

上海市延安初级中学 2024 学年第一学期初一年级数学期中试卷

(考试时间: 80 分钟满分: 100 分)

班级_____姓名_____学号_____成绩_____

一、填空题 (第 2, 3, 16 题, 每空 1 分, 其余每题 2 分, 共 34 分)

1. 用代数式表示: “ x 的 $1\frac{2}{3}$ 倍减去 y 的差” 是_____.

【答案】 $\frac{5x}{3} - y$

【解析】

【分析】 此题考查了列代数式, 以及代数式的书写规范; 根据题意先求倍数后求差, 列出代数式, 将带分数写成假分数的形式即可求解.

【详解】 解: 根据: x 的 $1\frac{2}{3}$ 倍减去 y 的差

$$\therefore 1\frac{2}{3} \times x - y = \frac{5x}{3} - y$$

故答案为: $\frac{5x}{3} - y$.

2. 单项式 $-\frac{x^2y}{5}$ 的系数是_____, 次数是_____.

【答案】 ①. $-\frac{1}{5}$ ②. 3

【解析】

【分析】 根据单项式系数、次数的定义来求解. 单项式中数字因数叫做单项式的系数, 所有字母的指数和叫做这个单项式的次数.

【详解】 根据单项式系数、次数的定义可知:

单项式 $-\frac{x^2y}{5}$ 的系数是 $-\frac{1}{5}$; 次数是 $2+1=3$.

故答案为: $-\frac{1}{5}$; 3.

【点睛】 此题考查单项式的系数和次数, 把一个单项式分解成数字因数和字母因式的积, 是找准单项式的系数和次数的关键.

3. 在整式 $4xy^2 - 7x^3y - \frac{2}{3}x + 6y^2$ 中, 次数最高项是_____；一次项系数是_____.

【答案】 ①. $-7x^3y$; ②. $-\frac{2}{3}$.

【解析】

【分析】 本题考查了多项式中项的系数和多项式的次数. 组成多项式的每一个单项式叫做多项式的项, 这一项中的数字部分就是这一项的系数; 多项式中次数最高的项的次数叫做这个多项式的次数.

【详解】 解: 在整式 $4xy^2 - 7x^3y - \frac{2}{3}x + 6y^2$ 中,

$4xy^2$ 的次数为 $1+2=3$,

$-7x^3y$ 的次数为 $3+1=4$,

$-\frac{2}{3}x$ 的次数为 1,

$6y^2$ 的次数为 2,

这四项中次数最高为 4 次,

$\therefore$ 次数最高的项是 $-7x^3y$;

一次项是 $-\frac{2}{3}x$, 一次项的系数为 $-\frac{2}{3}$.

故答案为: $-7x^3y$; $-\frac{2}{3}$.

4. 将整式 $-11x + 6x^3y - y^3 + 8x^2y^2$ 按 y 降幂排列是_____.

【答案】 $-y^3 + 8x^2y^2 + 6x^3y - 11x$

【解析】

【分析】 本题主要考查了多项式的排列问题, 按照 y 的次数从高到低重新排列多项式即可得到答案.

【详解】 解: 将整式 $-11x + 6x^3y - y^3 + 8x^2y^2$ 按 y 降幂排列是 $-y^3 + 8x^2y^2 + 6x^3y - 11x$,

故答案为: $-y^3 + 8x^2y^2 + 6x^3y - 11x$.

5. 若 $7ab^{3m-4}$ 与 $-\frac{9a^n b^5}{2}$ 的和是一个单项式, 则 $m-n =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了合并同类项的知识, 解答本题的关键是掌握同类项中所含字母相同, 相同字母的指数

也相同. 首先可判断单项式 $7ab^{3m-4}$ 与 $-\frac{9a^n b^5}{2}$ 是同类项, 再由同类项的定义即可.

【详解】解: 若 $7ab^{3m-4}$ 与 $-\frac{9a^n b^5}{2}$ 的和为单项式,

则 $7ab^{3m-4}$ 与 $-\frac{9a^n b^5}{2}$ 为同类项,

$$\therefore 3m-4=5, n=1,$$

$$\therefore m=3, n=1,$$

$$\therefore m-n=2,$$

故答案为: 2.

6. 在横线上填入正确的整式让等式成立: $x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 - (\text{ }) = 3x^2 + 2y^2$.

【答案】 $-2x^2 + xy - \frac{5}{2}y^2$

【解析】

【分析】 本题考查了整式的加减运算. 根据整式加减法则列出算式, 计算即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: 根据题意: } & x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 - (3x^2 + 2y^2) \\ &= x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 - 3x^2 - 2y^2 \\ &= -2x^2 + xy - \frac{5}{2}y^2, \end{aligned}$$

则横线上应该填入: $-2x^2 + xy - \frac{5}{2}y^2$,

故答案为: $-2x^2 + xy - \frac{5}{2}y^2$.

7. 计算: $\frac{1}{3}x \left(\frac{4}{3}x^2 - 2xy + y^2 \right) \cdot 9xy = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $4x^4y - 6x^3y^2 + 3x^3y^3$

【解析】

【分析】 本题考查了整式的乘法混合运算. 根据单项式乘以多项式运算法则计算即可.

$$\text{【详解】解: } \frac{1}{3}x \left(\frac{4}{3}x^2 - 2xy + y^2 \right) \cdot 9xy$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{3}x \cdot \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x \cdot 2xy + \frac{1}{3}x \cdot y^2 \right) \cdot 9xy \\
 &= \left(\frac{4}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2y + \frac{1}{3}xy^2 \right) \cdot 9xy \\
 &= \frac{4}{9}x^3 \cdot 9xy - \frac{2}{3}x^2y \cdot 9xy + \frac{1}{3}xy^2 \cdot 9xy \\
 &= 4x^4y - 6x^3y^2 + 3x^3y^3
 \end{aligned}$$

故答案为: $4x^4y - 6x^3y^2 + 3x^3y^3$.

8. 计算: $98 \times 102 + 4 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 10000

【解析】

【分析】 本题考查平方差公式. 掌握两个数的和与这两个数的差的积等于这两个数的平方的差, 用字母表示为 $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ 是解题关键. 将 $98 \times 102 + 4$ 改成 $(100-2) \times (100+2) + 4$, 再根据平方差公式计算即可.

$$\begin{aligned}
 \text{【详解】解: } &98 \times 102 + 4 \\
 &= (100-2) \times (100+2) + 4 \\
 &= (100^2 - 2^2) + 4 \\
 &= 10000 - 4 + 4 \\
 &= 10000.
 \end{aligned}$$

故答案为: 10000.

9. 计算: $(x-2y-z)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x^2 + 4y^2 + 4yz + z^2 - 4xy - 2xz$

【解析】

【分析】 本题考查的是乘法公式的应用; 本题利用完全平方公式进行计算即可, 熟记乘法公式是解本题的关键.

$$\begin{aligned}
 \text{【详解】解: } &(x-2y-z)^2 \\
 &= [x-(2y+z)]^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x^2 + (2y + z)^2 - 2x(2y + z) \\
 &= x^2 + (4y^2 + 4yz + z^2) - 4xy - 2xz \\
 &= x^2 + 4y^2 + 4yz + z^2 - 4xy - 2xz ;
 \end{aligned}$$

故答案为: $x^2 + 4y^2 + 4yz + z^2 - 4xy - 2xz$.

10. 因式分解: $ax^2y + axy^2 - axy = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $axy(x + y - 1)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了因式分解, 直接提取公因式 axy 分解因式即可.

【详解】 解: $ax^2y + axy^2 - axy$

$$= axy(x + y - 1),$$

故答案为: $axy(x + y - 1)$.

11. 因式分解: $a^2(a - b) + b^2(b - a) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(a - b)^2(a + b)$

【解析】

【分析】 本题主要考查因式分解, 熟练掌握因式分解的方法是解题的关键. 先提取公因式, 然后再根据平方差公式进行因式分解即可.

【详解】 解: $a^2(a - b) + b^2(b - a)$

$$\begin{aligned}
 &= a^2(a - b) - b^2(a - b) \\
 &= (a - b)(a^2 - b^2) \\
 &= (a - b)(a + b)(a - b) \\
 &= (a - b)^2(a + b).
 \end{aligned}$$

故答案为: $(a - b)^2(a + b)$.

12. 已知关于 x 的整式 $9x^2 + (k - 1)x + 4$ 是某个关于 x 的整式的平方, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -11 或 13

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式. 熟练掌握完全平方公式是解题的关键.

由题意知, $9x^2 + (k-1)x + 4 = (3x \pm 2)^2$, 则 $k-1 = \pm 12$, 计算求解即可.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的整式 $9x^2 + (k-1)x + 4$ 是某个关于 x 的整式的平方,

$$\therefore 9x^2 + (k-1)x + 4 = (3x \pm 2)^2,$$

$$\therefore k-1 = \pm 12,$$

解得, $k = 13$ 或 $k = -11$,

故答案为: -11 或 13 .

13. 若 $x^a = 3$, $x^{2a-3b} = \frac{9}{125}$, 则 x^b 的值为_____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查幂的乘方的逆运算, 同底数幂的除法的逆运算, 先利用幂的乘方的逆运算法则和同底数幂的除法的逆运算法则将 $x^{2a-3b} = \frac{9}{125}$ 化简为 $(x^a)^2 \div x^{3b} = \frac{9}{125}$, 代入 $x^a = 3$, 求出 $x^{3b} = 9 \div \frac{9}{125} = 125$, 再利用幂的乘方的逆运算法则得到 $(x^b)^3 = 125$, 即可求解.

【详解】 解: $\because x^{2a-3b} = (x^a)^2 \div x^{3b} = \frac{9}{125}$, $x^a = 3$,

$$\therefore (x^a)^2 = 9$$

$$\therefore x^{3b} = 9 \div \frac{9}{125} = 125,$$

$$\therefore (x^b)^3 = 125 = 5^3,$$

$$\therefore x^b = 5.$$

故答案为: 5.

14. 将关于 x 的一次二项式 $ax + b$ 与二次三项式 $x^2 + 2x + 3$ 相乘, 积中不出现一次项, 且二次项系数为1, 则 $a + b =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查了多项式乘以多项式. 首先根据多项式乘多项式的法则进行计算可得

$ax^3 + 2ax^2 + 3ax + bx^2 + 2bx + 3b$ ，合并同类项可得 $ax^3 + (2a + b)x^2 + (3a + 2b)x + 3b$ ，根据积中不出

现一次项，且二次项系数为1，可得方程组 $\begin{cases} 2a + b = 1 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases}$ ，两个方程相减可得结果。

【详解】解： $(ax + b)(x^2 + 2x + 3)$

$$= ax^3 + 2ax^2 + 3ax + bx^2 + 2bx + 3b$$

$$= ax^3 + (2a + b)x^2 + (3a + 2b)x + 3b,$$

∵ 积中不出现一次项，且二次项系数为1，

$$\therefore \begin{cases} 2a + b = 1 \text{ ①} \\ 3a + 2b = 0 \text{ ②} \end{cases},$$

$$\text{②} - \text{①} \text{ 得: } a + b = -1.$$

故答案为：-1.

15. 已知： $x^2 - xy - 6y + \frac{5}{4}y^2 + 9 = 0$ ，则 $xy = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{9}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了运用公式法分解因式、解二元一次方程组、求代数式的值. 首先把 $\frac{5}{4}y^2$ 拆成 $\frac{1}{4}y^2$ 和

y^2 两项，可以得到 $\left(x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2\right) + (y^2 - 6y + 9) = 0$ ，然后用完全平方公式分解因式得到

$$\left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + (y - 3)^2 = 0, \text{ 根据平方的非负性可以得到二元一次方程组 } \begin{cases} y - 3 = 0 \\ x - \frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \text{ 解方程组可以求出}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 3 \end{cases}, \text{ 然后代入求值即可.}$$

【详解】解： ∵ $x^2 - xy - 6y + \frac{5}{4}y^2 + 9 = 0$,

$$\therefore x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2 + y^2 - 6y + 9 = 0,$$

$$\therefore \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + (y - 3)^2 = 0,$$

$$\therefore x - \frac{1}{2}y = 0, \quad y - 3 = 0,$$

$$\text{解方程组} \begin{cases} y - 3 = 0 \\ x - \frac{1}{2}y = 0 \end{cases},$$

$$\text{得:} \begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\therefore xy = \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{2}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{9}{2}.$$

16. 利用完全平方公式 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ 和平方差公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 都能对 196^2 进行简便计算, 请你写出相应的计算过程:

$$196^2 = \underline{\hspace{2cm}}; \quad (\text{运用完全平方公式})$$

$$196^2 = \underline{\hspace{2cm}}. \quad (\text{运用平方差公式})$$

【答案】 ①. $(200-4)^2 = 200^2 - 2 \times 200 \times 4 + 4^2 = 40000 - 1600 + 16 = 38416$ ②.

$$(196^2 - 4^2) + 4^2 = (196+4) \times (196-4) + 16 = 200 \times 192 + 16 = 38400 + 16 = 38416$$

【解析】

【分析】 本题考查了整式的乘法公式, 掌握平方差公式和完全平方公式是解题的关键.

(1) 根据完全平方公式即可求解;

(2) 根据平方差公式即可求解.

$$\text{【详解】解: } 196^2 = (200-4)^2 = 200^2 - 2 \times 200 \times 4 + 4^2 = 40000 - 1600 + 16 = 38416;$$

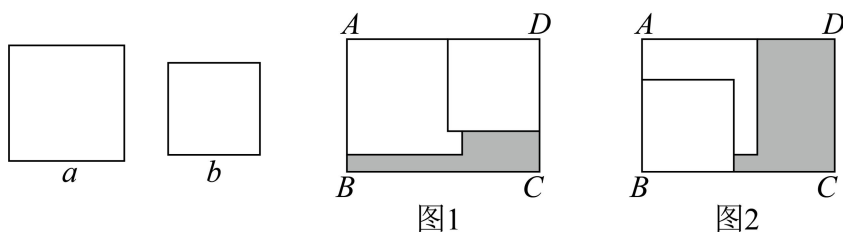
$$196^2 = (196^2 - 4^2) + 4^2 = (196+4) \times (196-4) + 16 = 200 \times 192 + 16 = 38400 + 16 = 38416;$$

$$\text{故答案为: } (200-4)^2 = 200^2 - 2 \times 200 \times 4 + 4^2 = 40000 - 1600 + 16 = 38416;$$

$$(196^2 - 4^2) + 4^2 = (196+4) \times (196-4) + 16 = 200 \times 192 + 16 = 38400 + 16 = 38416.$$

17. 在长方形 $ABCD$ 内, 将两张边长分别为 a 和 b ($a > b$) 的正方形纸片分别按图 1、图 2 两种方式放置 (图 1、图 2 中两张正方形纸片均有重叠部分), 长方形中未被这两张正方形纸片覆盖的部分用阴影表示, 设图 1 中的阴影部分的面积为 S_1 , 图 2 中的阴影部分的面积为 S_2 , 当 $AD - AB = 2$ 时, $S_2 - S_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ (用

字母表示)



【答案】 $2b$

【解析】

【分析】 本题主要考查了整式的混合计算，根据图形面积之间的关系分别表示出 S_2 、 S_1 ，再根据整式的加减计算法则求出 $S_2 - S_1$ 的结果，再结合 $AD - AB = 2$ 即可求出答案.

【详解】 解：由题意得， $S_1 = AB \cdot AD - a^2 - b(AD - a) = AB \cdot AD - a^2 - AD \cdot b + ab$ ，
 $S_2 = AD \cdot AB - a^2 - b(AB - a) = AD \cdot AB - a^2 - AB \cdot b + ab$ ，
 $\therefore S_2 - S_1$
 $= AD \cdot AB - a^2 - AB \cdot b + ab - (AB \cdot AD - a^2 - AD \cdot b + ab)$
 $= AD \cdot AB - a^2 - AB \cdot b + ab - AB \cdot AD + a^2 + AD \cdot b - ab$
 $= -AB \cdot b + AD \cdot b$
 $= b(AD - AB)$ ，
 $\because AD - AB = 2$ ，
 $\therefore S_2 - S_1 = 2b$ ，

故答案为： $2b$.

二、选择题 (每题 2 分，共 8 分)

18. 下列说法正确的是 ()

A. $3x^2y$ 与 $2y^2x$ 是同类项

B. $\frac{1}{2\pi}$ 是单项式

C. $5x^2y - 4xy - 3x^2y + 1$ 是二次四项式

D. $-\frac{x^2 - 2x + 6}{3}$ 的常数项是 -6

【答案】 B

【解析】

【分析】本题主要考查了单项式的定义，多项式的项及其次数的定义，同类项的定义，解题的关键在于能够熟知相关定义：表示数或字母的积的式子叫做单项式，单独的一个数或一个字母也是单项式；几个单项式的和的形式叫做多项式，每个单项式叫做多项式的项，不含字母的项叫做常数项，多项式里，次数最高项的次数叫做多项式的次数；所含字母相同，相同字母的指数也相同的单项式叫做同类项。

【详解】解：A、 $3x^2y$ 与 $2y^2x$ 所含字母相同，但是相同字母的指数不相同，二者不是同类项，原说法错误，不符合题意；

B、 $\frac{1}{2\pi}$ 是单项式，原说法正确，符合题意；

C、 $5x^2y - 4xy - 3x^2y + 1$ 是三次四项式，原说法错误，不符合题意；

D、 $-\frac{x^2 - 2x + 6}{3}$ 的常数项是 $-\frac{6}{3} = -2$ ，原说法错误，不符合题意；

故选：B.

19. 下列运算正确的是 ()

A. $x^6 + x^6 = 2x^{12}$

B. $(-2a^2b)^3 = -8a^8b^3$

C. $\left[-(m-n)^3\right]^2 = \left[-(m-n)^2\right]^3$

D. $(-y^4) \cdot (-y)^6 \div (-y)^7 = y^3$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了幂的混合和运算及合并同类项. 根据幂的运算法则，合并同类项法则逐一计算，即可得出答案.

【详解】解：A、 $x^6 + x^6 = 2x^6$ ，原式计算错误，不符合题意；

B、 $(-2a^2b)^3 = -8a^6b^3$ ，原式计算错误，不符合题意；

C、 $\left[-(m-n)^3\right]^2 = \left[(m-n)^2\right]^3$ ，原式计算错误，不符合题意；

D、 $(-y^4) \cdot (-y)^6 \div (-y)^7 = (-y^{10}) \div (-y^7) = y^{10} \div y^7 = y^3$ ，原式计算正确，符合题意；

故选：D.

20. 下列等式中，哪些从左到右的变形是因式分解 ()

A. $(x+y)(x-2y) = x^2 - xy - 2y^2$

B. $x^2 + 5x - 3 = x\left(x + 5 - \frac{3}{x}\right)$

C. $3x^2 - 5x - 2 = (3x + 1)(x - 2)$

D. $3x^2 + 6x + 4 = 3(x + 1)^2 + 1$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查的是因式分解，熟知把一个多项式化为几个整式的积的形式，这种变形叫做把这个多项式因式分解，理解分解因式概念是解题的关键.

【详解】解：A、 $(x + y)(x - 2y) = x^2 - xy - 2y^2$ 等式右边不是乘积形式，不是因式分解，不符合题意；

B、 $x^2 + 5x - 3 = x\left(x + 5 - \frac{3}{x}\right)$ 等式右边不是几个整式的乘积形式，不是因式分解，不符合题意；

C、 $3x^2 - 5x - 2 = (3x + 1)(x - 2)$ 是因式分解，符合题意；

D、 $3x^2 + 6x + 4 = 3(x + 1)^2 + 1$ 等式右边不是乘积形式，不是因式分解，不符合题意；

故选：C.

21. 已知 $x^2 + mx + n = (x - a)(x + b)$ ，那么下列因式分解错误的是（ ）

A. $x^2 + mxy + ny = (x - ay)(x + by)$

B. $x^2y^2 + mxy + n = (xy - a)(xy + b)$

C. $x^4 + mx^2y + ny^2 = (x^2 - ay)(x^2 + by)$

D. $nx^2 + mx + 1 = (-ax + 1)(bx + 1)$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了整式乘法，分解因式的应用，利用整式乘法运算法则将右边的式子展开，跟左边对比，等号成立则正确，等号不成立则错误，据此解答即可.

【详解】解： $\because (x - a)(x + b) = x^2 + (b - a)x - ab = x^2 + mx + n$,

$\therefore b - a = m, -ab = n$;

A、 $(x - ay)(x + by) = x^2 + (b - a)xy - aby^2 = x^2 + mxy + ny^2 \neq x^2 + mxy + ny$ ，左边不等于右边，故本选项错误，符合题意；

B、 $(xy - a)(xy + b) = x^2y^2 + (b - a)xy - ab = x^2y^2 + mxy + n$ ，左边等于右边，故本选项正确，不符合题意；

C、 $(x^2 - ay)(x^2 + by) = x^4 + (b - a)x^2y - aby^2 = x^4 + mx^2y + ny^2$ ，左边等于右边，故本选项正确，不符合题意；

D、 $(-ax+1)(bx+1)=-abx^2+(b-a)x+1=mx^2+mx+1$ ，左边等于右边，故本选项正确，不符合题意；

故选：A.

三、计算（每题4分，共16分）

22. 计算： $4(x^2y^3)^2 \div xy^2 + \left(-\frac{3}{5}xy^3\right) \cdot \frac{5}{3}x^2y$

【答案】 $3x^3y^4$

【解析】

【分析】 本题主要考查了积的乘方计算，单项式乘以单项式，单项式除以单项式，先计算积的乘方，再计算单项式乘以单项式，单项式除以单项式，最后合并同类项即可得到答案.

【详解】 解： $4(x^2y^3)^2 \div xy^2 + \left(-\frac{3}{5}xy^3\right) \cdot \frac{5}{3}x^2y$

$$= 4x^4y^6 \div xy^2 + (-x^3y^4)$$

$$= 4x^3y^4 + (-x^3y^4)$$

$$= 3x^3y^4.$$

23. 计算： $\left(-\frac{3}{4}xy+y\right)(x-xy) \div (-6xy)$

【答案】 $\frac{1}{8}x - \frac{1}{8}xy + \frac{1}{6}y - \frac{1}{6}$

【解析】

【分析】 本题考查了多项式乘以多项式，多项式除以单项式，先计算多项式乘以多项式，然后利用多项式除以单项式，先把这个多项式的每一项分别除以单项式，再把所得的商相加进行计算即可.

【详解】 解： $\left(-\frac{3}{4}xy+y\right)(x-xy) \div (-6xy)$

$$= \left(-\frac{3}{4}x^2y + \frac{3}{4}x^2y^2 - xy^2 + xy\right) \div (-6xy)$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}xy + \frac{1}{6}y - \frac{1}{6}$$

24. 计算: $\left(3m + \frac{1}{2}n\right)^2 \left(3m - \frac{1}{2}n\right)^2$

【答案】 $81m^4 - \frac{9}{2}m^2n^2 + \frac{1}{16}n^4$

【解析】

【分析】 本题主要考查了积的乘方、平方差公式、完全平方公式. 首先逆用积的乘方可得

$\left[\left(3m + \frac{1}{2}n\right)\left(3m - \frac{1}{2}n\right)\right]^2$, 运用平方差公式计算可得 $\left(9m^2 - \frac{1}{4}n^2\right)^2$, 再利用完全平方公式展开即可.

【详解】 解: $\left(3m + \frac{1}{2}n\right)^2 \left(3m - \frac{1}{2}n\right)^2$

$$= \left[\left(3m + \frac{1}{2}n\right)\left(3m - \frac{1}{2}n\right)\right]^2$$

$$= \left(9m^2 - \frac{1}{4}n^2\right)^2$$

$$= 81m^4 - \frac{9}{2}m^2n^2 + \frac{1}{16}n^4.$$

25. 计算: $(a + 2b - 3)(a - 2b + 3)$

【答案】 $a^2 - 4b^2 + 12b - 9$

【解析】

【分析】 把 $(2b - 3)$ 看作一个整体, 利用平方差公式计算, 然后再利用完全平方公式展开即可;

【详解】 解: $(a + 2b - 3)(a - 2b + 3)$

$$= [a + (2b - 3)][a - (2b - 3)]$$

$$= a^2 - (2b - 3)^2$$

$$= a^2 - 4b^2 + 12b - 9$$

【点睛】 本题考查了平方差公式, 完全平方公式, 熟练掌握公式并灵活运用是解题的关键, 要注意整体思想的利用和运算符号的处理.

四、因式分解 (每题 4 分, 共 16 分)

26. 因式分解: $4a^4b^2 - 36a^2$

【答案】 $4a^2(ab+3)(ab-3)$

【解析】

【分析】 本题考查了提公因式法因式分解，平方差公式，熟练掌握以上知识是解题的关键。先提公因式法，再进行平方差公式即可因式分解。

【详解】 解： $4a^4b^2 - 36a^2$

$$= 4a^2(a^2b^2 - 9)$$
$$= 4a^2[(ab)^2 - 3^2]$$
$$= 4a^2(ab+3)(ab-3).$$

27. 因式分解： $5(x^2 - y^2) - (y - x)^2$

【答案】 $2(2x+3y)(x-y)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分解因式，先利用平方差公式分解因式，再合并同类项后提取公因数 2 分解因式即可。

【详解】 解： $5(x^2 - y^2) - (y - x)^2$

$$= 5(x+y)(x-y) - (x-y)^2$$
$$= [5(x+y) - (x-y)](x-y)$$
$$= (5x+5y-x+y)(x-y)$$
$$= (4x+6y)(x-y)$$
$$= 2(2x+3y)(x-y).$$

28. 因式分解： $(a^2 + 4)^2 - 16a^2$.

【答案】 $(a+2)^2(a-2)^2$

【解析】

【分析】 本题考查了利用乘法公式进行因式分解。熟练掌握利用乘法公式进行因式分解是解题的关键。利用平方差、完全平方公式进行因式分解即可。

【详解】解： $(a^2 + 4)^2 - 16a^2$
 $= (a^2 + 4 + 4a)(a^2 + 4 - 4a)$
 $= (a + 2)^2 (a - 2)^2.$

29. 因式分解： $(2x - y)^2 + 10y(y - 2x) + 25y^2$

【答案】 $4(x - 3y)^2$

【解析】

【分析】此题主要考查因式分解，解题的关键是熟知提取公因式法与公式法的应用．根据完全平方公式和提取公因式法即可因式分解．

【详解】解： $(2x - y)^2 + 10y(y - 2x) + 25y^2$
 $= (2x - y)^2 - 2 \times 5y(2x - y) + (5y)^2$
 $= (2x - y - 5y)^2$
 $= (2x - 6y)^2$
 $= 4(x - 3y)^2.$

五、解答题（第 30 题 4 分，其余每题 5 分，共 19 分）

30. 解不等式： $4(3 + x)(x - 3) < (2x - 1)^2 + 5$

【答案】 $x < \frac{21}{2}$

【解析】

【分析】本题考查了解一元一次不等式．熟练掌握解一元一次不等式，解一元一次不等式组是解题的关键．先利用完全平方公式和平方差公式去括号，然后移项合并，系数化为 1 即可．

【详解】解： $4(3 + x)(x - 3) < (2x - 1)^2 + 5$
 $4(x + 3)(x - 3) < (2x - 1)^2 + 5$
 $4(x^2 - 9) < (4x^2 - 4x + 1) + 5$
 $4x^2 - 36 < 4x^2 - 4x + 1 + 5$
 $4x < 1 + 5 + 36$

$$4x < 42$$

$$x < \frac{21}{2}.$$

31. 已知整式 M , 满足 $\left(-\frac{1}{3}xyz\right)^2 \cdot M = \frac{1}{3}x^{2n+2}y^{n+3}z^4 \div (5x^{2n-1}y^{n+1}z)$ (n 是正整数),

(1) 求整式 M ;

(2) 当正整数 x, z 满足 $2^x \cdot 3^{z-1} = 72$ 时, 求 M 的值.

【答案】(1) $\frac{3}{5}xz$

(2) $\frac{27}{5}$

【解析】

【分析】本题主要考查了积的乘方计算, 单项式除以单项式, 幂的乘方的逆运算:

(1) 先计算等式左边的积的乘方计算, 再计算等式右边的单项式除以单项式, 再把等式两边同时除以左边的单项式即可得到答案;

(2) 先根据幂的乘方的逆运算法则把所给式子变形为 $2^x \cdot 3^{z-1} = 2^3 \times 3^2$, 进而求出 x, z 的值, 再代值计算即可得到答案.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \because \left(-\frac{1}{3}xyz\right)^2 \cdot M = \frac{1}{3}x^{2n+2}y^{n+3}z^4 \div (5x^{2n-1}y^{n+1}z),$$

$$\therefore \frac{1}{9}x^2y^2z^2 \cdot M = \frac{1}{15}x^{2n+2-2n+1}y^{n+3-n-1}z^{4-1},$$

$$\therefore \frac{1}{9}x^2y^2z^2 \cdot M = \frac{1}{15}x^3y^2z^3,$$

$$\therefore M = \frac{1}{15}x^3y^2z^3 \div \frac{1}{9}x^2y^2z^2$$

$$\therefore M = \frac{3}{5}xz;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because 2^x \cdot 3^{z-1} = 72,$$

$$\therefore 2^x \cdot 3^{z-1} = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2,$$

$\therefore x, y$ 都是正整数,

$$\therefore x = 3, z - 1 = 2,$$

$$\therefore z = 3,$$

$$\therefore M = \frac{3}{5}xz = \frac{3}{5} \times 3 \times 3 = \frac{27}{5}.$$

32. 已知 $x=2$, $y=-4$ 时, 代数式 $ax^3 + \frac{1}{2}by + 7$ 的值为 -9 ; 当 $x=-4$, $y=-\frac{1}{2}$ 时, 求代数式 $3ax - 24by^3 - 7$ 的值.

【答案】17

【解析】

【分析】本题考查了求代数式的值, 理解题意, 根据已知条件得到代数式的值, 并能整体代入是解题关键. 先把 $x=2$, $y=-4$ 代入 $ax^3 + \frac{1}{2}by + 7 = -9$, 整理得 $4a - b = -8$, 再把 $x=-4$, $y=-\frac{1}{2}$ 代入 $3ax - 24by^3 - 7$, 整理得 $-12a + 3b - 7$, 变形为 $-3(4a - b) - 7$, 再整体代入即可求解.

【详解】解: 把 $x=2$, $y=-4$ 代入 $ax^3 + \frac{1}{2}by + 7 = -9$, 得 $8a - 2b + 7 = -9$,
整理得 $4a - b = -8$,

把 $x=-4$, $y=-\frac{1}{2}$ 代入 $3ax - 24by^3 - 7$, $3ax - 24by^3 + 4986$

$$\text{得 } 3a \cdot (-4) - 24b \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 7$$

$$= -12a + 3b - 7$$

$$= -3(4a - b) - 7$$

$$= -3 \times (-8) - 7$$

$$= 17.$$

33. 已知数 a 、 b 、 x 、 y 满足 $a+b=x+y=2$, $ax+by=5$, 求 $(a^2-b^2)(x^2-y^2)$ 的值.

【答案】24.

【解析】

【分析】本题考查了整式的乘法和因式分解. 首先根据 $a+b=x+y=2$ 可得 $ax+ay+bx+by=4$, 又因为 $ax+by=5$, 可得 $ay+bx=-1$, 把 $(a^2-b^2)(x^2-y^2)$ 分解因式可得: $(a+b)(a-b)(x+y)(x-y)$, 把 $a+b=x+y=2$ 代入可得 $4(a-b)(x-y)$, 利用多项式乘多项式的法则展开可得

$$4[(ax+by)-(ay+bx)], \text{ 再把 } ax+by=5 \text{ 和 } ay+bx=-1 \text{ 代入求值即可.}$$

【详解】解: $\because a+b=x+y=2$,

$$\therefore (a+b)(x+y) = 2 \times 2,$$

$$\therefore ax + ay + bx + by = 4,$$

$$\because ax + by = 5,$$

$$\therefore 5 + ay + bx = 4,$$

$$\therefore ay + bx = -1,$$

$$\therefore (a^2 - b^2)(x^2 - y^2)$$

$$= (a+b)(a-b)(x+y)(x-y)$$

$$= 2 \times (a-b) \times 2 \times (x-y)$$

$$= 4(a-b)(x-y)$$

$$= 4(ax - ay - bx + by)$$

$$= 4[(ax + by) - (ay + bx)]$$

$$= 4 \times [5 - (-1)]$$

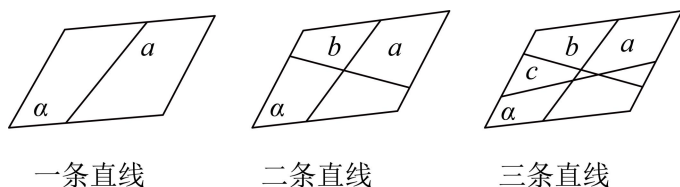
$$= 4 \times 6$$

$$= 24.$$

六、综合与实践（共 7 分）

34. 我们知道一条直线（一维）被 n 个点分割，最多可以分成 $n+1$ 部分；那么一个平面（二维）被 n 条直线分割，最多可以分成多少部分？一个空间（三维）被 n 个平面分割，最多可以分成多少部分？

【探究】一个平面（用平行四边形 a 表示）被 n 条直线分割，（给出的图例如下）



直线条数	新直线被分成的份数	原平面被分成的份数	增加的平面份数	新平面被分成的份数
1	1	1	1	$A(1) = 2$

2	2	$A(1) = 2$	2	$A(2) = 4$
3	3	$A(2) = 4$	3	$A(3) = 7$
4		$A(3) = 7$		$A(4)$
n		$A(n-1)$		$A(n)$

(1) 填空: $A(4) =$ _____.

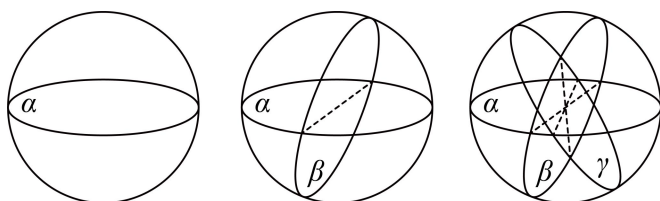
(2) 计算: $A(2) - A(1)$, $A(3) - A(2)$, $A(4) - A(3)$, ..., $A(n) - A(n-1)$, 这 $(n-1)$ 组差, 再把这 $(n-1)$ 组差相加可得: $A(n) - A(1) =$ _____. (用含 n 的式子表示), 进而得到 $A(n)$ 的表达式.

【延伸】我们已知一条直线 (一维) 被 n 个点分割, 最多可以分成 $n+1$ 部分, 即一维的分割数是 n 的一次多项式. 经过证明, 我们了解到二维的分割数是 n 的二次多项式, 三维的分割数是 n 的三次多项式. 我们解决一个平面 (二维) 被 n 条直线分割, 最多可以分成多少部分的问题就有了新的办法.

(3) 令这个二维分割数为 $A(n) = kn^2 + pn + q$, 代入 $A(1) = 2$, $A(2) = 4$, $A(3) = 7$ 得:

$A(n) =$ _____. (用含 n 的式子表示)

【类比】一个空间 (用球体表示) 被 n 个平面分割. (给出的图例如下)



(4) 请用以上两种方法分别得出三维分割数 $B(n)$. (用含 n 的式子表示)

方法一:

方法二:

【答案】(1) 11;

$$(2) \frac{1}{2}(n^2 + n - 2), \quad A(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2);$$

$$(3) \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1;$$

$$(4) B(n) = \frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n + 1, \text{ 方法见解析.}$$

【解析】

【分析】(1) 根据平面内有1条直线、2条直线、3条直线时平面被分成的个数总结出规律，根据规律得到 $A(4)$ 的值；

(2) 根据题目中提供的思路得到： $A(2) - A(1) = 2$, $A(3) - A(2) = 3$, $A(4) - A(3) = 4$, ,

$A(n) - A(n-1) = n$, 然后把这 $(n-1)$ 组差相加可得：

$A(2) - A(1) + A(3) - A(2) + A(4) - A(3) + \cdots + A(n) - A(n-1) = 2 + 3 + 4 + \cdots + n$, 从而得到

$A(n) - A(1) = 2 + 3 + 4 + \cdots + n$, 计算可得结果；

(3) 把 $A(1) = 2$ 、 $A(2) = 4$ 、 $A(3) = 7$ 分别代入 $A(n) = kn^2 + pn + q$, 得到三元一次方程组，解方程组求出 k 、 p 、 q 的值即可；

(4) 仿照(2)和(3)提供的思路求解即可.

【详解】解：(1) 由题意可知：平面内有1条直线时，平面被分成2个平面，

平面内有2条直线时，平面被分成4个平面，增加了2个平面，

平面内有3条直线时，平面被分成7个平面，增加了3个平面，

根据规律可知：当平面内有4条直线时，将增加4个平面，平面被分成11个平面，

故答案为：11；

(2) 根据规律可知： $A(2) - A(1) = 2$, $A(3) - A(2) = 3$, $A(4) - A(3) = 4$, , $A(n) - A(n-1) = n$,

把这 $(n-1)$ 组差相加可得：

$A(2) - A(1) + A(3) - A(2) + A(4) - A(3) + \cdots + A(n) - A(n-1) = 2 + 3 + 4 + \cdots + n$,

$\therefore A(n) - A(1) = 2 + 3 + 4 + \cdots + n$,

$\therefore A(n) - A(1) = \frac{(n+2)(n-1)}{2} = \frac{1}{2}(n^2 + n - 2),$

$$\therefore A(n) - 2 = \frac{1}{2}(n^2 + n - 2),$$

$$\therefore A(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n - 2) + 2,$$

$$\therefore A(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2),$$

故答案为: $\frac{1}{2}(n^2 + n - 2)$, $A(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$;

(3) 把 $A(1) = 2$ 、 $A(2) = 4$ 、 $A(3) = 7$ 分别代入 $A(n) = kn^2 + pn + q$,

可得:
$$\begin{cases} k + p + q = 2 \\ 4k + 2p + q = 4 \\ 9k + 3p + q = 7 \end{cases}$$

解方程组得:
$$\begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ p = \frac{1}{2} \\ q = 1 \end{cases}$$

$$\therefore A(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1,$$

故答案为: $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$;

(4) 方法一、1个平面把一个空间分成2个空间,

2个平面把一个空间分成4个空间,

3个平面把一个空间分成8个空间,

4个平面把一个空间分成15个空间,

$$\therefore B(2) - B(1) = 4 - 2 = 2 = 1 + 1,$$

$$\therefore B(3) - B(2) = 8 - 4 = 4 = 1 + 1 + 2,$$

$$\therefore B(4) - B(3) = 15 - 8 = 7 = 1 + 1 + 2 + 3,$$

$$\therefore B(5) - B(4) = 26 - 15 = 11 = 1 + 1 + 2 + 3 + 4,$$

$$\therefore B(n) - B(n-1) = 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 = \frac{1}{2}(n^2 - n) + 1,$$

$$\begin{aligned}
 \therefore B(n) - B(n-1) - 1 &= \frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{1}{6}n(n-1)[(n+1) - (n-2)] \\
 &= \frac{1}{6}(n+1)n(n-1) - \frac{1}{6}n(n-1)(n-2), \\
 \therefore [B(n) - B(n-1) - 1] &+ [B(n-1) - B(n-2) - 1] + \cdots + [B(3) - B(2) - 1] + [B(2) - B(1) - 1] \\
 &= \left[\frac{1}{6}(n+1)n(n-1) - \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) \right] + \left[\frac{1}{6}n(n-1)(n-2) - \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) \right] + \cdots + \left[\frac{1}{6} \times 4 \times 3 \times 2 - \frac{1}{6} \times 3 \times 2 \times 1 \right] \\
 &= \frac{1}{6}(n+1)n(n-1), \\
 \therefore B(n) - B(1) - (n-1) &= \frac{1}{6}(n+1)n(n-1), \\
 \therefore B(n) &= \frac{1}{6}(n+1)n(n-1) + B(1) + (n-1) = \frac{1}{6}(n+1)n(n-1) + n + 1 = \frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n + 1;
 \end{aligned}$$

方法二、设 $B(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$,

把 $B(1) = 2$ 、 $B(2) = 4$ 、 $B(3) = 8$ 、 $B(4) = 15$ 代入 $B(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$,

$$\text{可得: } \begin{cases} a + b + c + d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = 4 \\ 27a + 9b + 3c + d = 8 \\ 64a + 16b + 4c + d = 15 \end{cases},$$

$$\text{解方程组可得: } \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = 0 \\ c = \frac{5}{6} \\ d = 1 \end{cases},$$

$$\therefore B(n) = \frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n + 1.$$

【点睛】 本题主要考查直线与平面的性质及根据已知条件找规律，解决本题的关键是理解题干中的解决问题的方法，根据题干中提供的思路解决问题。