a \div 10^b = \frac{m}{n}$$

$$\therefore d\left(\frac{m}{n}\right) = a - b$$

$$\therefore d\left(\frac{m}{n}\right) \neq d(m) \div d(n), \quad \text{故⑤错误；}$$

那么正确的有②③④.

故答案为：②③④.

三、简答题（本大题共 7 题，19-22 每题 5 分，23-25 每题 6 分，满分 38 分）

19. 化简： $6x^2y(-2xy+y^3) \div xy^2$.

【答案】 $-12x^2+6xy^2$

【解析】

【分析】 原式利用单项式乘以多项式、多项式除以单项式法则计算即可.

【详解】 解: $6x^2y(-2xy+y^3) \div xy^2$,
 $= (-12x^3y^2+6x^2y^4) \div xy^2$
 $= -12x^2+6xy^2$.

【点睛】 此题主要考查了整式的混合运算, 正确掌握相关计算法则是解题关键.

20. 计算: $(a-2b)^2 - (3a+2b)(3a-2b)$.

【答案】 $-8a^2 - 4ab + 8b^2$

【解析】

【分析】 本题考查了整式的乘法运算, 掌握平方差公式和完全平方公式是解题的关键.

先用平方差公式计算, 再利用完全平方公式计算即可解决问题.

【详解】 解: $(a-2b)^2 - (3a+2b)(3a-2b)$
 $= a^2 - 4ab + 4b^2 - (9a^2 - 4b^2)$
 $= a^2 - 4ab + 4b^2 - 9a^2 + 4b^2$
 $= -8a^2 - 4ab + 8b^2$

21. 计算: $\left[3(x+y)^3\right]^2 - \left[2(x+y)^2\right]^3$ (结果用幂的形式表示).

【答案】 $(x+y)^6$

【解析】

【分析】 此题主要考查幂的运算, 解题的关键是熟知积的乘方与幂的乘方公式;

根据积的乘方与幂的乘方公式即可求解;

【详解】 解: $\left[3(x+y)^3\right]^2 - \left[2(x+y)^2\right]^3$
 $= 9(x+y)^6 - 8(x+y)^6$
 $= (x+y)^6$

22. 用简便方法计算: $2023 \times 2025 - 2024^2$

【答案】 -1

【解析】

【分析】本题主要考查了根据平方差公式进行计算，熟练掌握平方差公式，根据平方差公式求出 2023×2025 ，再相加即可。

【详解】解： $2023 \times 2025 - 2024^2$
 $= (2024 - 1) \times (2024 + 1) - 2024^2$
 $= 2024^2 - 1 - 2024^2$
 $= -1$ 。

23. $(a - 2b + 3c)^2$ 。

【答案】 $a^2 - 4ab + 4b^2 + 6ac - 12bc + 9c^2$

【解析】

【分析】此题考查了完全平方公式，根据完全平方公式求解即可。

【详解】解： $(a - 2b + 3c)^2$
 $= (a - 2b)^2 + 6c(a - 2b) + 9c^2$
 $= a^2 - 4ab + 4b^2 + 6ac - 12bc + 9c^2$ 。

24. 求代数式的值： $2(m + n)^2 - 3(m + n) - 4(m + n)^2 - 5(m + n)$ ，其中 $m = -3$ ， $n = 1$ 。

【答案】 $-2(m + n)^2 - 8(m + n)$ ，8

【解析】

【分析】本题考查了整式的化简求值，先对整式进行化简，再求出 $m + n$ 的值，最后代入到化简后的结果中计算即可求解，掌握整体代入法是解题的关键。

【详解】解：原式 $= 2(m + n)^2 - 4(m + n)^2 - 5(m + n) - 3(m + n)$
 $= -2(m + n)^2 - 8(m + n)$ ，
 $\because m = -3$ ， $n = 1$ ，
 $\therefore m + n = -3 + 1 = -2$ ，
原式 $= -2 \times (-2)^2 - 8 \times (-2)$
 $= -8 - (-16)$ ，
 $= -8 + 16$ ，

$$= 8.$$

25. 已知 $(a+b)^2 = 9$, $(a-b)^2 = 1$. 求 $(a+1)(b+1)(a-1)(b-1)$ 的值.

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题考查多项式乘以多项式，完全平方公式，平方差公式，熟练掌握相关公式的计算是解题的关键；

将两个完全平方公式展开，整理可得 $ab = 2$, $a^2 + b^2 = 5$ ，整理原式代入即可求解；

【详解】 解： $\because (a+b)^2 = 9$, $(a-b)^2 = 1$,

$$\therefore a^2 + 2ab + b^2 = 9 \text{ ①}, \quad a^2 - 2ab + b^2 = 1 \text{ ②},$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得: } 4ab = 8,$$

$$\text{则 } ab = 2,$$

$$\text{①} + \text{②} \text{ 得: } 2a^2 + 2b^2 = 10,$$

$$\text{则 } a^2 + b^2 = 5,$$

$$\text{那么 } (a+1)(b+1)(a-1)(b-1)$$

$$= (a+1)(a-1)(b+1)(b-1)$$

$$= (a^2 - 1)(b^2 - 1)$$

$$= a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 1$$

$$= (ab)^2 - (a^2 + b^2) + 1$$

$$= 2^2 - 5 + 1$$

$$= 4 - 5 + 1$$

$$= 0$$

四、解答题 (本大题共 1 题, 26 题共 8 分)

26. 【阅读材料】“数形结合”是一种非常重要的数学思想方法. 比如: 在学习“整式的乘法”时, 我们通过构造几何图形, 用“等积法”直观地推导出了完全平方公式: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (如图 1). 利用“数形结合”的思想方法, 可以从代数角度解决图形问题, 也可以用图形关系解决代数问题.

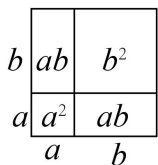


图 1

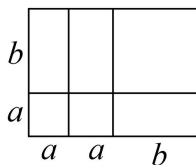


图 2

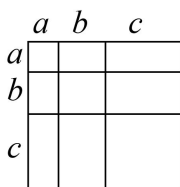


图 3

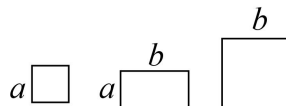


图 4

【方法应用】根据以上材料提供的方法，完成下列问题：

(1) 由图 2 可得等式：_____；由图 3 可得等式：_____；

(2) 利用图 3 得到的结论，解决问题：若 $a+b+c=15$ ， $ab+ac+bc=35$ ，则 $a^2+b^2+c^2=_____$ ；

(3) 如图 4，若用其中 x 张边长为 a 的正方形， y 张边长为 b 的正方形， z 张边长分别为 a 、 b 的长方形纸片拼出一个面积为 $(2a+b)(a+2b)$ 长方形（无空隙、无重叠地拼接），则 $x+y+z=_____$ ；

(4) 如图 4，若有 3 张边长为 a 的正方形纸片，4 张边长分别为 ab 的长方形纸片，5 张边长为 b 的正方形纸片。从中取出若干张纸片，每种纸片至少取一张。把取出的这些纸片拼成一个正方形（无空隙、无重叠地拼接），则拼成的正方形的边长最长可以为_____。

【方法拓展】

(5) 已知正数 a ， b ， c 和 m ， n ， l ，满足 $a+m=b+n=c+l=k$ 。试通过构造边长为 k 的正方形，利用图形面积来说明 $al+bm+cn < k^2$ 。

【答案】(1) $(2a+b)(a+b)=2a^2+b^2+3ab$ ； $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ ；

(2) 155 (3) 9

(4) $a+2b$ ； (5) 见解析

【解析】

【分析】(1) 大长方形的面积=长×宽，也等于 3 个小正方形和 3 个小长方形面积的和，两种方法求得的大长方形的面积相等，即“等积法”得到等式。

(2) 用 (1) 的结论变形后代入求值。

(3) 观察 $(2a+b)(a+2b)$ 长方形找到 x 、 y 、 z 对应的值，代入求值。

(4) 通过分析，找到可以拼成正方形的可能的情况，然后找到正方形的边长最大，

(5) 通过构造边长为 k 的正方形，用 3 个长方形的面积表示 $al+bm+cn$ ，用面积直观地说明 $al+bm+cn < k^2$ 。

【小问 1 详解】

解：由图 2 知，大长方形的面积= $(2a+b)(a+b)$ ，

大长方形的面积=3 个小正方形的面积+3 个小长方形的面积= $a^2+a^2+b^2+3ab=2a^2+b^2+3ab$ ，

$$\therefore (2a+b)(a+b) = 2a^2 + b^2 + 3ab;$$

由图 3 知, 大正方形的面积 = $(a+b+c)^2$,

大正方形的面积 = 3 个正方形的面积 + 2 个小长方形的面积 + 2 个小长方形的面积 + 2 个小长方形的面积

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

$$\therefore (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc;$$

故答案为: $(2a+b)(a+b) = 2a^2 + b^2 + 3ab; = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc;$

【小问 2 详解】

由图 3 得 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - (2ab + 2ac + 2bc) = (a+b+c)^2 - 2(ab + ac + bc),$$

当 $a+b+c=15$, $ab+ac+bc=35$ 时,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 15^2 - 2 \times 35 = 155;$$

故答案为: 155

【小问 3 详解】

解: $\because (2a+b)(a+2b) = 2a^2 + 4ab + ab + 2b^2 = 2a^2 + 5ab + 2b^2, 2,$

$\therefore$ 长方形 $(2a+b)(a+2b)$ 可以看成 2 张边长为 a 的正方形, 2 张边长为 b 的正方形, 5 张边长分别为 a 、 b 的长方形纸片拼成的大长方形,

$$\therefore x=2, y=2, z=5,$$

$$\therefore x+y+z=9;$$

故答案为: 9

【小问 4 详解】

解: 3 张边长为 a 的正方形纸片的面积为 $3a^2$, 4 张边长分别为 ab 的长方形纸片的面积为 $4ab$, 5 张边长为 b 的正方形纸片的面积为 $5b^2$,

$\therefore$ 想从中取出若干张纸片拼成一个正方形 (无空隙、无重叠地拼接),

$\therefore$ 选取的纸片的面积和必须构成完全平方式,

$\therefore$ 可以选取 1 张边长为 a 的正方形纸片、2 张边长分别为 ab 的长方形纸片、1 张边长为 b 的正方形纸片,

此时围成的正方形面积为 $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$,

$\therefore$ 此时正方形的边长 = $a+b$;

选取 1 张边长为 a 的正方形纸片、4 张边长分别为 ab 的长方形纸片、4 张边长为 b 的正方形纸片,

此时围成的正方形面积为 $a^2 + 4ab + 4b^2 = (a+2b)^2$,

$\therefore$ 此时正方形的边长 = $a+2b$,

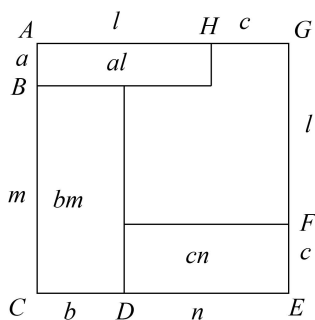
$$\therefore a+b < a+2b,$$

$\therefore$ 拼成的正方形的边长最长为 $a+2b$;

故答案为: $a+2b$;

【小问 5 详解】

解: 如图,



如图, 构造了一个边长为 k 的正方形, $AC=CE=EG=AG=k$,

在正方形的 4 个边上分别截取 $AB=a$, $CD=b$, $EF=HG=c$,

$$\therefore a+m=b+n=c+l=k,$$

$$\therefore BC=m, DE=n, FG=l, AH=l,$$

$\therefore$ 3 个长方形的面积和为 $al+bm+cn$, 大正方形的面积为 k^2 ,

$$\therefore al+bm+cn < k^2.$$

【点睛】本题用“等积法”解决多项式乘积的代数问题, 渗透数形结合的思想, 用代数角度解决图形问题, 也可以用图形关系解决代数问题.

华理附中 2024 学年第一学期七年级数学学科期中考试附加卷

(满分 20 分)

27. 我国古代数学的许多创新和发展都位居世界前列, 如南宋数学家杨辉 (约 13 世纪) 所著的《详解九章算术》一书中, 用如图的三角形解释二项和 $(a+b)^n$ 的展开式的各项系数, 此三角形称为“杨辉三角”.

$$\begin{array}{ccccccc}
(a+b)^0 & \cdots & & & & & \textcircled{1} \\
(a+b)^1 & \cdots & & & & & \textcircled{1} \quad \textcircled{1} \\
(a+b)^2 & \cdots & & & & & \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{1} \\
(a+b)^3 & \cdots & & & & & \textcircled{1} \quad \textcircled{3} \quad \textcircled{3} \quad \textcircled{1} \\
(a+b)^4 & \cdots & & & & & \textcircled{1} \quad \textcircled{4} \quad \textcircled{6} \quad \textcircled{4} \quad \textcircled{1} \\
(a+b)^5 & \cdots & & & & & \textcircled{1} \quad \textcircled{5} \quad \textcircled{10} \quad \textcircled{10} \quad \textcircled{5} \quad \textcircled{1} \\
& \cdots & & & & &
\end{array}$$

根据“杨辉三角”请计算 $(a+b)^{20}$ 的展开式中第三项的系数为_____.

【答案】 190

【解析】

【分析】 根据图形中的规律即可求出 $(a+b)^{20}$ 的展开式中第三项的系数.

【详解】 找规律发现 $(a+b)^3$ 的第三项系数为 $3=1+2$;

$(a+b)^4$ 的第三项系数为 $6=1+2+3$;

$(a+b)^5$ 的第三项系数为 $10=1+2+3+4$;

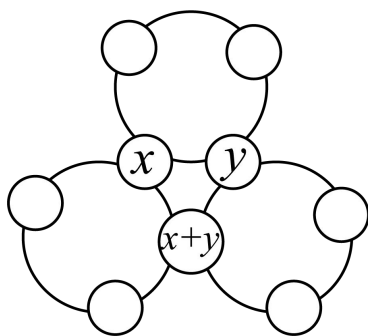
不难发现 $(a+b)^n$ 的第三项系数为 $1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)$;

$\therefore (a+b)^{20}$ 第三项系数为 $1+2+3+\cdots+19=190$,

故答案为: 190.

【点睛】 此题考查了通过观察、分析、归纳发现其中的规律,并应用发现的规律解决问题的能力.

28. “幻方”最早记载于春秋时期的《大戴礼记》中,现将不重复的数字1~9填入如图所示的“幻方”中,使得每个圆圈上的四个数字的和都等于 21,若每个圆圈上的四个数字的平方和分别记 A、B、C,且 $A+B+C=411$. 如果将交点处的三个圆圈填入的数字分别记作为 x 、 y 、 $x+y$, 则 $x+y=$ _____; $xy=$ _____.



【答案】 ①. 9 ②. 18

【解析】

【分析】根据 x 、 y 、 $x+y$ 的位置可知这三个数每个都加了两次，三个圆圈上的数字之和是 63，但是 1~9 这 9 个数字之和是 45，所以可得 $x+y+(x+y)=18$ ，从而求出 $x+y$ 的值；因为

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 = 285, \quad A+B+C=411, \quad \text{可以得到 } x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 126,$$

配方得 $(x+y)^2 - 2xy + (x+y)^2 = 126$ ，把 $x+y=9$ 代入即可求出 xy 的值。

【详解】解：∵每个圆圈上的四个数字的和都等于 21，

∴三个圆上的数字之和应为 $3 \times 21 = 63$ ，

其中的 x 、 y 、 $x+y$ 这三个数每个都加了两次，

$$\therefore 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45,$$

$$\therefore 45 + x + y + (x+y) = 63,$$

$$\text{则有 } 2(x+y) = 63 - 45,$$

解得： $x+y=9$ ；

∵每个圆圈上的四个数字的平方和分别记 A 、 B 、 C ，且 $A+B+C=411$ ，

$$\therefore 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 411,$$

$$\therefore 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 = 285,$$

$$\therefore x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 411 - 285,$$

$$\therefore x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 126,$$

$$\text{整理得： } x^2 + y^2 + 2xy - 2xy + (x+y)^2 = 126,$$

$$\therefore (x+y)^2 - 2xy + (x+y)^2 = 126,$$

$$\therefore x+y=9;$$

$$\therefore 9^2 - 2xy + 9^2 = 126,$$

$$\therefore 81 - 2xy + 81 = 126,$$

$$\therefore 2xy = 36,$$

解得: $xy = 18$.

故答案为: 9; 18.

【点睛】本题考查了整式的运算、完全平方公式以及有理数的乘方运算. 解决本题的关键是理解 x 、 y 、 $x+y$ 这三个数每个都加了两次, 并且能把 $x^2 + y^2$ 凑成完全平方式.

29. 用几个小的长方形、正方形拼成一个大的正方形, 然后利用两种不同的方法计算这个大的正方形的面积, 可以得到一个等式, 利用这些等式也可以求一些不规则图形的面积.

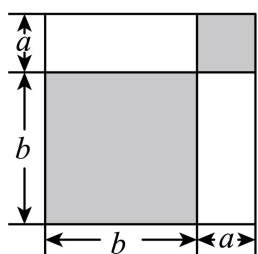


图1

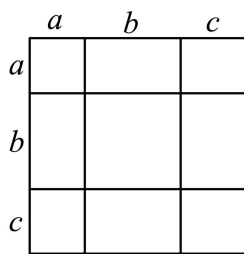


图2

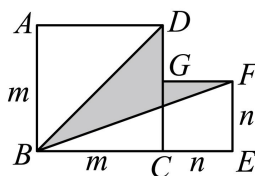


图3

(1) 如图 1 所示的大正方形, 是由两个正方形和两个形状大小完全相同的长方形拼成的. 用两种不同的方法计算图中阴影部分的面积, 可以得到的数学等式是_____;

(2) 如图 2, 由几个面积不等的小正方形和几个小长方形拼成一个边长为 $(a+b+c)$ 的大正方形, 试用不同形式表示这个大正方形的面积, 从中你能发现什么结论? 该结论用等式表示为_____;

(3) 利用 (2) 中的结论解决以下问题: 已知 $a+b+c=5$, $ab+bc+ac=2$, 求 $a^2+b^2+c^2$ 的值;

(4) 如图 3, 由两个边长分别为 m, n 的正方形拼在一起, 点 B, C, E 在同一直线上, 连接 BD, BF , 若 $m+n=12$, $mn=24$, 请利用 (1) 中的结论, 求图 3 中阴影部分的面积.

【答案】(1) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

(2) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a+b+c)^2$

(3) 21 (4) 36

【解析】

【分析】(1) 根据大正方形的边长为 $(a+b)$, 而大正方形由两个边长为 a, b 的正方形和两个长为 b , 宽为

a 的长方形组成即可得出答案;

(2) 分别表示出大正方形中每一个小正方形的面积及长方形的面积, 然后根据这些小正方形的面积及长方形的面积等于大正方形的面积即可得出答案;

(3) 由 (2) 得结论可得 $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - (2ab + 2bc + 2ac)$, 然后将 $a + b + c = 5$, $ab + bc + ac = 2$ 代入进行计算即可得出结论;

(4) 分别求出 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}m^2$, $S_{\text{正方形CEFG}} = n^2$, $S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2}(m+n)n$, 再根据又 $S_{\text{阴影}} = S_{\triangle BCD} + S_{\text{正方形CEFG}} - S_{\triangle BEF}$ 得 $S_{\text{阴影}} = \frac{1}{2}(m^2 + n^2 - mn)$, 然后由 (1) 可知: $m^2 + n^2 = (m+n)^2 - 2mn$, 从而得 $m^2 + n^2 - mn = (m+n)^2 - 3mn$, 再将 $m+n=12$, $mn=24$ 进行计算即可得出答案.

【小问 1 详解】

依题意得: $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$;

故答案为: $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$.

【小问 2 详解】

依题意得: $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a+b+c)^2$;

故答案为: $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a+b+c)^2$.

【小问 3 详解】

由 (2) 可知: $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a+b+c)^2$,

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - (2ab + 2bc + 2ac)$,

即: $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab + bc + ac)$,

又 $\because a+b+c=5$, $ab+bc+ac=2$,

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 5^2 - 2 \times 2 = 21$;

【小问 4 详解】

$$\begin{aligned} S_{\text{阴影}} &= S_{\triangle BCD} + S_{\text{正方形CEFG}} - S_{\triangle BEF} \\ &= \frac{1}{2}m^2 + n^2 - \frac{1}{2}(m+n)n = \frac{1}{2}m^2 + n^2 - \frac{1}{2}mn - \frac{1}{2}n^2 \\ &= \frac{1}{2}(m^2 + n^2 - mn) = \frac{1}{2}[(m+n)^2 - 3mn]. \end{aligned}$$

当 $m+n=12$, $mn=24$ 时,

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \left[(m+n)^2 - 3mn \right] = \frac{1}{2} \times (12^2 - 3 \times 24) = \frac{1}{2} \times 72 = 36.$$

【点睛】 此题主要考查了集合背景下的完全平方公式及其应用，理解题意，准确识图，熟练掌握完全平方公式的结构特征是解答此题的关键.