

2024 学年第一学期八年级数学学科第二次适应练习

(时长: 90 分钟)

一、单项选择题

1. 下列二次根式中, 是最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{12a}$ B. $\sqrt{\frac{a}{3}}$ C. $\sqrt{a^2+b^2}$ D. $\sqrt{a^2b}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据最简二次根式的定义即二次根式化简后, 被开方数不含分母, 并且被开方数中所有因式的幂的指数小于 2, 判断即可.

本题考查了最简二次根式, 熟练掌握定义是解题的关键.

【详解】解: A. $\sqrt{12a} = 2\sqrt{3a}$, 不符合题意;

B. $\sqrt{\frac{a}{3}} = \frac{\sqrt{3a}}{3}$, 不符合题意;

C. $\sqrt{a^2+b^2}$, 符合题意;

D. $\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}$, 不符合题意;

故选: C.

2. 已知 a 、 b 、 c 是常数, 且 $a \neq 0$, 关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实数根的条件是 ()

- A. $b^2-4ac < 0$ B. $b^2-4ac > 0$ C. $b^2-4ac \geq 0$ D. $b^2-4ac \leq 0$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了根的判别式, 当 $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$, 方程没有实数根. 根据关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实数根的条件是 $\Delta \geq 0$ 即可得出正确的选项.

【详解】解: $\because a$ 、 b 、 c 是常数, 且 $a \neq 0$,

$\therefore$ 关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实数根的条件是: $b^2-4ac \geq 0$,

故选: C.

3. 已知正比例函数 $y = -4x$ 的图像经过点 $(1, y_1)$ 和点 $(3, y_2)$ ，下列结论正确的是 ()

- A. $y_2 < y_1 < 0$ B. $y_1 > y_2 > 0$ C. $y_2 > y_1 > 0$ D. $y_1 < y_2 < 0$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了正比例函数的性质，熟知当 $k < 0$ 时， y 随 x 的增大而减小是解题的关键.
根据正比例函数的性质解答即可.

【详解】解：在 $y = -4x$ 中，

$$\because -4 < 0,$$

$\therefore$ 正比例函数 $y = -4x$ 中， y 随 x 的增大而减小，

$$\because 0 < 1 < 3,$$

$$\therefore y_2 < y_1 < 0,$$

故选：A.

4. 下列命题中，是假命题的是 ()

- A. 直角三角形的两个锐角互余
B. 一个直角三角形必能分成一个等腰三角形和一个等边三角形
C. 线段垂直平分线上的任意一点到这条线段两个端点的距离相等
D. 在角的平分线上的任意一点到这个角的两边的距离相等

【答案】B

【解析】

【分析】根据所学的数学知识，理解判定解答即可.
本题考查了命题的判定，正确判定命题是解题的关键.

- 【详解】A. 直角三角形的两个锐角互余，正确，不符合题意；
B. 一个直角三角形可以分成一个三角形和一个四边形，错误，符合题意；
C. 线段垂直平分线上的任意一点到这条线段两个端点的距离相等，正确，不符合题意；
D. 在角的平分线上的任意一点到这个角的两边的距离相等，正确，不符合题意；

故选：B.

5. 在下列各组数中，是勾股数组的是 ()

- A. 1、2、3 B. 6^2 、 8^2 、 10^2 C. 5、6、4 D. 7、24、25

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了勾股数的定义，勾股定理，理解勾股数的定义是解题的关键。判断是否为勾股数，必须根据勾股数是正整数，同时还需验证两小边的平方和是否等于最长边的平方。

【详解】解：A. $\because 1^2 + 2^2 \neq 3^2$ ，不能构成三角形，不是勾股数，不符合题意；

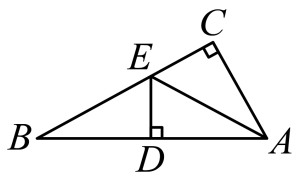
B. $\because (6^2)^2 + (8^2)^2 \neq (10^2)^2$ ，不能构成直角三角形，不是勾股数，不符合题意；

C. $\because 4^2 + 5^2 \neq 6^2$ ，不能构成直角三角形，不是勾股数，不符合题意；

D. $\because 7^2 + 24^2 = 25^2$ ，能构成直角三角形，是正整数，是勾股数，符合题意；

故选：D.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，边 AB 的垂直平分线交 AB 于点 D ，交 BC 于点 E ，且 AE 平分 $\angle BAC$ ，那么下列结论不正确的是（ ）



A. $\angle B = \angle CAE$

B. $\angle DAE = 30^\circ$

C. $BE = 2EC$

D. $AC = 2EC$

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意，证明 $\angle B = \angle EAB = \angle EAC = 30^\circ$ ，然后判断解答即可。

本题考查了线段垂直平分线的性质，等腰三角形的判定和性质，三角形内角和定理，直角三角形的性质，熟练掌握判定和性质是解题的关键。

【详解】解： $\because \angle C = 90^\circ$ ，边 AB 的垂直平分线交 AB 于点 D ，交 BC 于点 E ，且 AE 平分 $\angle BAC$ ，

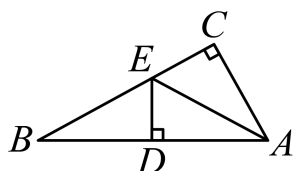
$ED \perp AB, EC \perp AC$

$\therefore EB = EA$ ，且 $\angle EAC = \angle EAB = \frac{1}{2} \angle BAC$ ，

$\therefore ED = EC$ ， $\angle EBA = \angle EAB$ ，

$\therefore \angle B = \angle EAB = \angle EAC$ ，

$\because \angle C = 90^\circ$ ，



$$\therefore \angle B + \angle EAB + \angle EAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle EAB = \angle EAC = 30^\circ,$$

$$\therefore BE = 2ED = 2EC, \quad AE = 2ED = 2EC,$$

A. $\angle B = \angle CAE$ ，正确，不符合题意；

B. $\angle DAE = 30^\circ$ ，正确，不符合题意；

C. $BE = 2EC$ ，正确，不符合题意；

D. $AC = 2EC$ ，错误，符合题意；

故选：D.

二、填空题

7. 分母有理化： $\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{3}+1$

【解析】

【分析】本题考查分母有理化（把分母中的根号化去的过程称为分母有理化），把分子分母同乘以 $(\sqrt{3}+1)$ ，然后利用平方差公式计算即可。解题的关键是根据分母有理化的意义找到分母有理化的因式。

【详解】解：
$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1.$$

故答案为： $\sqrt{3}+1$.

8. 函数 $y = \sqrt{2-x}$ 的定义域为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x \leq 2$.

【解析】

【分析】 $y = \sqrt{2-x}$ 有意义，可得 $2-x \geq 0$ ，解不等式即可得到所求定义域。

【详解】解： $y = \sqrt{2-x}$ 有意义，

可得 $2-x \geq 0$,

解得 $x \leq 2$.

故答案为 $x \leq 2$.

【点睛】 本题考查求函数的定义域的问题，解题时应根据函数的解析式，列出使解析式有意义的不等式，从而求出定义域来.

9. 不等式 $1 - \sqrt{3}x \geq 0$ 的解集是_____.

【答案】 $x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 此题主要考查二次根式分母有理化，解一元一次不等式，正确理解不等式性质是解题关键. 直接根据解一元一次不等式的步骤：移项、合并同类项、化系数化为 1 进行即可.

【详解】 解： $1 - \sqrt{3}x \geq 0$,

$$\therefore \sqrt{3}x \leq 1,$$

$$\therefore x \leq \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore x \leq \frac{\sqrt{3}}{3},$$

故答案为： $x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

10. 某校八年级举行足球比赛，每个班级都要和其他班级比赛一次，结果一共进行了 15 场比赛，设八年级共有 x 个班级，那么列出方程是_____.

【答案】 $\frac{1}{2}x(x-1) = 15$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用，熟练掌握列方程的基本要领是解题的关键. 设有 x 个班级参赛，每两班之间赛一场，总比赛场数为所有可能的组合数. 每个班需与其他 $(x-1)$ 个班比赛，但每场比赛被计算了两次，因此总场数为 $\frac{1}{2}x(x-1)$ ，根据总场数为 15，列出方程即可.

【详解】 解： 设共有 x 个班参赛，根据题意，得 $\frac{1}{2}x(x-1) = 15$,

故答案为： $\frac{1}{2}x(x-1) = 15$.

11. 在实数范围内分解因式 $x^2 + 2x - 1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})$

【解析】

【分析】 将原式变形为 $(x+1)^2 - 2$ ，再利用平方差公式分解即可得到答案.

【详解】 解：原式 $= x^2 + 2x + 1 - 2$

$$= (x+1)^2 - 2$$

$$= (x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2}),$$

故答案为 $(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})$.

【点睛】 本题考查了实数范围内分解因式，解题的关键是熟练掌握完全平方公式和平方差公式.

12. 已知 $x = -1$ 是关于 x 的方程 $2x^2 - mx - m^2 = 0$ 的一个根，那么 m 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 2 或 -1

【解析】

【分析】 把 $x = -1$ 代入 $2x^2 - mx - m^2 = 0$ ，转化为 m 的方程求解即可.

本题考查了解一元二次方程，方程根的定义：使方程左右两边相等的未知数的值，转化求解是解题的关键.

【详解】 解：把 $x = -1$ 代入 $2x^2 - mx - m^2 = 0$ ，

$$\text{得 } 2 + m - m^2 = 0,$$

$$\text{解得 } m = 2 \text{ 或 } m = -1,$$

故答案为：2 或 -1.

13. 已知反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 的图像在第二、四象限，那么 k 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $k < 1$

【解析】

【分析】 反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 的图像在第二、四象限，得到 $k-1 < 0$ ，解答即可.

本题考查了图像分布与比例系数 k 的关系，熟练掌握这个关系是解题的关键.

【详解】 解：根据题意，得 $k-1 < 0$ ，

$$\text{解得 } k < 1,$$

故答案为: $k < 1$.

14. 写出命题“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”的逆命题是_____.

【答案】“一边上的中线等于这边的一半的三角形是直角三角形”

【解析】

【分析】将题设与结论对调即可得到答案;

【详解】解: 由题意可得,

逆命题为: “一边上的中线等于这边的一半的三角形是直角三角形”,

故答案为: “一边上的中线等于这边的一半的三角形是直角三角形”;

【点睛】本题考查逆命题的定义: 将题设与结论对调得到的命题叫逆命题.

15. 到点 A 的距离等于 2 厘米的点的轨迹是_____.

【答案】以点 A 为圆心, 2 厘米长为半径的圆

【解析】

【分析】本题考查了轨迹, 主要是对圆的轨迹定义的考查, 比较简单. 根据圆的定义解答.

【详解】解: 到点 A 的距离等于 2 厘米的点的轨迹是: 以点 A 为圆心, 2 厘米长为半径的圆.

故答案为: 以点 A 为圆心, 2 厘米长为半径的圆.

16. 已知直角三角形的两条直角边的长分别为 4 和 5, 那么斜边的长为_____.

【答案】 $\sqrt{41}$

【解析】

【分析】本题主要考查了勾股定理, 直角三角形中, 两直角边的长的平方和等于斜边长的平方, 据此求解即可.

【详解】解: 由题意得, 斜边长为 $\sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$,

故答案为: $\sqrt{41}$.

17. 已知直角坐标平面内的点 $A(1, 2)$ 、点 $B(-1, 0)$, 点 C 在 x 轴上. 如果 ABC 是等腰三角形, 那么点 C 的坐标为_____.

【答案】 $C_1(-1-2\sqrt{2}, 0)$ 或 $C(-1+2\sqrt{2}, 0)$ 或 $C_3(1, 0)$ 或 $C_2(3, 0)$

【解析】

【分析】利用等腰三角形的定义, 分类计算即可.

本题考查了等腰三角形的分类计算, 勾股定理, 线段垂直平分线的性质, 两点间的距离公式, 平移, 熟练

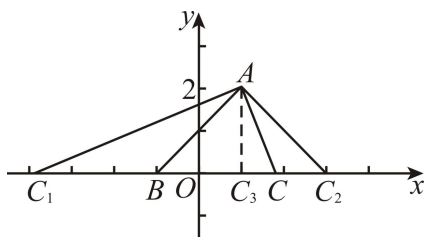
掌握平移，分类计算是解题的关键.

【详解】解： $\because A(1,2), B(-1,0)$,

$$\therefore AB = \sqrt{(1+1)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

以 B 为圆心，以 BA 为半径画弧，交 x 轴于点 C, C_1 ,

则 $C_1(-1-2\sqrt{2}, 0), C(-1+2\sqrt{2}, 0)$;



过点 A 作 $AC_3 \perp x$ 轴于点 C_3 , 此时 $AC_3 = 2, C_3B = 1 - (-1) = 2$,

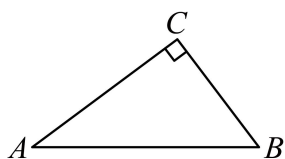
故 $AC_3 = C_3B$, 也是符合题意的, 此时 $C_3(1, 0)$;

以 A 为圆心, 以 AB 为半径画弧, 交 x 轴于点 C_2 , 此时 B, C_2 关于 AC_3 对称,

则 $C_2(3, 0)$;

综上所述, 存在点 C , 且分别为 $C_1(-1-2\sqrt{2}, 0)$ 或 $C(-1+2\sqrt{2}, 0)$ 或 $C_3(1, 0)$ 或 $C_2(3, 0)$.

18. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4\text{cm}$, $BC = 3\text{cm}$, 现将 $\triangle ABC$ 翻折, 使点 A 和点 B 重合, 折痕分别交 AC 、 AB 于点 D 、 E , 那么 $AD =$ _____ cm .



【答案】 $\frac{25}{8}$

【解析】

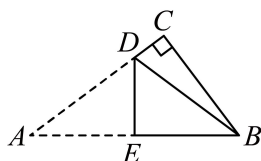
【分析】 设 $AD = BD = x$, 则 $CD = AC - AD = 4 - x$, 根据勾股定理, 得 $x^2 = (4 - x)^2 + 9$, 解答即可.

本题考查了勾股定理, 折叠的性质, 解方程, 熟练掌握定理和折叠的性质是解题的关键.

【详解】 解: 根据折叠的性质, 得 $AD = BD$, 设 $AD = BD = x$,

则 $CD = AC - AD = 4 - x$,

根据勾股定理, 得 $x^2 = (4 - x)^2 + 9$,



解得 $x = \frac{25}{8}$,

故答案为: $\frac{25}{8}$.

三、简答题

19. 计算: $\sqrt{12} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} - \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{27}}$.

【答案】 $3\sqrt{3} + \frac{5}{3}$

【解析】

【分析】根据二次根式的性质化简, 分母有理化, 二次根式的乘法计算即可. 本题考查了二次根式的性质, 分母有理化, 二次根式的乘法, 熟练掌握运算法则是解题的关键.

【详解】解: $\sqrt{12} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} - \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{27}}$
 $= 2\sqrt{3} + \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} - \sqrt{3} \times \frac{1}{3\sqrt{3}}$
 $= 2\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} - \frac{1}{3}$
 $= 3\sqrt{3} + \frac{5}{3}.$

20. 解方程: $x(x-4) = 5$.

【答案】 $x_1 = -1, x_2 = 5$

【解析】

【分析】本题主要考查了解一元二次方程, 整理后根据因式分解法求解即可.

【详解】解: $x(x-4) = 5$,

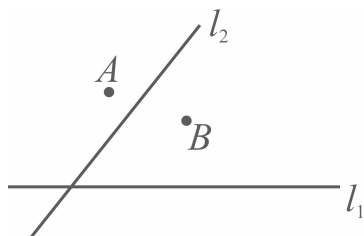
整理为 $x^2 - 4x - 5 = 0$,

则 $(x+1)(x-5) = 0$,

$\therefore x+1=0$ 或 $x-5=0$,

解得: $x_1 = -1, x_2 = 5$.

21. 有公路 l_1 同侧、 l_2 异侧的两个城镇 A, B, 如下图. 电信部门要修建一座信号发射塔, 按照设计要求, 发射塔到两个城镇 A, B 的距离必须相等, 到两条公路 l_1, l_2 的距离也必须相等, 发射塔 C 应修建在什么位置? 请用尺规作图找出所有符合条件的点, 注明点 C 的位置. (保留作图痕迹, 不要求写出画法)



【答案】答案作图见解析

【解析】

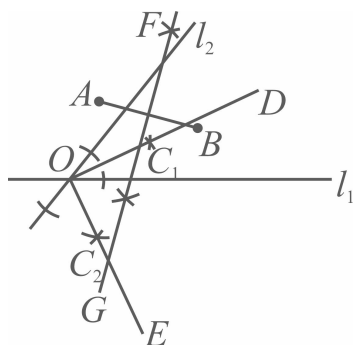
【分析】根据题意知道, 点 C 应满足两个条件, 一是在线段 AB 的垂直平分线上; 二是在两条公路夹角的平分线上, 所以点 C 应是它们的交点.

【详解】解: 连接 A, B 两点, 作 AB 的垂直平分线, 作两直线交角的角平分线, 交点有两个.

(1) 作两条公路夹角的平分线 OD 或 OE;

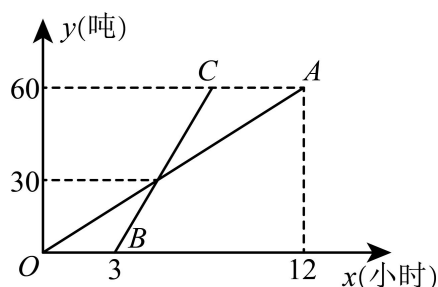
(2) 作线段 AB 的垂直平分线 FG;

则射线 OD, OE 与直线 FG 的交点 C_1, C_2 就是所求的位置.



考点: 作图-应用与设计作图

22. 甲乙两种机器人根据电脑程序工作时各自工作量 y (吨) 关于工作时间 x (小时) 的函数图像如图所示, 线段 OA 表示甲机器人的工作量 y_1 (吨) 关于工作时间 x (小时) 的函数图像; 线段 BC 表示乙机器人的工作量 y_2 (吨) 关于工作时间 x (小时) 的函数图像. 根据图像信息回答下列问题.



- (1) 甲种机器人比乙种机器人早开始工作_____小时；
 (2) 甲种机器人每小时工作量是_____吨；
 (3) 直线 OA 的表达式为_____；
 (4) 如果乙种机器人工作了 5 小时，那么它完成的工作量是_____吨.

【答案】 (1) 3 (2) 5

(3) $y_1 = 5x$

(4) 50

【解析】

【分析】 (1) 根据 $B(3,0)$ ，判定甲种机器人比乙种机器人早开始工作 3 小时；

(2) 甲种机器人每小时工作量是 $\frac{60}{12} = 5$ 吨/小时；

(3) 设直线 OA 的表达式为 $y = kx$ ，把 $(12, 60)$ 代入解析式解答即可；

(4) 根据题意，得 $30 = 5x$ ，解得 $x = 6$ ，于是得到工作量相等时位置 $(6, 30)$ ，设直线 BC 的解析式

$$y = kx + b, \text{ 把 } (3,0) \text{ 和 } (6, 30) \text{ 分别代入解析式, 得 } \begin{cases} 6k + b = 30 \\ 3k + b = 0 \end{cases}, \text{ 解答即可.}$$

本题考查了一次函数的应用，准确识别函数图象，熟练掌握待定系数法是解题的关键.

【小问 1 详解】

解：根据 $B(3,0)$ ，得甲种机器人比乙种机器人早开始工作 3 小时，

故答案为：3.

【小问 2 详解】

解：甲种机器人每小时工作量是 $\frac{60}{12} = 5$ 吨，

故答案为：5.

【小问 3 详解】

解：设直线 OA 的表达式为 $y = kx$ ，把 $(12, 60)$ 代入解析式，得

$$12k = 60,$$

解得 $k = 5$ ，

故 $y = 5x$ ，

故答案为： $y_1 = 5x$ 。

【小问 4 详解】

解：根据题意，得 $30 = 5x$ ，

解得 $x = 6$ ，于是得到工作量相等时位置 $(6, 30)$ ，

设直线 BC 的解析式 $y = kx + b$ ，

把 $(3, 0)$ 和 $(6, 30)$ 分别代入解析式，得
$$\begin{cases} 6k + b = 30 \\ 3k + b = 0 \end{cases}$$
，

解得
$$\begin{cases} k = 10 \\ b = -30 \end{cases}$$
，

故直线 BC 的解析式 $y = 10x - 30$ ，

当 $y = 60$ 时， $60 = 10x - 30$ ，

解得 $x = 9$ ，

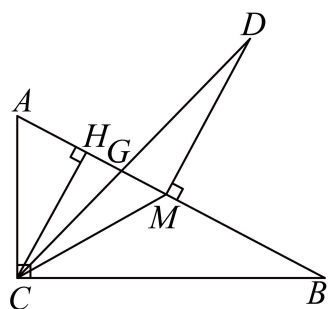
故乙机器人的工作效率为 $\frac{60}{9-3} = 10$ (吨/小时)。

故 5 小时的工作量为 $5 \times 10 = 50$ (吨)，

故答案为：50。

四、解答题

23. 已知：如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CH 是 AB 边上的高， CM 是 AB 边上的中线， CG 是 $\angle ACB$ 的平分线，与 AB 的垂直平分线相交于点 D 。求证：



(1) CG 平分 $\angle HCM$;

(2) $CM = DM$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据题意, 得 $\angle ACG = \angle BCG = \frac{1}{2}\angle ACB$, 只需证明 $\angle ACH = \angle BCM$ 即可证明 CG 平分 $\angle HCM$;

(2) 根据 $CH \parallel DM$, 得 $\angle HCG = \angle D$, 结合 $\angle HCG = \angle MCG$, 得到 $\angle D = \angle MCG$ 即可得证.

本题考查了直角三角形中线的性质, 余角的性质, 等腰三角形的判定和性质, 平行线的判定和性质, 等量代换, 熟练掌握判定和性质是解题的关键.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle ACB = 90^\circ$, CH 是 AB 边上的高,

$$\therefore \angle ACB = \angle AHC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACH = 90^\circ - \angle A = \angle B,$$

$\because CM$ 是 AB 边上的中线,

$$\therefore CM = AM = MB,$$

$$\therefore \angle B = \angle BCM,$$

$$\therefore \angle ACH = \angle BCM,$$

$\because CG$ 是 $\angle ACB$ 的平分线,

$$\therefore \angle ACG = \angle BCG = \frac{1}{2}\angle ACB,$$

$$\therefore \angle ACG - \angle ACH = \angle BCG - \angle BCM,$$

$$\therefore \angle HCG = \angle MCG,$$

$\therefore CG$ 平分 $\angle HCM$.

【小问 2 详解】

证明: $\because CH$ 是 AB 边上的高,

$$\therefore CH \perp AB,$$

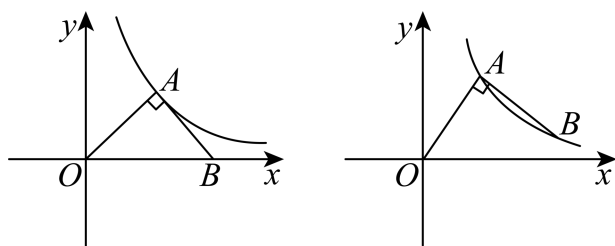
$\because CG$ 是 $\angle ACB$ 的平分线, 与 AB 的垂直平分线相交于点 D ,

$$\therefore DM \perp AB,$$

$$\therefore CH \parallel DM,$$

$$\begin{aligned}\therefore \angle HCG &= \angle D, \\ \therefore \angle HCG &= \angle MCG, \\ \therefore \angle D &= \angle MCG, \\ \therefore CM &= DM.\end{aligned}$$

24. 已知在平面直角坐标中，点 $A(m, n)$ 在第一象限内， $AB \perp OA$ 且 $AB = OA$ ，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像经过点 A，



- (1) 当点 B 的坐标为 $(6, 0)$ 时 (如图)，求这个反比例函数的解析式；
- (2) 当点 B 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像上，且在点 A 的右侧时 (如图 2)，用含字母 m, n 的代数式表示点 B 的坐标；
- (3) 在第 (2) 小题的条件下，求 $\frac{m}{n}$ 的值.

【答案】 (1) $y = \frac{9}{x}$ (2) $B(m+n, n-m)$ (3) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 过 A 作 $AC \perp OB$ ，根据三角形 AOB 为等腰直角三角形，得到 $AC=OC=BC=\frac{1}{2}OB$ ，确定出 A 坐标，代入反比例解析式求出 k 的值，即可确定出反比例解析式；

(2) 过 A 作 $AE \perp x$ 轴，过 B 作 $BD \perp AE$ ，利用同角的余角相等得到一对角相等，再由一对直角相等，且 $AO=AB$ ，利用 AAS 得出三角形 AOE 与三角形 ABD 全等，由确定三角形的对应边相等得到 $BD=AE=n$ ， $AD=OE=m$ ，进而表示出 ED 及 OE+BD 的长，即可表示出 B 坐标；

(3) 由 A 与 B 都在反比例图像上，得到 A 与 B 横纵坐标乘积相等，列出关系式，变形后即可求出 $\frac{m}{n}$ 的值.

【详解】 解： (1) 如图 1，过 A 作 $AC \perp OB$ ，交 x 轴于点 C，

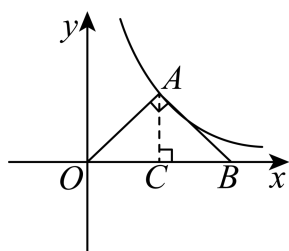


图1

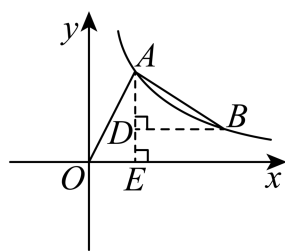


图2

$$\because OA=AB, \angle OAB=90^\circ,$$

$\therefore \triangle AOB$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore AC=OC=BC=\frac{1}{2}OB=3,$$

$$\therefore A(3, 3),$$

将 $x=3, y=3$ 代入反比例解析式得: $3=\frac{k}{3}$, 即 $k=9$,

则反比例解析式为 $y=\frac{9}{x}$;

(2) 如图 2, 过 A 作 $AE \perp x$ 轴, 过 B 作 $BD \perp AE$,

$$\because \angle OAB=90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAE + \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\because \angle AOE + \angle OAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle AOE,$$

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle BAD$ 中,

$$\begin{cases} \angle AOE = \angle BAD \\ \angle AEO = \angle BDA = 90^\circ \\ AO = BA \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle BAD \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AE=BD=n, OE=AD=m,$$

$$\therefore DE=AE-AD=n-m, OE+BD=m+n,$$

则 $B(m+n, n-m)$;

(3) 由 A 与 B 都在反比例图象上, 得到 $mn = (m+n)(n-m)$,

整理得: $n^2 - m^2 = mn$, 即 $\left(\frac{n}{m}\right)^2 + \frac{m}{n} - 1 = 0$,

这里 $a=1, b=1, c=-1$,

$$\therefore \Delta = 1 + 4 = 5,$$

$$\therefore \frac{m}{n} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

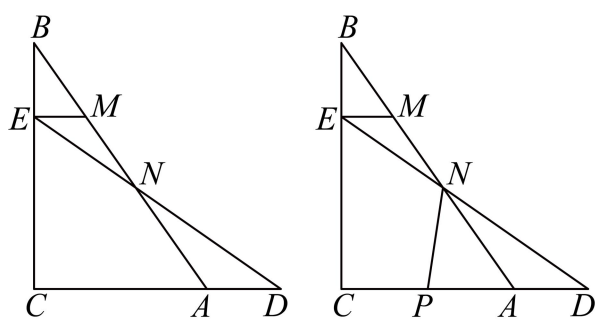
$\because A(m, n)$ 在第一象限,

$\therefore m > 0, n > 0,$

$$\text{则 } \frac{m}{n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

【点睛】本题属于反比例函数综合题，涉及的知识有：全等三角形的判定与性质，坐标与图形性质，等腰直角三角形的性质，以及一元二次方程的解法，熟练掌握反比例函数的性质是解本题的关键。

25. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = BC = 2$ ，点 D 在边 CA 的延长线上，点 E 在边 BC 上（不与点 C 重合），且 $BE = AD$ ，连接 DE ，交边 AB 于点 N ，过点 E 作 $EM \parallel CA$ ，交边 AB 于点 M 。



(1) 求证： $EN = DN$ ；

(2) 如图，过点 N 作 $NP \perp DE$ ，交边 AC 于点 P ，设 $BE = x$ ， $PC = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出该函数的定义域；

(3) 当在 (2) 的条件下，当 $CP = PN$ 时，求 x 的值。

【答案】(1) 见解析 (2) $y = \frac{4x}{x+2} (0 < x < 2)$

(3) $4 - 2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 根据平行线性质，得到等角，根据等腰直角三角形的性质，得到等边，最后利用三角形全等的判定和性质可证 $EN = DN$ ；

(2) 设 $BE = x$ ， $PC = y$ ，则 $EC = BC - BE = 2 - x$ ， $PA = AC - PC = 2 - y$ ，根据 $BE = EM = AD = x$ ，得 $EP = PD = 2 - y + x$ ，利用勾股定理解答即可；

(3) 根据题意，得 EP 平分 $\angle CED$ ，证明 $\angle CEP = \angle EDP = \angle DEP = 30^\circ$ ，后根据直角三角形的性质，勾股定理解答即可。

本题考查了等腰直角三角形的性质，平行线的判定和性质，三角形全等的判定和性质，等腰三角形的判定和性质，角的平分线的判定，线段的垂直平分线的判定和性质，勾股定理，熟练掌握判定和性质，勾股定理是解题的关键.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle C = 90^\circ$, $AC = BC = 2$,

$$\therefore \angle B = \angle CAB = 45^\circ$$

$$\because EM \parallel CA,$$

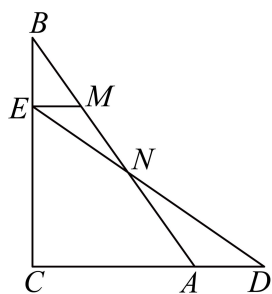
$$\therefore \angle B = \angle CAB = \angle BME = 45^\circ, \quad \angle BEM = \angle C = 90^\circ,$$

$$\angle MEN = \angle ADN, \angle EMN = \angle DAN,$$

$$\therefore BE = EM,$$

$$\because BE = AD,$$

$$\therefore ME = AD,$$



$$\therefore \begin{cases} \angle MEN = \angle ADN \\ \angle EMN = \angle DAN, \\ ME = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle NAD \cong \triangle NME (\text{AAS}),$$

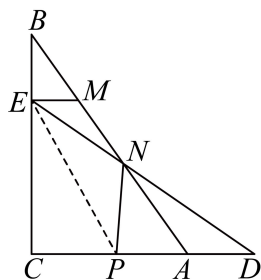
$$\therefore EN = DN.$$

【小问 2 详解】

解: 连接 EP ,

$$\because NP \perp DE, \quad EN = DN,$$

$$\therefore NP \text{ 垂直平分 } DE,$$



$$\therefore PD = PE,$$

设 $BE = x$, $PC = y$, 则 $EC = BC - BE = 2 - x$, $PA = AC - PC = 2 - y$,

$$\therefore BE = EM = AD = x,$$

$$\therefore EP = PD = 2 - y + x,$$

根据勾股定理, 得 $(2 - y + x)^2 = y^2 + (2 - x)^2$,

$$\text{整理, 得 } y = \frac{4x}{x+2} (0 < x < 2).$$

【小问 3 详解】

解: $\because CP = PN$, 且 $CP \perp EC$, $PN \perp EN$,

$\therefore EP$ 平分 $\angle CED$,

$$\therefore \angle CEP = \angle DEP,$$

$$\therefore PD = PE,$$

$$\therefore \angle EDP = \angle DEP,$$

$$\therefore \angle CEP = \angle EDP = \angle DEP,$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CEP + \angle EDP + \angle DEP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CEP = \angle EDP = \angle DEP = 30^\circ,$$

$$\therefore ED = 2EC,$$

$$\therefore CD = \sqrt{ED^2 - EC^2} = \sqrt{3}EC,$$

$$\therefore CD = CA + AD = 2 + x,$$

$$\therefore 2 + x = \sqrt{3}(2 - x)$$

$$\text{解得 } x = 4 - 2\sqrt{3}.$$