

上海市虹口实验中学 2024-2025 学年七年级上学期

数学 12 月月考试卷

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列代数式 $-\frac{a+b}{3}$, $\frac{m}{\pi}$, $2x^2y$, 3^{-5} , $(x-1)^{-2}$ 中, 单项式有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了单项式的判定, 掌握单项式的概念是关键.

数字与字母的积的代数式叫做单项式, 单独的一个数或一个字母也叫单项式, 由此即可求解.

【详解】 解: $-\frac{a+b}{3} = -\frac{a}{3} - \frac{b}{3}$ 不是单项式,

$\frac{m}{\pi}$ 是单项式,

$2x^2y$ 是单项式,

$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$ 是单项式,

$(x-1)^{-2} = \frac{1}{(x-1)^2}$ 不是单项式,

$\therefore$ 单项式有 3 个,

故选: C.

2. 对于分式 $\frac{3xy}{3x-y}$, 当 x 、 y 都扩大到原来的 3 倍时, 分式的值 ()

- A. 不变 B. 扩大到原来的 3 倍
C. 扩大到原来的 9 倍 D. 不能确定

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了分式的性质, 掌握分式的性质是关键.

根据题意, 扩大后的分式为 $\frac{3 \cdot (3x) \cdot (3y)}{3 \cdot (3x) - 3y} = \frac{27xy}{3(3x-y)} = 3 \cdot \frac{3xy}{3x-y}$, 由此即可求解.

【详解】解：分式 $\frac{3xy}{3x-y}$ ，当 x 、 y 都扩大到原来的 3 倍，

$$\therefore \text{扩大后的分式为} = \frac{3 \cdot (3x) \cdot (3y)}{3 \cdot (3x) - 3y} = \frac{27xy}{3(3x-y)} = 3 \cdot \frac{3xy}{3x-y},$$

$\therefore$ 扩大到原来的 3 倍，

故选：B.

3. 分式 $\frac{4y+3x}{4a}$ ， $\frac{x^2-1}{x^4-1}$ ， $\frac{x^2-xy+y^2}{x+y}$ ， $\frac{a^2+2ab}{ab-2b^2}$ ，中，最简分式有（ ）

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了分式的性质，约分的计算，掌握分式的性质是关键.

如果一个分式中没有可约的因式，则为最简分式，结合分式的性质即可求解.

【详解】解： $\frac{4y+3x}{4a}$ 是最简分式，

$$\frac{x^2-1}{x^4-1} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)(x^2-1)} = \frac{1}{x^2+1}, \text{ 原分式不是最简分式,}$$

$$\frac{x^2-xy+y^2}{x+y} \text{ 是最简分式,}$$

$$\frac{a^2+2ab}{ab-2b^2} \text{ 是最简分式,}$$

$\therefore$ 最简分式的有 3 个，

故选：C.

4. 已知 $a+b=3$ ， $ab=1$ ，下列计算中错误的是（ ）

A. $(a-b)^2=5$

B. $a^2+b^2=7$

C. $a^4+b^4=51$

D. $(x+a)(x+b)=x^2+3x+1$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查的是完全平方公式及多项式乘以多项式计算，牢记法则和公式是解题关键，根据法则和公式依次计算即可.

【详解】解：A、 $\because a+b=3, ab=1$,

$\therefore (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 3^2 - 4 \times 1 = 5$, 故此选项不符合题意;

B、 $\because a+b=3$,

$\therefore (a+b)^2 = 9$,

$\therefore a^2 + 2ab + b^2 = 9$,

$\because ab=1$,

$\therefore a^2 + b^2 = 9 - 2 \times 1 = 7$, 故此选项不符合题意;

C、 $\because a^2 + b^2 = 7$,

$\therefore (a^2 + b^2)^2 = 49$,

$\therefore a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = 49$,

$\because ab=1$,

$\therefore a^4 + b^4 = 49 - 2 \times 1^2 = 47 \neq 51$, 故此选项符合题意;

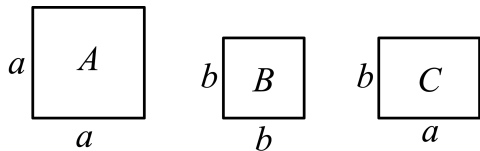
D、 $(x+a)(x+b) = x^2 + bx + ax + ab = x^2 + (a+b)x + ab$,

$\because a+b=3, ab=1$,

$\therefore (x+a)(x+b) = x^2 + 3x + 1$, 故此选项不符合题意;

故选：C.

5. 如图，正方形卡片A类，B类和长方形卡片C类若干张，如果要拼一个长为 $(3a+b)$ ，宽为 $(a+3b)$ 的大长方形，则需要C类卡片张数为（ ）



A. 6

B. 8

C. 10

D. 12

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了多项式乘法与图形面积的计算，掌握整式的混合运算法则是关键。根据题意，运用多项式乘以多项式得到长方形的面积，结合卡片的面积即可求解。

【详解】解：长为 $(3a+b)$ ，宽为 $(a+3b)$ 的大长方形，

$\therefore$ 大长方形的面积为 $(3a+b)(a+3b)=3a^2+10ab+3b^2$ ，

$\therefore$ A类卡片的面积为 a^2 ，B类卡片的面积为 b^2 ，C类卡片的面积为 ab ，

$\therefore$ 需要C类卡片张数为10，

故选：C.

6. 已知 $a-b=b-c=2$ ， $a^2+b^2+c^2=1$ ，则 $ab+bc+ac=$ ()

A. -22

B. -11

C. 7

D. 11

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了完全平方公式的应用. 根据题意可得 $a-c=4$ ，再由完全平方公式，可得

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]$ ，即可求解.

【详解】解： $\because a-b=b-c=2$ ，

$\therefore a-c=4$ ，

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$

$$= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac)$$

$$= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2]$$

$$= \frac{1}{2}(2^2 + 2^2 + 4^2)$$

$$= 12$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

$$\therefore ab + bc + ac = a^2 + b^2 + c^2 - 12 = -11.$$

故选 B.

二、填空题 (本大题共 16 空，每空 2 分，满分 32 分)

7. 若 $-2x^m y^4$ 与 $3x^4 y^n$ 是同类项，则 m^n 的值为_____.

【答案】256

【解析】

【分析】本题考查了同类项，代数式求值. 根据同类项的定义：所含字母相同，且相同字母的指数也相同的两个单项式是同类项，求出 m 和 n 的值，然后代数求解即可.

【详解】解： $\because -2x^m y^4$ 与 $3x^4 y^n$ 是同类项，

$$\therefore m = 4, \quad n = 4$$

$$\therefore m^n = 4^4 = 256.$$

故答案为：256.

8. 若 $2^n + 2^n + 2^n + 2^n = 2^{10}$ ，则 $n =$ _____.

【答案】8

【解析】

【分析】此题考查了同底数幂的乘法运算，解题的关键是掌握以上运算法则.

根据同底数幂的乘法得到 $2^{n+2} = 2^{10}$ ，然后得到 $n+2=10$ 求解即可.

【详解】解： $\because 2^n + 2^n + 2^n + 2^n = 2^{10}$ ，

$$\therefore 2^n \times 4 = 2^{10},$$

$$\therefore 2^{n+2} = 2^{10},$$

$$\therefore n+2=10,$$

解得： $n=8$ ，

故答案为：8.

9. 计算：(1) $(a^2)^{-3} \cdot (a^{-3})^{-2} =$ _____； (2) $(-2x-y)(y-2x) =$ _____.

【答案】 ①. 1 ②. $4x^2 - y^2$

【解析】

【分析】本题考查了负整数指数幂，幂的乘方，平方差公式的计算，掌握整式的混合运算是关键. 根据负整数指数幂，幂的乘方，平方差公式的计算法则求解即可.

【详解】解：(1) $(a^2)^{-3} \cdot (a^{-3})^{-2}$

$$= a^{-6} \cdot a^6$$

$$= 1;$$

$$(2) (-2x-y)(y-2x)$$

$$= -(y+2x)(y-2x)$$

$$= -(y^2 - 4x^2)$$

$$= 4x^2 - y^2.$$

故答案为：①1；② $4x^2 - y^2$.

10. 因式分解：(1) $a^3 - 9ab^2 =$ _____；(2) $x^2 - 5xy - 6y^2 =$ _____.

【答案】 ①. $a(a+3b)(a-3b)$ ②. $(x+y)(x-6y)$

【解析】

【分析】此题考查了因式分解的方法，解题的关键是熟练掌握因式分解的方法：提公因式法，平方差公式法，完全平方公式法，十字相乘法等.

(1) 先提公因式，然后利用平方差公式因式分解即可；

(2) 利用十字相乘法分解因式即可.

【详解】(1) $a^3 - 9ab^2$

$$= a(a^2 - 9b^2)$$

$$= a(a+3b)(a-3b)$$

故答案为： $a(a+3b)(a-3b)$ ；

$$(2) x^2 - 5xy - 6y^2$$

$$= (x+y)(x-6y)$$

故答案为： $(x+y)(x-6y)$.

11. 分式 $\frac{x-2}{(x+1)^2}$ 的值为负数，求 x 的取值范围_____.

【答案】 $x < 2$ 且 $x \neq -1$

【解析】

【分析】本题考查分式值的正负条件. 解不等式时当未知数的系数是负数时，两边同除以未知数的系数需改变不等号的方向，当未知数的系数是正数时，两边同除以未知数的系数不需改变不等号的方向.

根据题意，因为任何实数的平方都是非负数，分母不能为 0，所以分母必是正数，分子的值是负数则可，从而列出不等式求解即可.

【详解】解： $\because$ 分式若有意义，分母不能为 0，

$$\therefore (x+1)^2 \neq 0,$$

$$\therefore x+1 \neq 0$$

$$\therefore x \neq -1$$

$$\because \text{分式 } \frac{x-2}{(x+1)^2} \text{ 的值为负数,}$$

$$\therefore x-2 < 0,$$

$$\text{解得: } x < 2 \text{ 且 } x \neq -1,$$

$$\text{故答案为: } x < 2 \text{ 且 } x \neq -1.$$

$$12. \text{ 已知 } (2x-3)^{x+3} - 1 = 0, \text{ 则 } x = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 -3 或 2 或 1

【解析】

【分析】 本题考查零指数幂的性质以及有理数的乘方运算等知识，运用了分类讨论的思想，利用零指数幂，负1的偶数次幂等于1是解题的关键。零指数幂是指任何一个不等于零的数的零次幂都等于1。直接利用零指数幂的性质以及-1的偶数次幂等于1分别化简求出答案。

$$\text{【详解】解: } \because (2x-3)^{x+3} - 1 = 0,$$

$$\therefore (2x-3)^{x+3} = 1,$$

$$\therefore \text{当 } x+3=0 \text{ 且 } 2x-3 \neq 0 \text{ 时, 解得: } x = -3$$

$$\text{当 } 2x-3=1 \text{ 时, 解得: } x = 2,$$

$$\text{当 } 2x-3=-1 \text{ 且 } x+3 \text{ 为偶数时, 解得: } x = 1,$$

$$\therefore x \text{ 的值为 } -3 \text{ 或 } 2 \text{ 或 } 1.$$

$$\text{故答案为: } -3 \text{ 或 } 2 \text{ 或 } 1.$$

$$13. \text{ 将分式 } \frac{3a^{-1}b^2}{2x^{-2}y^{-3}} \text{ 表示成只含有正整数指数幂的形式 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{【答案】 } \frac{3b^2x^2y^3}{2a}$$

【解析】

【分析】 本题考查了分式的性质，负指数幂的计算，掌握分式的性质，负指数幂的计算方法是关键。根据分式的性质，负指数幂的计算方法求解即可。

【详解】解: $\frac{3a^{-1}b^2}{2x^{-2}y^{-3}}$

$$= \frac{3 \cdot \frac{1}{a} b^2}{2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{y^3}}$$

$$= \frac{\frac{3b^2}{a}}{\frac{2}{x^2 y^3}}$$

$$= \frac{3b^2}{a} \cdot \frac{x^2 y^3}{2}$$

$$= \frac{3b^2 x^2 y^3}{2a},$$

故答案为: $\frac{3b^2 x^2 y^3}{2a}$.

14. 将分式 $-\frac{x}{4a^2(a^2+b^2)}$ 表示成不含分母的形式_____.

【答案】 $-x \cdot 2^{-2} a^{-2} (a^2 + b^2)^{-1}$

【解析】

【分析】 本题考查了分式的性质，负指数幂的计算，掌握负指数幂的计算方法是关键.

根据负指数幂的计算方法 “ $\frac{1}{a^p} = a^{-p}$ ” 求解即可.

【详解】解: $-\frac{x}{4a^2(a^2+b^2)} = -x \cdot 2^{-2} a^{-2} (a^2 + b^2)^{-1}$,

故答案为: $-x \cdot 2^{-2} a^{-2} (a^2 + b^2)^{-1}$.

15. 已知 $x + \frac{1}{x} = 4$, 则 $\frac{x^2}{x^4 - 5x^2 + 1} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{9}$

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式的变形计算，分式的化简求值，掌握分式的性质化简是关键.

根据题意，得到 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$ ，将所求分式化简得 $\frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 5}$ ，代入计算即可。

【详解】解： $\because x + \frac{1}{x} = 4$ ，

$$\therefore x \neq 0, \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 16,$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = 14,$$

$$\therefore \frac{x^2}{x^4 - 5x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 5},$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{14 - 5} = \frac{1}{9},$$

故答案为： $\frac{1}{9}$ 。

16. 如果关于 x 的整式 $4x^2 + 12x + (2m-1)^2$ 是完全平方式，那么 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 2 或 -1。

【解析】

【分析】 本题考查完全平方式，熟练掌握完全平方式的结构特征是解题的关键。根据完全平方式等于两数的平方和，再加上或减去它们积的 2 倍，可得答案。

【详解】解： $\because 4x^2 + 12x + (2m-1)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + (2m-1)^2$

$$\therefore 2m-1 = \pm 3$$

解得 $m = 2$ 或 $m = -1$ 。

故答案为： 2 或 -1。

17. 已知关于 x 的整式 $x^2 + mx + n$ 与 $x^2 - 2x + 3$ 的积不含二次项和三次项，则 $m + n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题主要考查多项式乘多项式，多项式的项、次数的定义以及代数式求值，解题的关键是熟练掌握运算法则正确进行计算。先运用多项式乘多项式的运算法则进行运算并整理，再令二次项和三次项的系数分别为 0 即可求解。

【详解】解： $(x^2 + mx + n)(x^2 - 2x + 3)$

$$= x^4 - 2x^3 + 3x^2 + mx^3 - 2mx^2 + 3mx + nx^2 - 2nx + 3n$$

$$= x^4 + (m-2)x^3 + (3-2m+n)x^2 + (3m-2n)x + 3n,$$

∵ 关于 x 的多项式 $x^2 + mx + n$ 与 $x^2 - 2x + 3$ 的积不含二次项和三次项,

$$\therefore m-2=0, \quad 3-2m+n=0,$$

解得 $m=2, \quad n=1,$

$$\therefore m+n=2+1=3.$$

故答案为: 3.

18. 如果 $(2x^2 + 2y^2 + 1)(3x^2 + 3y^2 - 1) = 1$, 那么 $x^2 + y^2 =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$ ##0.5

【解析】

【分析】此题考查了换元法和因式分解法解一元二次方程, 解题的关键是掌握以上运算法则. 令 $x^2 + y^2 = m$, 则原方程可化为 $(2m+1)(3m-1) = 1$, 然后展开利用因式分解法求解即可.

【详解】解: 令 $x^2 + y^2 = m$,

则原方程可化为 $(2m+1)(3m-1) = 1$,

整理得, $6m^2 + m - 2 = 0$,

$$(2m-1)(3m+2) = 0$$

$$2m-1=0 \text{ 或 } 3m+2=0$$

$$\text{解得 } m = \frac{1}{2} \text{ 或 } m = -\frac{2}{3},$$

$$\therefore x^2 + y^2 = m = \frac{1}{2} \text{ 或 } x^2 + y^2 = m = -\frac{2}{3} < 0 \text{ (无意义, 舍去),}$$

故答案为: $\frac{1}{2}$.

19. 已知 $abc=1$, 则 $\frac{5a}{ab+a+1} + \frac{5b}{bc+b+1} + \frac{5c}{ac+c+1} =$ _____.

【答案】 5

【解析】

【分析】本题考查了分式的化简求值, 关键是条件 $abc=1$ 的灵活运用. 由 $abc=1$, 代入所求分式进行化简即可得出答案.

【详解】解: $\because abc=1$,

$$\begin{aligned}
& \therefore \frac{5a}{ab+a+1} + \frac{5b}{bc+b+1} + \frac{5c}{ac+c+1} \\
&= \frac{5a}{ab+a+1} + \frac{5b \times a}{(bc+b+1) \times a} + \frac{5c \times ab}{(ac+c+1) \times ab} \\
&= \frac{5a}{ab+a+1} + \frac{5ab}{abc+ab+a} + \frac{5abc}{a^2bc+abc+ab} \\
&= \frac{5a}{ab+a+1} + \frac{5ab}{1+ab+a} + \frac{5}{a+1+ab} \\
&= \frac{5a+5ab+5}{ab+a+1} \\
&= 5.
\end{aligned}$$

故答案为：5.

20. 如果一个分式的分子或分母可以因式分解，且这个分式不可约分，那么我们称这个分式为“友好分式”.

例如分式 $\frac{x-2y}{x^2-y^2}$ 是友好分式. 若 a 为整数，且关于 x 的分式 $\frac{x-3}{x^2+ax+9}$ 是“友好分式”，则 a 的值为_____.

【答案】 6 或 ± 10

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式的约分，因式分解，读懂题意是关键. 根据题意对分母分解因式，从而可以求出相对应的 a 的值.

【详解】 解：由题意可得 x^2+ax+9 可以分解因式，且 a 为整数，

$$\therefore x^2+ax+9 = x^2 \pm 6x+9, \text{ 或 } x^2+ax+9 = x^2 \pm 10x+9,$$

$$\therefore a = \pm 6$$

$$\text{当 } a=6 \text{ 时, } \frac{x-3}{x^2+ax+9} = \frac{x-3}{x^2+6x+9} = \frac{x-3}{(x+3)^2}, \text{ 符合题意;}$$

$$\text{当 } a=-6 \text{ 时, } \frac{x-3}{x^2+ax+9} = \frac{x-3}{x^2-6x+9} = \frac{x-3}{(x-3)^2} = \frac{1}{x-3}, \text{ 可以约分, 不符合题意;}$$

$$\text{当 } a=10 \text{ 时, } \frac{x-3}{x^2+ax+9} = \frac{x-3}{x^2+10x+9} = \frac{x-3}{(x+1)(x+9)}, \text{ 不可以约分, 符合题意;}$$

$$\text{当 } a=-10 \text{ 时, } \frac{x-3}{x^2+ax+9} = \frac{x-3}{x^2-10x+9} = \frac{x-3}{(x-1)(x-9)}, \text{ 不可以约分, 符合题意;}$$

由以上可得： a 的值是 6 或 ± 10 .

故答案为：6 或 ± 10 .

三、简答题（本大题共 6 题，每题 5 分，满分 30 分）

21. 计算： $\left[\frac{8}{3}ab\left(-\frac{1}{2}a\right)^2 + (a^2b)^2 \div 3ab \right] \div (-2a)^3$.

【答案】 $-\frac{1}{8}b$

【解析】

【分析】 本题主要考查整式的混合运算，掌握整式的混合运算法则是关键.

根据整式的混合运算法则计算即可.

【详解】 解： $\left[\frac{8}{3}ab\left(-\frac{1}{2}a\right)^2 + (a^2b)^2 \div 3ab \right] \div (-2a)^3$

$$= \left(\frac{8}{3}ab \cdot \frac{1}{4}a^2 + a^4b^2 \div 3ab \right) \div (-8a^3)$$
$$= \left(\frac{2}{3}a^3b + \frac{1}{3}a^3b \right) \div (-8a^3)$$
$$= a^3b \div (-8a^3)$$
$$= -\frac{1}{8}b.$$

22. 计算： $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{6x} - \frac{1}{3x}$

【答案】 $\frac{4}{3x}$

【解析】

【分析】 本题主要考查分式的性质，分式的混合运算，掌握异分母分式的加减混合运算法则是关键.

根据异分母分式的混合运算法则计算即可求解.

【详解】 解： $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{6x} - \frac{1}{3x}$

$$= \frac{6}{6x} + \frac{3}{6x} + \frac{1}{6x} - \frac{2}{6x}$$
$$= \frac{6+3+1-2}{6x}$$
$$= \frac{4}{3x}.$$

23. 计算： $\frac{5x}{x^2+x-6} + \frac{6}{x^2-x-2} + \frac{4}{x^2+4x+3}$.

【答案】 $\frac{5x+10}{x^2+x-6}$

【解析】

【分析】 本题主要考查分式的混合运算，掌握因式分解法，分式的性质，分式的混合运算法则是关键。
根据因式分解法，分式的性质及分式的混合运算法则计算即可。

【详解】 解：
$$\begin{aligned} & \frac{5x}{x^2+x-6} + \frac{6}{x^2-x-2} + \frac{4}{x^2+4x+3} \\ &= \frac{5x}{(x-2)(x+3)} + \frac{6}{(x+1)(x-2)} + \frac{4}{(x+1)(x+3)} \\ &= \frac{5x(x+1)}{(x+1)(x-2)(x+3)} + \frac{6(x+3)}{(x+1)(x-2)(x+3)} + \frac{4(x-2)}{(x+1)(x-2)(x+3)} \\ &= \frac{5x^2+5x+6x+18+4x-8}{(x+1)(x-2)(x+3)} \\ &= \frac{5x^2+15x+10}{(x+1)(x-2)(x+3)} \\ &= \frac{5(x^2+3x+2)}{(x+1)(x-2)(x+3)} \\ &= \frac{5(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-2)(x+3)} \\ &= \frac{5x+10}{x^2+x-6}. \end{aligned}$$

24. 化简： $(x^{-1}-y^{-1}) \div (x^{-2}-y^{-2}) - xy(x+y)^{-1}$

【答案】 0

【解析】

【分析】 此题主要考查了负整数指数幂的性质以及分式的混合运算，正确将原式变形是解题关键。直接利用负整数指数幂的性质以及分式的混合运算法则计算得出答案。

【详解】 解：
$$\begin{aligned} & (x^{-1}-y^{-1}) \div (x^{-2}-y^{-2}) - xy(x+y)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \div \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right) - \frac{xy}{x+y} \\ &= \frac{y-x}{xy} \div \frac{y^2-x^2}{x^2y^2} - \frac{xy}{x+y} \end{aligned}$$

$$= \frac{y-x}{xy} \cdot \frac{x^2 y^2}{(y+x)(y-x)} - \frac{xy}{x+y}$$

$$= \frac{xy}{x+y} - \frac{xy}{x+y}$$

$$= 0.$$

25. 计算: $\frac{x^2-4y^2}{x^2+4x+4} \cdot \frac{x+2}{3x^2+6xy}.$

【答案】 $\frac{x-2y}{3x^2+6x}$

【解析】

【分析】 本题主要考查分式的性质化简，乘法公式的运用，掌握分式的性质是关键.

运用乘法公式因式分解，再根据分式的性质化简，由此即可求解.

【详解】 解: $\frac{x^2-4y^2}{x^2+4x+4} \cdot \frac{x+2}{3x^2+6xy}$

$$= \frac{(x+2y)(x-2y)}{(x+2)^2} \cdot \frac{x+2}{3x(x+2y)}$$

$$= \frac{x-2y}{x+2} \cdot \frac{1}{3x}$$

$$= \frac{x-2y}{3x^2+6x}.$$

26. 分解因式: $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$

【答案】 $(x+2)(x-1)(x+3)(x-2)$

【解析】

【分析】 本题考查十字相乘法分解因式，先把 (x^2+x) 当成一个整体进行分解，再逐个括号进行分解即可.

【详解】 $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$

$$= (x^2+x-2)(x^2+x-6)$$

$$= (x+2)(x-1)(x+3)(x-2).$$

四、解答题 (6' +6' +8' =20')

27. 先化简，再求值: $\left(\frac{2x+2}{x^2-1}+1\right) \div \frac{x+1}{x^2-2x+1}$ ，其中 $x=4$.

【答案】 $x-1, 3$

【解析】

【分析】 本题考查的是分式的化简求值，根据分式的混合运算法则把原式化简，把 x 的值代入计算即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \left(\frac{2x+2}{x^2-1} + 1 \right) \div \frac{x+1}{x^2-2x+1} \\ &= \left(\frac{2x+2}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{x^2-1} \right) \div \frac{x+1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} \cdot \frac{(x-1)^2}{x+1} \\ &= \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x-1)^2}{x+1} \\ &= x-1, \end{aligned}$$

当 $x=4$ 时，原式 $= 4-1=3$.

28. 分式中，在分子、分母都是整式的情况下，如果分子的次数低于分母的次数，称这样的分式为真分式，

例如 $\frac{4}{x+2}$ ， $\frac{3x^2}{x^3-4x}$ 是真分式，如果分子的次数不低于分母的次数，称这样的分式为假分式. 例如，分式

$\frac{x+1}{x-1}$ ， $\frac{x^2}{x+1}$ 假分式，一个假分式可以化为一个整式与一个真分式的和. 例如： $\frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

(1) 将假分式 $\frac{4x-3}{2x+1}$ 为一个整数与一个真分式的和

(2) 利用上述方法解决问题：若 x 是整数，且分式 $\frac{x^2}{x-3}$ 的值为正整数，求 x 的值

【答案】 (1) $2 - \frac{5}{2x+1}$

(2) $x=4$ 或 6 或 12

【解析】

【分析】 (1) 根据题意，把分式 $\frac{4x-3}{2x+1}$ 化为整式与真分式的和的形式即可；

(2) 根据题中所给出的例子，把原式化为整式与真分式的和形式，再根据分式的值为整数即可得出 x 的值.

【小问 1 详解】

$$\text{解: 由题可得, } \frac{4x-3}{2x+1} = \frac{2(2x+1)-5}{2x+1} = 2 - \frac{5}{2x+1};$$

【小问2 详解】

$$\text{解: } \frac{x^2}{x-3} = \frac{x^2-9+9}{x-3} = \frac{(x+3)(x-3)+9}{x-3} = x+3+\frac{9}{x-3},$$

∵ 分式的值为正整数, 且 x 为整数,

$$\therefore x-3=1, \quad x-3=3, \quad x-3=9,$$

$$\therefore x=4 \text{ 或 } 6 \text{ 或 } 12.$$

【点睛】 本题考查了分式的混合运算, 熟知分式混合运算的法则是解答此题的关键.

29. 阅读理解题.

我们定义: 如果两个分式 A 与 B 的差为常数, 且这个常数为正数, 则称 A 是 B 的“和谐式”, 这个常数称为 A 关于 B 的“和谐值”.

例: 分式 $A = \frac{2x}{x+1}$, $B = -\frac{2}{x+1}$, $A - B = \frac{2x}{x+1} - \left(-\frac{2}{x+1}\right) = \frac{2x+2}{x+1} = 2$, 则 A 是 B 的“和谐式”, A 关于 B 的“和谐值”为 2.

(1) 已知分式 $C = \frac{2+2x}{x-2}$, $D = \frac{3x}{x-2}$, 判断 C 是否为 D 的“和谐式”. 若不是, 请说明理由; 若是, 请求出 C 关于 D 的“和谐值”.

(2) 已知分式 $M = \frac{E}{9-x^2}$, $N = \frac{x}{3-x}$, M 是 N 的“和谐式”, M 关于 N 的“和谐值”是 1, x 为整数, 且 M 的值也为整数,

①求 E 所表示的代数式.

②求所有符合条件的 x 的值.

(3) 已知分式 $A = \frac{ax-5}{x-2}$, $B = \frac{x-2a}{x-2}$, A 是 B 的“和谐式”, 则 A 关于 B 的“和谐值”是_____. (直接写出答案即可).

【答案】 (1) C 不是 D 的“和谐式”, 理由见解析

(2) ① $E = 9 + 3x$; ② 2, 4, 0, 6

(3) $\frac{3}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查的是新定义情境下的分式的运算, 分式的化简, 解二元一次方程组,

(1) 计算 $C - D$, 再根据“和谐值”的定义可得答案;

(2) ①由定义可得 $M - N = 1$ ，即有 $\frac{E}{9-x^2} - \frac{x}{3-x} = 1$ ，整理可得： E 的表达式；

②化简 M ，根据 x 为整数，且“和谐式” M 的值也为整数，得到： $3-x$ 是 3 的因数，从而可得答案；

(3) 首先表示出 $A - B = \frac{(a-1)x-5+2a}{x-2}$ ，然后根据题意设 $(a-1)x-5+2a = m(x-2)$ ，得到

$$\begin{cases} a-1=m \\ -5+2a=-2m \end{cases}, \text{ 求出 } \begin{cases} a=\frac{7}{4} \\ m=\frac{3}{4} \end{cases}, \text{ 进而求解即可.}$$

【小问 1 详解】

$$\because C = \frac{2+2x}{x-2}, \quad D = \frac{3x}{x-2},$$

$$\therefore C - D = \frac{2+2x}{x-2} - \frac{3x}{x-2} = \frac{2+2x-3x}{x-2} = \frac{2-x}{x-2} = -1 < 0,$$

$\therefore C$ 不是 D 的“和谐式”；

【小问 2 详解】

① $\because M$ 是 N 的“和谐式”，且 M 关于 N 的“和谐值”是 1，

$$\therefore M - N = 1,$$

$$\because M = \frac{E}{9-x^2}, \quad N = \frac{x}{3-x},$$

$$\therefore \frac{E}{9-x^2} - \frac{x}{3-x} = 1,$$

$$\therefore E - x(3+x) = 9-x^2,$$

$$\therefore E = 9+3x,$$

$$\textcircled{2} M = \frac{E}{9-x^2} = \frac{9+3x}{9-x^2} = \frac{3(3+x)}{(3+x)(3-x)} = \frac{3}{3-x},$$

$\because x$ 为整数，且 M 的值也为整数，

$\therefore 3-x$ 是 3 的因数，

$\therefore 3-x$ 可能是： $\pm 1, \pm 3$ ，

$\therefore x$ 的值为：2、4、0、6，且都满足 $x \neq \pm 3$ ；

【小问 3 详解】

$$A - B$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ax-5}{x-2} - \frac{x-2a}{x-2} \\
&= \frac{ax-5-x+2a}{x-2} \\
&= \frac{(a-1)x-5+2a}{x-2}
\end{aligned}$$

$\therefore A$ 是 B 的 “和谐式” ,

$$\therefore \text{设 } (a-1)x-5+2a = m(x-2)$$

$$\therefore (a-1)x-5+2a = mx-2m$$

$$\therefore \begin{cases} a-1=m \\ -5+2a=-2m \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a=\frac{7}{4} \\ m=\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\therefore A-B = \frac{\frac{3}{4}(x-2)}{x-2} = \frac{3}{4}.$$

$\therefore A$ 关于 B 的 “和谐值” 是 $\frac{3}{4}$.