

七年级第一学期十二月学情检测数学试卷

(2024.12.2)

考试时间：90 分钟

一、选择题：(本大题共 6 题，每小题 2 分，共 12 分)

1. 下列单项式中， a^2b^3 的同类项是 ()

- A. a^3b^2 B. $2a^2b^3$ C. a^2b D. ab^3

【答案】B

【解析】

【分析】比较对应字母的指数,分别相等就是同类项

【详解】 $\because a$ 的指数是 3, b 的指数是 2, 与 a^2b^3 中 a 的指数是 2, b 的指数是 3 不一致,

$\therefore a^3b^2$ 不是 a^2b^3 的同类项, 不符合题意;

$\because a$ 的指数是 2, b 的指数是 3, 与 a^2b^3 中 a 的指数是 2, b 的指数是 3 一致,

$\therefore 2a^2b^3$ 是 a^2b^3 的同类项, 符合题意;

$\because a$ 的指数是 2, b 的指数是 1, 与 a^2b^3 中 a 的指数是 2, b 的指数是 3 不一致,

$\therefore a^2b$ 不是 a^2b^3 的同类项, 不符合题意;

$\because a$ 的指数是 1, b 的指数是 3, 与 a^2b^3 中 a 的指数是 2, b 的指数是 3 不一致,

$\therefore ab^3$ 不是 a^2b^3 的同类项, 不符合题意;

故选 B

【点睛】本题考查了同类项, 正确理解同类项的定义是解题的关键.

2. 下列代数式中, 次数为 3 的单项式是 ()

- A. $x^3 + y^3$ B. $3xy$ C. xy^2 D. x^3y

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查单项式和多项式的相关概念, 解题的关键是正确理解单项式的次数概念, 本题属于基础题型. 单项式的次数是各字母的指数之和.

【详解】解：A、 $x^3 + y^3$ 是多项式，故选项不符合题意；

B、 $3xy$ 是次数为 2 的单项式，故选项不符合题意；

C、 xy^2 是次数为 3 的单项式，故选项符合题意；

D、 x^3y 是次数为 4 的单项式，故选项不符合题意；

故选：C.

3. 下列运算中，正确的是 ()

A. $a^2 + a^2 = a^4$

B. $a^6 \div a^2 = a^3$

C. $(a^3b^3)^2 = a^9b^9$

D. $a^3 \cdot a^2 = a^5$

【答案】D

【解析】

【分析】选项 A 根据合并同类项法则判断即可，合并同类项的法则：把同类项的系数相加，所得结果作为系数，字母和字母的指数不变；

选项 B 根据同底数幂的除法法则判断即可，同底数幂的除法法则：底数不变，指数相减；

选项 C 根据积的乘方运算法则判断即可，积的乘方法则：把每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘；

选项 D 根据同底数幂的乘法法则判断即可，同底数幂的乘法法则：同底数幂相乘，底数不变，指数相加.

【详解】解：A. $a^2 + a^2 = 2a^2$,

故本选项不合题意；

B. $a^6 \div a^2 = a^4$,

故本选项不合题意；

C. $(a^3b^3)^2 = a^6b^6$,

故本选项不合题意；

D. $a^3 \cdot a^2 = a^5$,

故本选项符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查了幂的运算，熟练掌握各种运算的法则是解题的关键.

4. 如果将分式 $\frac{xy}{2x+3y}$ 中的 x 和 y 都扩大到原来的 3 倍, 那么分式的值 ()

- A. 扩大到原来的 3 倍 B. 扩大到原来的 9 倍
C. 缩小到原来的 $\frac{1}{3}$ D. 不变

【答案】A

【解析】

【分析】 x 和 y 都扩大到原来的 3 倍就是分别变成原来的 3 倍, 变成 $3x$ 和 $3y$. 用 $3x$ 和 $3y$ 代替式子中的 x 和 y , 根据得到的式子与原来的式子的关系进行判断即可.

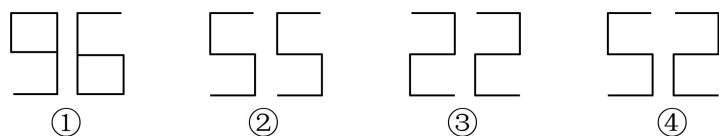
【详解】用 $3x$ 和 $3y$ 代替式子中的 x 和 y 得: 原式 $= \frac{(3x)(3y)}{2(3x)+3(3y)} = \frac{9xy}{3(2x+3y)} = 3 \times \frac{xy}{2x+3y}$

则分式的值扩大到原来的 3 倍

故选: A.

【点睛】本题考查分式的基本性质, 解题的关键是抓住分子、分母变化的倍数, 解此类题首先把字母变化后的值代入式子中, 然后约分, 再与原式比较, 最终得出结论.

5. 如下所示的 4 组图形中, 左边图形与右边图形成中心对称的有 ()



- A. 1 组 B. 2 组 C. 3 组 D. 4 组

【答案】C

【解析】

【详解】试题分析: 根据中心对称图形与轴对称图形的概念依次分析即可.

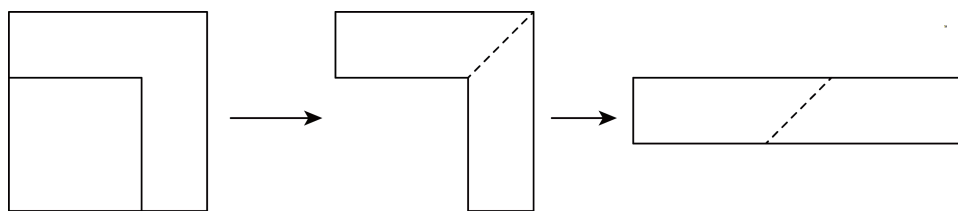
①②③是只是中心对称图形, ④只是轴对称图形,

故选 C.

考点: 本题考查的是中心对称图形与轴对称图形

点评: 解答本题的关键是熟练掌握如果一个图形沿着一条直线对折后两部分完全重合, 这样的图形叫做轴对称图形, 这条直线叫对称轴; 在同一平面内, 如果把一个图形绕某一点旋转 180° , 旋转后的图形能和原图形完全重合, 那么这个图形就叫做中心对称图形.

6. 如图, 从边长为 $(2a+3)$ 的正方形纸片中剪去一个边长为 $2a$ 的正方形 ($a > 0$), 剩余部分沿虚线剪开拼成一个长方形 (不重叠无缝隙), 那么长方形的面积为 ()



A. $4a^2+6a$

B. $6a+9$

C. $12a+9$

D. $12a+15$

【答案】C

【解析】

【分析】根据裁剪拼图可知，所拼成的长方形的长为 $(2a+3) + 2a = 4a+3$ ，宽为 $(2a+3) - 2a = 3$ ，由长方形面积的计算方法即可得出答案.

【详解】解：由题意可得，

所拼成的长方形的长为 $(2a+3) + 2a = 4a+3$ ，宽为 $(2a+3) - 2a = 3$ ，

所以长方形的面积为 $(4a+3) \times 3 = 12a+9$ ，

故选：C.

【点睛】本题考查了整式的加减的应用，根据题意求得长方形的长和宽是解题的关键.

二、填空题：(本大题共 12 题，每小题 2 分，共 24 分)

7. “比 x 的 2 倍小 5 的数”用代数式表示为_____.

【答案】 $2x-5$

【解析】

【分析】先求倍数，然后求差列式即可.

【详解】 $\because x$ 的 2 倍是 $2x$ ，

$\therefore$ 比 x 的 2 倍小 5 的数是 $2x-5$ ，

故答案为 $2x-5$

【点睛】列代数式的关键是正确理解文字语言中的关键词，比如该题中的“倍”、“小”等，从而明确其中的运算关系，正确地列出代数式.

8. 将多项式 $2y^3 + 3x^2y - 2xy^2 - x^3$ 按 x 降幂排列为_____.

【答案】 $-x^3 + 3x^2y - 2xy^2 + 2y^3$

【解析】

【分析】将多项式按 x 的降幂排列就是按 x 的指数从高到低排列，根据定义即可求解.

【详解】多项式 $2y^3 + 3x^2y - 2xy^2 - x^3$ 按字母 x 的降幂排列是： $-x^3 + 3x^2y - 2xy^2 + 2y^3$.

故答案是： $-x^3 + 3x^2y - 2xy^2 + 2y^3$.

【点睛】本题考查多项式的降幂排列，我们把一个多项式的各项按照某个字母的指数从大到小或从小到大的顺序排列，称为按这个字母的降幂或升幂排列. 要注意，在排列多项式各项时，要注意符号.

9. 将代数式 $3x^{-2}$ 表示为只含有正整数指数幂的形式_____.

【答案】 $\frac{3}{x^2}$

【解析】

【分析】根据负整数指数幂的定义 $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ (p 为正整数) 解答即可求解.

【详解】解： $3x^{-2} = \frac{3}{x^2}$.

故答案为： $\frac{3}{x^2}$

【点睛】本题考查了负整数指数幂的定义，熟知 $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ (p 为正整数) 是解题关键.

10. 计算： $(-2)^{2021} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2022} =$ _____.

【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】根据积的乘方法则进行计算求解即可.

【详解】解：原式 $= (-2)^{2021} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2021} \times \frac{1}{2} = (-2 \times \frac{1}{2})^{2021} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$,

故答案为： $-\frac{1}{2}$.

【点睛】本题考查了积的乘方运算，掌握运算法则是解题的关键.

11. 若分式 $\frac{x-3}{x+3}$ 的值为 0，则 $x =$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】本题主要考查了分式值为 0 的条件，熟知分式值为 0 的条件是分子为 0 分母不为 0 是解题的关键.

【详解】解： $\because$ 分式 $\frac{x-3}{x+3}$ 的值为 0，

$\therefore x-3=0$ 且 $x+3 \neq 0$,

$\therefore x=3$,

故答案为：3.

12. 已知 $\frac{x+3y}{4x-y} = 2$ ，那么 $\frac{x}{y}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{5}{7}$

【解析】

【分析】 本题考查分式的求值，根据 $\frac{x+3y}{4x-y} = 2$ ，求出 x, y 的关系式，进而求出 $\frac{x}{y}$ 的值即可.

【详解】 解： $\because \frac{x+3y}{4x-y} = 2$,

$$\therefore x+3y=8x-2y,$$

$$\therefore 7x=5y,$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{5}{7};$$

故答案为： $\frac{5}{7}$.

13. 已知 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ ，那么 $\frac{x+y-z}{2z}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{1}{8}$

【解析】

【分析】 本题考查分式的求值，利用设参法进行求解即可. 熟练掌握设参法，是解题的关键.

【详解】 解： 设 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = k$ ，则： $x = 2k, y = 3k, z = 4k$ ，

$$\therefore \frac{x+y-z}{2z} = \frac{2k+3k-4k}{2 \cdot 4k} = \frac{1}{8};$$

故答案为： $\frac{1}{8}$.

14. 正方形有_____条对称轴.

【答案】 4.

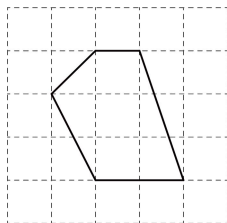
【解析】

【详解】 正方形的两条对角线以及对边中点的连线所在的直线都是正方形的对称轴.

故答案为 4.

15. 各顶点都在方格纸横竖格子线的交错点上的多边形称为格点多边形，奥地利数学家皮克(G.Pick, 1859 ~

1942 年)证明了格点多边形的面积公式: $S = a + \frac{1}{2}b - 1$, 其中 a 表示多边形内部的格点数, b 表示多边形边界上的格点数, S 表示多边形的面积. 如图格点多边形的面积是_____.



【答案】 6

【解析】

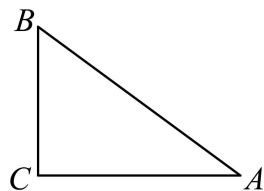
【分析】 观察图像, 得出 a, b 的值即可.

【详解】 由图可知, $a=4, b=6$,

$$\therefore S = a + \frac{1}{2}b - 1 = 6$$

【点睛】 本题考查的是多边形, 仔细观察图像是解题的关键.

16. 在直角三角形 ABC 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 5$, $CA = 4$, $CB = 3$, 将 ABC 绕若点 B 旋转, 使点 C 落在直线 AB 上的点 D 处, 则线段 $AD =$ _____.



【答案】 2 或 10 或 2

【解析】

【分析】 分点 C 落在线段 AB 上的点 D 处和点 C 落在线段 AB 延长线上的点 D 处两种情况讨论, 根据旋转性质求出 $BC = BD = 3$, 即可求出线段 AD .

【详解】 解: 如图 1, 当点 C 落在线段 AB 上的点 D 处时,

$\therefore ABC$ 绕若点 B 旋转得到 $\triangle EBD$,

$$\therefore BC = BD = 3,$$

$$\therefore AD = AB - BD = 5 - 3 = 2;$$

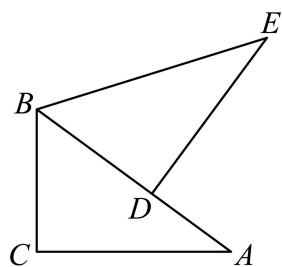


图1

如图 2，当点 C 落在线段 AB 延长线上的点 D 处时，

$\therefore \triangle ABC$ 绕若点 B 旋转得到 $\triangle EBD$ ，

$\therefore BC = BD = 3$ ，

$\therefore AD = AB + BD = 5 + 3 = 10$ 。

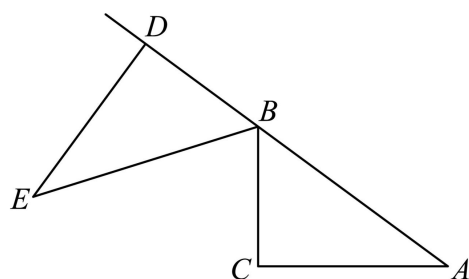
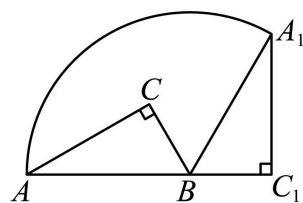


图2

故答案为：2 或 10

【点睛】本题考查了旋转的性质，旋转前后的对应点到旋转中心的距离相等，熟知旋转的性质是解题关键，注意本题要分类讨论。

17. 如图，将直角三角尺 ABC （其中 $\angle ABC = 60^\circ$ ）绕点 B 顺时针旋转一个角度到 A_1BC_1 的位置，使得点 A ， B ， C_1 在同一条直线上，如果 AB 的长度为 10，那么点 A 旋转到点 A_1 走过的路程是_____。（结果保留 π ）



【答案】 $\frac{20}{3}\pi$

【解析】

【分析】根据三角尺的度数得出 $\angle ABC = \angle A_1BC_1 = 60^\circ$ ，然后根据平角等于 180° 求出 $\angle ABA_1$ ，然后根据弧长公式列式进行计算即可得解。

【详解】解：∵ $\triangle A'BC'$ 是 $\triangle ABC$ 旋转得到，

$$\therefore \angle ABC = \angle A_1BC_1 = 60^\circ,$$

又∵ 点 A, B, C_1 在同一条直线上，

$$\therefore \angle ABA_1 = 180^\circ - \angle A_1BC_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

∵ AB 的长度为 10，

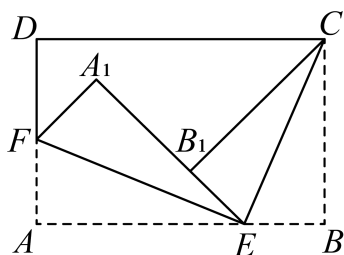
$$\therefore \text{点 A 转动到点 } A_1 \text{ 走过的路程} = \frac{120 \cdot \pi \cdot 10}{180} = \frac{20}{3} \pi.$$

故答案为： $\frac{20}{3} \pi$.

【点睛】 本题主要考查了弧长的计算，记住弧长的计算公式、明确三角尺的度数的常识是解题的关键.

18. 如图，将长方形 $ABCD$ 按图中方式折叠，其中 EF 、 EC 为折痕，折叠后 A_1 、 B_1 、 E 在一直线上，已知

$\angle BEC = 65^\circ$ ，那么 $\angle AEF$ 的度数是_____.



【答案】 25°

【解析】

【分析】 利用翻折变换的性质即可解决.

【详解】解：由折叠可知， $\angle A_1EF = \angle AEF$ ， $\angle A_1EC = \angle BEC = 65^\circ$ ，

$$\therefore \angle A_1EF + \angle AEF + \angle A_1EC + \angle BEC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle A_1EF + \angle AEF = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle AEF = 25^\circ,$$

故答案为： 25° .

【点睛】 本题考查了折叠的性质，熟练掌握折叠的性质是解题的关键.

三、简答题：(本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分)

19. 计算： $(x-1)^2 + (3+x)(3-x) - (x-2)(x+3)$.

【答案】 $-x^2 - 3x + 16$

【解析】

【分析】 先算乘方，再算乘法，合并解答即可.

【详解】 解: $(x-1)^2 + (3+x)(3-x) - (x-2)(x+3)$

$$= x^2 - 2x + 1 + 9 - x^2 - (x^2 + x - 6)$$

$$= x^2 - 2x + 1 + 9 - x^2 - x^2 - x + 6$$

$$= -x^2 - 3x + 16.$$

【点睛】 本题考查了完全平方公式，平方差公式，多项式乘以多项式，熟练掌握公式是解题的关键.

$$20. -2^2 \div (\pi - 3)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + (-1)^{-2}.$$

【答案】 5

【解析】

【分析】 先计算有理数的乘方，负整数指数幂，然后根据有理数的混合运算法则求解即可.

【详解】 解: $-2^2 \div (\pi - 3)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + (-1)^{-2}$

$$= -4 \div 1 + 8 + 1$$

$$= -4 + 8 + 1$$

$$= 5.$$

【点睛】 本题主要考查了含乘方的有理数混合计算，零指数幂，负整数指数幂，熟知相关运算法则是解题的关键.

$$21. \text{ 计算: } \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 10} \div \frac{x - 1}{x - 2}.$$

【答案】 $\frac{x+1}{x+5}$

【解析】

【分析】 先把各个分式的分子、分母因式分解，根据分式的除法法则、约分法则计算即可.

【详解】 解: 原式 $= \frac{(x+1)(x-1)}{(x+5)(x-2)} \times \frac{(x-2)}{(x-1)}$

$$= \frac{x+1}{x+5}.$$

【点睛】 本题考查了分式的化简，熟练掌握约分，灵活进行因式分解是解题的关键.

22. 计算 $(x^{-2} - y^{-2}) \div (x^{-1} + y^{-1})$ (结果用不含负整数指数幂的形式表示).

【答案】 $\frac{y-x}{xy}$

【解析】

【分析】 先将负整数指数幂化为分式形式，再计算小括号，最后算乘除，问题得解.

【详解】 解： $(x^{-2} - y^{-2}) \div (x^{-1} + y^{-1})$

$$= \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) \div \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

$$= \frac{y^2 - x^2}{x^2 y^2} \div \frac{y + x}{xy}$$

$$= \frac{(y+x)(y-x)}{x^2 y^2} \cdot \frac{xy}{y+x}$$

$$= \frac{y-x}{xy}.$$

【点睛】 本题考查了负整数指数幂，分式的混合运算，熟知分式的混合运算法则，将负整数指数幂运算化为分式的运算是解题关键.

23. 分解因式： $a^3 - a^2b - 4a + 4b$.

【答案】 $(a-b)(a+2)(a-2)$

【解析】

【分析】 先分组，再提公因式，最后用平方差公式进一步进行因式分解.

【详解】 解： $a^3 - a^2b - 4a + 4b$

$$= (a^3 - 4a) - (a^2b - 4b)$$

$$= a(a^2 - 4) - b(a^2 - 4)$$

$$= (a-b)(a^2 - 4)$$

$$= (a-b)(a+2)(a-2).$$

【点睛】 本题考查了因式分解法中的分组法、提公因式法、平方差公式的综合应用，正确地进行分组，找到公因式，并且注意因式分解要彻底，这是解题的关键.

24. 解方程： $\frac{3}{2x-1} - 1 = \frac{15}{4x-2}$

【答案】 $x = -\frac{7}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查解分式方程. 熟练掌握解分式方程的步骤, 是解题的关键. 根据解分式方程的步骤, 解方程即可.

【详解】 解: $\frac{3}{2x-1} - 1 = \frac{15}{4x-2}$

方程两边同乘 $(4x-2)$ 得: $2 \times 3 - (4x-2) = 15$,

去括号, 得: $6 - 4x + 2 = 15$,

移项, 合并得: $-4x = 7$,

系数化 1, 得: $x = -\frac{7}{4}$,

经检验 $x = -\frac{7}{4}$ 是原方程得根;

$\therefore$ 方程的解为: $x = -\frac{7}{4}$.

四、解答题 (本大题共 5 小题, 25 题 ~ 29 题每题 6 分, 第 30 题 10 分, 共 40 分)

25. 先化简, 再求值: $(\frac{a-2}{a^2+2a} - \frac{a-1}{a^2+4a+4}) \div \frac{a-4}{a+2}$, 其中 $a = -1$.

【答案】 $\frac{1}{a^2+2a}$, -1

【解析】

【分析】 先算括号内的减法, 再把除法变成乘法, 求出结果, 最后代入求出即可.

【详解】 解: 原式 $= \left[\frac{a-2}{a(a+2)} - \frac{a-1}{(a+2)^2} \right] \div \frac{a-4}{a+2}$

$$= \left[\frac{a^2-4}{a(a+2)^2} - \frac{a^2-a}{a(a+2)^2} \right] \div \frac{a-4}{a+2}$$

$$= \frac{a-4}{a(a+2)^2} \cdot \frac{a+2}{a-4}$$

$$= \frac{1}{a^2+2a},$$

当 $a = -1$ 时, 原式 $= \frac{1}{(-1)^2+2 \times (-1)} = -1$.

【点睛】 本题考查了分式的混合运算, 对于分式的混合运算, 应注意运算顺序: 先算乘方, 再算乘除, 最

后算加减，有括号的要先算括号内的。此外，也应仔细观察式子的特点，灵活选择简便的方法计算，如使用运算律、公式等。

26. 如图，点 A 、 B 、 C 都是格点（格点即每一个小正方形的顶点）。

(1) 在图 1 中确定点 D ，并画出以 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形，使这个四边形为轴对称图形（画一个即可）；

(2) 在图 2 中确定点 E ，并画出以 A 、 B 、 C 、 E 为顶点的四边形，使这个四边形为中心对称图形（画一个即可）。

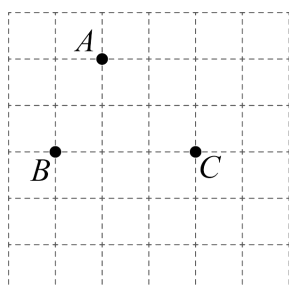


图1

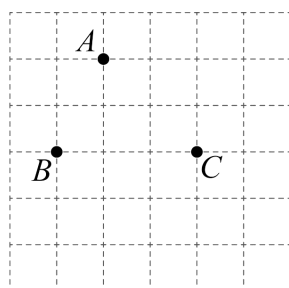


图2

【答案】(1) 见解析；(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 直接利用轴对称图形的性质得出一个符合题意的图形；

(2) 直接利用中心对称图形的性质得出一个符合题意的图形即可。

【详解】解：(1) 如图 1 所示：

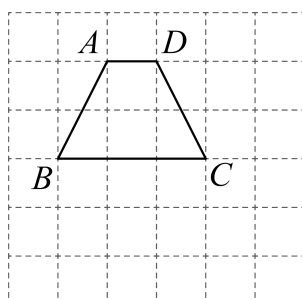


图1

则四边形 $ABCD$ 即为所求；

(2) 如图 2 所示：

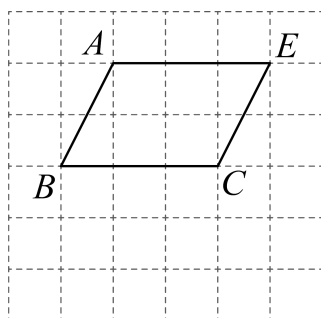


图2

则四边形 $ABCE$ 即为所求.

【点睛】 本题考查了轴对称图形，中心对称图形，熟练掌握轴对称图形，中心对称图形是解题的关键.

27. 某施工队新修水渠 3600 米，为了尽快投入使用，实际工作效率是原计划工作效率的 1.5 倍，结果比原计划提前 20 天完成修水渠任务. 问原计划每天修水渠多少米？

【答案】 原计划每天修水渠 60 米

【解析】

【分析】 设原计划每天修水渠 x 米，根据“实际比原计划提前 20 天完成任务”列分式方程，解分式方程，问题得解.

【详解】 解： 设原计划每天修水渠 x 米，列方程得

$$\frac{3600}{x} - \frac{3600}{1.5x} = 20,$$

方程两边同乘 $1.5x$ 得 $5400 - 3600 = 30x$,

解得 $x = 60$,

经检验 $x = 60$ 是分式方程的解.

答： 原计划每天修水渠 60 米.

【点睛】 本题考查了分式方程的应用，理解题意，设出未知数，找出等量关系列出分式方程是解题关键，注意解完分式方程一定要检验，这是一个易错点.

28. 已知关于 x 的方程： $\frac{2}{x-1} - \frac{kx}{x^2+x-2} = \frac{1}{x+2}$ ，若方程有增根，求 k 的值.

【答案】 $k = -\frac{3}{2}$ 或 6

【解析】

【分析】 本题考查分式方程有增根问题，将分式方程转化为整式方程，求出使最简公分母为 0 的未知数的值，代入整式方程中，进行求解即可.

【详解】 解： $\frac{2}{x-1} - \frac{kx}{x^2+x-2} = \frac{1}{x+2}$,

去分母，得： $2(x+2) - kx = x - 1$ ，

整理得： $(1-k)x = -5$ ；

∵ 方程有增根，

∴ $x - 1 = 0$ 或 $x + 2 = 0$ ，

∴ $x = 1$ 或 $x = -2$ ；

当 $x = 1$ 时， $(1-k) \times 1 = -5$ ，解得： $k = 6$ ；

当 $x = -2$ 时， $(1-k) \times (-2) = -5$ ，解得： $k = -\frac{3}{2}$ ；

综上： $k = -\frac{3}{2}$ 或 6 。

29. 已知 $\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}$ ，求分式 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值

【答案】 $\frac{1}{3}$ 。

【解析】

【分析】取原式倒数，可得 $x + \frac{1}{x} = 2$ ，两次平方得 $x^4 + \frac{1}{x^4} = 2$ ，可得所求分式值为 $\frac{1}{3}$ 。

【详解】由 $\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}$ 得 $\frac{x^2+x+1}{x} = x+1+\frac{1}{x} = 3$ ，

∴ $x + \frac{1}{x} = 2$

而 $\frac{x^4+x^2+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 = (x + \frac{1}{x})^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$ ，

∴ $\frac{x^2}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{3}$ 。

【点睛】本题考查的是分式的化简求值，熟知分式混合运算法则是解答此题的关键。

30. 如果两个分式 M 与 N 的和为常数 k ，且 k 正整数，则称 M 与 N 互为“和整分式”，常数 k 称为“和整值”。如分式 $M = \frac{x}{x+1}$ ， $N = \frac{1}{x+1}$ ， $M + N = \frac{x+1}{x+1} = 1$ ，则 M 与 N 互为“和整分式”，“和整值” $k = 1$ 。

(1) 已知分式 $A = \frac{x-7}{x-2}$ ， $B = \frac{x^2+6x+9}{x^2+x-6}$ ，判断 A 与 B 是否互为“和整分式”，若不是，请说明理由；

若是，请求出“和整值” k ；

(2) 已知分式 $C = \frac{3x-4}{x-2}$, $D = \frac{G}{x^2-4}$, C 与 D 互为“和整分式”, 且“和整值” $k=3$, 若 x 为正整数,

分式 D 的值为正整数 t .

①求 G 所代表的代数式;

②求 x 的值;

(3) 在 (2) 的条件下, 已知分式 $P = \frac{3x-5}{x-3}$, $Q = \frac{mx-3}{3-x}$, 且 $P+Q=t$, 若该关于 x 的方程无解, 求实

数 m 的值.

【答案】 (1) A 与 B 是互为“和整分式”, “和整值” $k=2$;

(2) ① $G = -2x-4$; ② $x=1$

(3) m 的值为: 1 或 $\frac{7}{3}$.

【解析】

【分析】 (1) 先计算 $A+B$, 再根据结果可得结果;

(2) ①先求解 $C+D = \frac{3x^2+2x-8+G}{(x-2)(x+2)}$, 结合新定义可得 $3x^2+2x-8+G = 3(x-2)(x+2) = 3x^2-12$,

从而可得答案; ②由 $D = -\frac{2}{x-2}$, 且分式 D 的值为正整数 t . x 为正整数, 可得 $x-2 = -1$ 或 $x-2 = -2$,

从而可得答案;

(3) 由题意可得: $t = D = -\frac{2}{1-2} = 2$, 可得 $\frac{3x-5-mx+3}{x-3} = 2$, 整理得: $(1-m)x = -4$, 由方程无解, 可得 $1-m=0$ 或方程有增根 $x=3$, 再分两种情况求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because A = \frac{x-7}{x-2}$, $B = \frac{x^2+6x+9}{x^2+x-6}$,

$$\therefore A+B = \frac{x-7}{x-2} + \frac{x^2+6x+9}{x^2+x-6}$$

$$= \frac{x-7}{x-2} + \frac{(x+3)^2}{(x+3)(x-2)}$$

$$= \frac{x-7}{x-2} + \frac{x+3}{x-2}$$

$$= \frac{2(x-2)}{x-2}$$

$$= 2.$$

$\therefore A$ 与 B 是互为“和整分式”，“和整值” $k=2$ ；

【小问 2 详解】

$$\textcircled{1} \because C = \frac{3x-4}{x-2}, \quad D = \frac{G}{x^2-4},$$

$$\therefore C+D = \frac{(3x-4)(x+2)}{(x-2)(x+2)} + \frac{G}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{3x^2+2x-8+G}{(x-2)(x+2)}$$

$\therefore C$ 与 D 互为“和整分式”，且“和整值” $k=3$ ，

$$\therefore 3x^2+2x-8+G = 3(x-2)(x+2) = 3x^2-12,$$

$$\therefore G = 3x^2-12-3x^2-2x+8 = -2x-4;$$

$$\textcircled{2} \because D = \frac{G}{x^2-4} = \frac{-2(x+2)}{(x+2)(x-2)} = -\frac{2}{x-2}, \text{ 且分式 } D \text{ 的值为正整数 } t. \quad x \text{ 为正整数,}$$

$$\therefore x-2 = -1 \text{ 或 } x-2 = -2,$$

$$\therefore x = 1 \quad (x = 0 \text{ 舍去});$$

【小问 3 详解】

$$\text{由题意可得: } t = D = -\frac{2}{1-2} = 2,$$

$$\therefore P+Q = \frac{3x-5}{x-3} + \frac{mx-3}{3-x} = 2,$$

$$\therefore \frac{3x-5-mx+3}{x-3} = 2,$$

$$\therefore (3-m)x-2 = 2x-6,$$

$$\text{整理得: } (1-m)x = -4,$$

$\therefore$ 方程无解,

$$\therefore 1-m = 0 \text{ 或方程有增根 } x = 3,$$

$$\text{解得: } m = 1,$$

当 $1-m \neq 0$ ，方程有增根 $x=3$ ，

$$\therefore \frac{-4}{1-m} = 3,$$

$$\text{解得: } m = \frac{7}{3},$$

综上: m 的值为: 1 或 $\frac{7}{3}$.

【点睛】 本题考查的是新定义运算的理解，分式的加减运算，分式方程的解法，分式方程无解问题，理解题意是解本题的关键.