

2024-2025 学年上海市浦东新区建平中学西校七年级（上）第三次月考

数学试卷

一、选择题

1. 下列代数式 $-\frac{a+b}{3}$, $\frac{m}{\pi}$, $2x^2y$, 3^5 , $(x-1)^2$, $S = \pi r^2$ 中, 单项式有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查单项式的定义：“数字和字母的乘积的形式为单项式，单个数字和字母，也是单项式”。熟练掌握单项式的定义是解题关键。根据单项式的定义逐一判断即可得答案。

【详解】解： $-\frac{a+b}{3}$, $(x-1)^2$, $S = \pi r^2$ 不是乘积的形式，不是单项式，

$\frac{m}{\pi}$, $2x^2y$, 3^5 符合单项式的定义，是单项式，

$\therefore$ 单项式有 3 个。

故选：C。

2. 对于分式 $\frac{3xy}{3x-y}$ ，当 x 、 y 都扩大到原来的 3 倍时，分式的值 ()

- A. 不变 B. 扩大到原来的 3 倍
C. 扩大到原来的 9 倍 D. 不能确定

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查分式的性质。将 x 、 y 都扩大为原来的 3 倍，再进行化简约分，即可得出结果。掌握分式的性质，是解题的关键。

【详解】解：分式 $\frac{3xy}{3x-y}$ 中的 x 、 y 都扩大为原来的 3 倍，

则： $\frac{3 \cdot 3x \cdot 3y}{3 \cdot 3x - 3y} = \frac{27xy}{9x - 3y} = \frac{9xy}{3x - y} = 3 \cdot \frac{3xy}{3x - y}$ 。

$\therefore$ 分式的值扩大为原来的 3 倍。

故选 B。

3. 分式 $\frac{4y+3x}{4a}$, $\frac{x^2-1}{x^4-1}$, $\frac{x^2-xy+y^2}{x+y}$, $\frac{a^2+2ab}{ab-2b^2}$ 中, 最简分式有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】 C

【解析】

【分析】 最简分式的标准是分子, 分母中不含有公因式, 不能再约分. 判断的方法是把分子、分母分解因式, 并且观察有无公因式和有无互为相反数的因式, 分别对各项进行判断即可.

【详解】 解: $\frac{x^2-1}{x^4-1} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)(x^2-1)}$ 分子分母有公因式 x^2-1 ,

$\frac{4y+3x}{4a}$; $\frac{x^2-xy+y^2}{x+y}$; $\frac{a^2+2ab}{ab-2b^2}$ 这三个是最简分式.

故选: C.

【点睛】 本题考查了最简分式的定义, 最简分式就是分子和分母没有可以约分的公因式, 运用了平方差公式, 熟练掌握并灵活运用是解题的关键.

4. 已知 $a+b=3, ab=1$, 下列计算中错误的是 ()

- A. $(a-b)^2=5$ B. $a^2+b^2=7$
C. $a^4+b^4=51$ D. $(x+a)(x+b)=x^2+3x+1$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查的是完全平方公式及多项式乘以多项式计算, 牢记法则和公式是解题关键, 根据法则和公式依次计算即可.

【详解】 解: A、 $\because a+b=3, ab=1$,

$\therefore (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 3^2 - 4 \times 1 = 5$, 故此选项不符合题意;

B、 $\because a+b=3$,

$\therefore (a+b)^2 = 9$,

$\therefore a^2 + 2ab + b^2 = 9$,

$\because ab=1$,

$\therefore a^2 + b^2 = 9 - 2 \times 1 = 7$ ，故此选项不符合题意；

C、 $\because a^2 + b^2 = 7$ ，

$$\therefore (a^2 + b^2)^2 = 49,$$

$$\therefore a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = 49,$$

$$\therefore ab = 1,$$

$$\therefore a^4 + b^4 = 49 - 2 \times 1^2 = 47 \neq 51, \text{ 故此选项符合题意;}$$

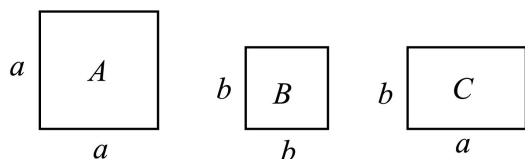
$$\text{D、} (x+a)(x+b) = x^2 + bx + ax + ab = x^2 + (a+b)x + ab,$$

$$\therefore a+b=3, ab=1,$$

$$\therefore (x+a)(x+b) = x^2 + 3x + 1, \text{ 故此选项不符合题意;}$$

故选：C.

5. 如图，正方形卡片 A 类，B 类和长方形卡片 C 类若干张，如果要拼一个长为 $(3a+b)$ ，宽为 $(a+3b)$ 的大长方形，则需要 C 类卡片张数为 ()



A. 6

B. 8

C. 10

D. 12

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了多项式乘多项式的应用. 熟练掌握多项式乘多项式的应用是解题的关键. 由题意知，大长方形的面积为 $(3a+b)(a+3b) = 3a^2 + 10ab + 3b^2$ ，根据大长方形的面积为 A、B、C 类卡片面积的和求解作答即可.

$$\text{【详解】解: } (3a+b)(a+3b) = 3a^2 + 9ab + ab + 3b^2 = 3a^2 + 10ab + 3b^2,$$

因为 C 类卡片的面积为 ab ，

所以需要 C 类卡片 10 张，

故选：C.

6. 已知 $a-b=b-c=2, a^2+b^2+c^2=1$ ，则 $ab+bc+ac=$ ()

A. -22

B. -11

C. 7

D. 11

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查了完全平方公式的应用. 根据题意可得 $a-c=4$, 再由完全平方公式, 可得 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]$, 即可求解.

【详解】 解: $\because a-b=b-c=2$,

$\therefore a-c=4$,

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$

$$= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac)$$

$$= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2]$$

$$= \frac{1}{2}(2^2 + 2^2 + 4^2)$$

$$= 12$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2=12,$$

$$\therefore ab+bc+ac=a^2+b^2+c^2-12=-11.$$

故选 B.

二、填空题

7. 若 $-2x^m y^4$ 与 $3x^4 y^n$ 是同类项, 则 m^n 的值为_____.

【答案】 256

【解析】

【分析】 本题考查了同类项. 根据同类项的定义: 所含字母相同, 且相同字母的指数也相同的两个单项式是同类项, 求出 m 和 n 的值, 然后代数求解即可.

【详解】 解: $\because -2x^m y^4$ 与 $3x^4 y^n$ 是同类项,

$$\therefore m=4, \quad n=4$$

$$\therefore m^n = 4^4 = 256.$$

故答案为: 256.

8. 若 $2^n + 2^n + 2^n + 2^n = 2^{10}$, 则 $n =$ _____.

【答案】 8

【解析】

【分析】 此题考查了同底数幂的乘法运算，解题的关键是掌握以上运算法则.

根据同底数幂的乘法得到 $2^{n+2} = 2^{10}$ ，然后得到 $n+2=10$ 求解即可.

【详解】 解： $\because 2^n + 2^n + 2^n + 2^n = 2^{10}$ ，

$$\therefore 2^n \times 4 = 2^{10},$$

$$\therefore 2^{n+2} = 2^{10},$$

$$\therefore n+2=10,$$

解得： $n=8$ ，

故答案为： 8.

9. 分式 $\frac{x-2}{(x-1)^2}$ 的值为负数，求 x 的取值范围 _____.

【答案】 $x < 2$ 且 $x \neq 1$

【解析】

【分析】 本题考查分式值的正负条件. 解不等式时当未知数的系数是负数时，两边同除以未知数的系数需改变不等号的方向，当未知数的系数是正数时，两边同除以未知数的系数不需改变不等号的方向.

根据题意，因为任何实数的平方都是非负数，分母不能为 0，所以分母必是正数，分子的值是负数则可，从而列出不等式.

【详解】 解： $\because$ 分式若有意义，分母不能为 0，

$$\therefore (x-1)^2 \neq 0,$$

$$\therefore x-1 \neq 0$$

$$\therefore x \neq 1$$

$$\because \text{分式 } \frac{x-2}{(x-1)^2} \text{ 的值为负数,}$$

$$\therefore x-2 < 0,$$

解得： $x < 2$ 且 $x \neq 1$ ，

故答案为： $x < 2$ 且 $x \neq 1$.

10. 已知 $(2x-3)^{x+3} - 1 = 0$ ，求 x 的值为_____.

【答案】 -3 或 2 或 1

【解析】

【分析】本题考查零指数幂的性质以及有理数的乘方运算等知识，运用了分类讨论的思想，利用零指数幂，负1的偶数次幂等于1是解题的关键。零指数幂是指任何一个不等于零的数的零次幂都等于1。

直接利用零指数幂的性质以及-1的偶数次幂等于1分别化简求出答案。

【详解】解：∵ $(2x-3)^{x+3} - 1 = 0$,

∴ $(2x-3)^{x+3} = 1$,

∴ 当 $x+3=0$ 且 $2x-3 \neq 0$ 时，

解得： $x = -3$ ；

当 $2x-3=1$ 时，

解得： $x = 2$ ；

当 $2x-3=-1$ 且 $x+3$ 为偶数时，

解得： $x = 1$ ；

∴ x 的值为 -3 或 2 或 1。

故答案为： -3 或 2 或 1。

11. 将分式 $\frac{3a^{-1}b^2}{2x^{-2}y^{-3}}$ 表示成只含有正整数指数幂的形式_____。

【答案】 $\frac{3b^2x^2y^3}{2a}$

【解析】

【分析】本题考查分式的乘除，负整数指数幂，先根据负整数指数幂的运算法则化为正整数指数幂，再根据分式的乘除运算法则进行化简即可。解题的关键是掌握负整数指数幂的运算法则：一个数（零除外）的负整数指数幂等于这个数的正整数指数幂的倒数。

【详解】解： $\frac{3a^{-1}b^2}{2x^{-2}y^{-3}}$

$= 3a^{-1}b^2 \div 2x^{-2}y^{-3}$

$= 3 \cdot \frac{1}{a} \cdot b^2 \div \left(2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{y^3} \right)$

$= \frac{3b^2}{a} \div \frac{2}{x^2y^3}$

$$= \frac{3b^2}{a} \cdot \frac{x^2 y^3}{2}$$

$$= \frac{3b^2 x^2 y^3}{2a}.$$

故答案为: $\frac{3b^2 x^2 y^3}{2a}.$

12. 将分式 $-\frac{x}{4a^2(a^2+b^2)}$ 表示成不含分母的形式_____.

【答案】 $-4^{-1}a^{-2}(a^2+b^2)^{-1}x$

【解析】

【分析】 本题主要考查负指数幂的运算，根据负指数幂的意义进行变形即可.

【详解】 解: $-\frac{x}{4a^2(a^2+b^2)} = -4^{-1}a^{-2}(a^2+b^2)^{-1}x.$

故答案为: $-4^{-1}a^{-2}(a^2+b^2)^{-1}x.$

13. 已知 $x - \frac{1}{x} = 4$, 则 $\frac{x^2}{x^4 - 5x^2 + 1} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{13}.$

【解析】

【分析】 计算 $(x - \frac{1}{x})^2 = 16$, 从而得到 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$, 然后先求原式的倒数, 从而求解.

【详解】 解: $\because x - \frac{1}{x} = 4$

$$\therefore (x - \frac{1}{x})^2 = 16$$

$$x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = 16$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$$

$$\frac{x^4 - 5x^2 + 1}{x^2} = x^2 - 5 + \frac{1}{x^2} = 18 - 5 = 13$$

$$\therefore \frac{x^2}{x^4 - 5x^2 + 1} = \frac{1}{13}$$

故答案为: $\frac{1}{13}$.

【点睛】 本题考查倒数, 完全平方公式的运用及分式的化简求值, 掌握完全平方公式的结构以及分式的化简计算是解题关键.

14. 如果关于 x 的多项式 $4x^2 + 6x + (2m-1)^2$ 是完全平方式, 那么 $m =$ _____.

【答案】 $\frac{5}{4}$ 或 $-\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查完全平方式, 熟练掌握完全平方式的结构特征是解题的关键.
根据完全平方式等于两数的平方和, 再加上或减去它们积的 2 倍, 可得答案.

【详解】 解: $\because 4x^2 + 6x + (2m-1)^2 = (2x^2) \pm 2 \times 2(2m-1)x + (2m-1)^2$
 $\therefore 6x = \pm 2 \times 2(2m-1)x$
解得 $m = \frac{5}{4}$ 或 $m = -\frac{1}{4}$.
故答案为: $\frac{5}{4}$ 或 $-\frac{1}{4}$.

15. 已知关于 x 的多项式 $x^2 + mx + n$ 与 $x^2 - 2x + 3$ 的积不含二次项和三次项, 则 $m + n =$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题主要考查多项式乘多项式, 多项式的项、次数的定义以及代数式求值, 解题的关键是熟练掌握运算法则正确进行计算. 先运用多项式乘多项式的运算法则进行运算并整理, 再令二次项和三次项的系数分别为 0 即可求解.

【详解】 解: $(x^2 + mx + n)(x^2 - 2x + 3)$
 $= x^4 - 2x^3 + 3x^2 + mx^3 - 2mx^2 + 3mx + nx^2 - 2nx + 3n$
 $= x^4 + (m-2)x^3 + (3-2m+n)x^2 + (3m-2n)x + 3n,$
 $\because$ 关于 x 的多项式 $x^2 + mx + n$ 与 $x^2 - 2x + 3$ 的积不含二次项和三次项,
 $\therefore m-2=0, 3-2m+n=0,$
解得 $m=2, n=1,$
 $\therefore m+n=2+1=3.$
故答案为: 3.

16. 如果 $(2x^2 + 2y^2 + 1)(3x^2 + 3y^2 - 1) = 1$, 那么 $x^2 + y^2 =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$ ##0.5

【解析】

【分析】 此题考查了换元法和因式分解法解一元二次方程，解题的关键是掌握以上运算法则.

令 $x^2 + y^2 = m$, 则原方程可化为 $(2m+1)(3m-1) = 1$, 然后展开利用因式分解法求解即可.

【详解】 解: 令 $x^2 + y^2 = m$,

则原方程可化为 $(2m+1)(3m-1) = 1$,

整理得, $6m^2 + m - 2 = 0$,

$$(2m-1)(3m+2) = 0$$

$$2m-1=0 \text{ 或 } 3m+2=0$$

$$\text{解得 } m = \frac{1}{2} \text{ 或 } m = -\frac{2}{3},$$

$$\therefore x^2 + y^2 = m = \frac{1}{2} \text{ 或 } x^2 + y^2 = m = -\frac{2}{3} < 0 \text{ (无意义, 舍去),}$$

故答案为: $\frac{1}{2}$.

17. 已知 $abc = 1$, 求 $\frac{5a}{ab+a+1} + \frac{5b}{bc+b+1} + \frac{5c}{ac+c+1} =$ _____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查了分式的化简求值，关键是条件 $abc = 1$ 的灵活运用.

由 $abc = 1$, 代入所求分式进行化简即可得出答案.

【详解】 解: $\because abc = 1$,

$$\begin{aligned} & \therefore \frac{5a}{ab+a+1} + \frac{5b}{bc+b+1} + \frac{5c}{ac+c+1} \\ &= \frac{5a}{ab+a+1} + \frac{5b \times a}{(bc+b+1) \times a} + \frac{5c \times ab}{(ac+c+1) \times ab} \\ &= \frac{5a}{ab+a+1} + \frac{5ab}{abc+ab+a} + \frac{5abc}{a^2bc+abc+ab} \\ &= \frac{5a}{ab+a+1} + \frac{5ab}{1+ab+a} + \frac{5}{a+1+ab} \end{aligned}$$

$$= \frac{5a + 5ab + 5}{ab + a + 1}$$

$$= 1.$$

故答案为：5.

18. 如果一个分式的分子或分母可以因式分解，且这个分式不可约分，那么我们称这个分式为“和谐分式”. 如分式 $\frac{a-2b}{a^2-b^2}$ 就是“和谐分式”. 若 a 为正整数，且 $\frac{x-1}{x^2+ax+9}$ 为“和谐分式”，则 a 的值为_____.

【答案】6 或 10

【解析】

【分析】根据 $x^2 + ax + 9$ 可分解因式设 $x^2 + ax + 9 = (x+p)(x+q) = x^2 + (p+q)x + pq$ ，根据 a 为正整数可得 pq 为 1×9 或 3×3 ，即可得出 $p+q$ 的值，可得答案.

【详解】 $\because x^2 + ax + 9$ 可以分解因式，

$\therefore$ 设 $x^2 + ax + 9 = (x+p)(x+q) = x^2 + (p+q)x + pq$ ，

$\therefore a$ 为正整数，

$\therefore pq = 1 \times 9$ 或 $pq = 3 \times 3$ ，

$\therefore a = p+q = 10$ 或 $a = p+q = 6$ ，

综上， a 的值是 6 或 10，

故答案为：6 或 10

【点睛】本题考查约分、因式分解的意义，解答本题的关键是明确题意，会对题目中的式子分解因式.

三、简答题

19. 计算： $\left[\frac{8}{3}ab \left(-\frac{1}{2}a \right)^2 + (a^2b)^2 \div 3ab \right] \div (-2a)^3$.

【答案】 $-\frac{1}{8}b$

【解析】

【分析】本题考查整式的混合运算，解题的关键是掌握以上运算法则.

首先计算括号内积的乘方，然后计算单项式和单项式的乘除运算，然后计算括号外多项式除以单项式即可求解.

【详解】解： $\left[\frac{8}{3}ab \left(-\frac{1}{2}a \right)^2 + (a^2b)^2 \div 3ab \right] \div (-2a)^3$

$$= \left(\frac{8}{3}ab \cdot \frac{1}{4}a^2 + a^4b^2 \div 3ab \right) \div (-8a^3)$$

$$= \left(\frac{2}{3}a^3b + \frac{1}{3}a^3b \right) \div (-8a^3)$$

$$= a^3b \div (-8a^3)$$

$$= -\frac{1}{8}b.$$

20. 计算: $\frac{5x}{x^2+x-6} + \frac{6}{x^2-x-2} + \frac{4}{x^2+4x+3}.$

【答案】 $\frac{5(x+2)}{(x+3)(x-2)}$

【解析】

【分析】 本题考查分式的加法运算，先将三个分式的分母利用十字交叉法化为两个因式的乘积，最后在将三个分式进行通分，化简后得出答案.

【详解】 解: $\frac{5x}{x^2+x-6} + \frac{6}{x^2-x-2} + \frac{4}{x^2+4x+3}$

$$= \frac{5x}{(x+3)(x-2)} + \frac{6}{(x-2)(x+1)} + \frac{4}{(x+3)(x+1)}$$

$$= \frac{5x(x+1) + 6(x+3) + 4(x-2)}{(x+3)(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{5(x+2)(x+1)}{(x+3)(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{5(x+2)}{(x+3)(x-2)}.$$

21. 计算: $(x^{-1} - y^{-1}) \div (x^{-2} - y^{-2}) - xy(x+y)^{-1}.$

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式的混合计算，负整数指数幂，熟知相关计算法则是解题的关键。先计算负整数指数幂，然后根据分式的混合计算法则求解即可.

【详解】 解: $(x^{-1} - y^{-1}) \div (x^{-2} - y^{-2}) - xy(x+y)^{-1}$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \div \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) - \frac{xy}{x+y} \\
 &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \div \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \right] - \frac{xy}{x+y} \\
 &= 1 \div \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) - \frac{xy}{x+y} \\
 &= 1 \div \frac{x+y}{xy} - \frac{xy}{x+y} \\
 &= \frac{xy}{x+y} - \frac{xy}{x+y} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

22. 计算: $\frac{x^2-4y^2}{x^2+4x+4} \cdot \frac{x+2}{3x^2+6xy}$;

【答案】 $\frac{x-2y}{3x(x+2)}$

【解析】

【分析】 先把各项分子分母因式分解，再约分计算即可.

【详解】 解: $\frac{x^2-4y^2}{x^2+4x+4} \cdot \frac{x+2}{3x^2+6xy}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(x+2y)(x-2y)}{(x+2)^2} \cdot \frac{x+2}{3x(x+2y)} \\
 &= \frac{x-2y}{3x(x+2)};
 \end{aligned}$$

故答案为: $\frac{x-2y}{3x(x+2)}$.

【点睛】 本题考查了分式的乘除法，分式乘除法的关键是约分，约分的关键是找出分子分母的公因式.

23. 分解因式: $(x^2+x)^2 - 8(x^2+x) + 12$.

【答案】 $(x+2)(x-1)(x+3)(x-2)$

【解析】

【分析】本题考查十字相乘法分解因式，先把 $(x^2 + x)$ 当成一个整体进行分解，再逐个括号进行分解即可.

【详解】 $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12$
 $= (x^2 + x - 2)(x^2 + x - 6)$
 $= (x + 2)(x - 1)(x + 3)(x - 2).$

四、解答题

24. 先化简，再求值： $\left(\frac{2x+2}{x^2-1} + 1\right) \div \frac{x+1}{x^2-2x+1}$ ，其中 $x=4$.

【答案】 $x-1$ ，3.

【解析】

【分析】本题考查了分式的化简求值，先把括号里通分合并，同时将除法写成乘法，然后再约分，将 $x=4$ 代入计算即可，熟练掌握法则是解题的关键.

【详解】解：原式 $= \left[\frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)} + 1 \right] \times \frac{(x-1)^2}{x+1}$
 $= \left(\frac{2}{x-1} + 1 \right) \times \frac{(x-1)^2}{x+1}$
 $= \frac{2+x-1}{x-1} \times \frac{(x-1)^2}{x+1}$
 $= \frac{x+1}{x-1} \times \frac{(x-1)^2}{x+1}$
 $= x-1,$

当 $x=4$ 时，

原式 $= 4-1=3$.

25. 已知 $(a-b)^2=13$ ， $ab=3$ ，求 $(a+b)^2$ 与 $3(a^2+b^2)$ 的值.

【答案】25，57

【解析】

【分析】本题考查了整式乘法的完全平方公式的应用，熟练掌握完全平方公式及其变形是解题的关键. 根据完全平方公式的变形整体求解即可.

【详解】解： $\because (a-b)^2=13$,

$$\therefore a^2 - 2ab + b^2 = 13,$$

$$\therefore ab = 3,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 13 + 2 \times 3 = 19,$$

$$\therefore (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 19 + 2 \times 3 = 25,$$

$$\therefore 3(a^2 + b^2) = 3 \times 19 = 57.$$

26. 若等式 $\frac{1}{x(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1}$ 成立, 求 A, B, C 的值.

【答案】 $A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{6}, C = \frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 此题考查了异分母分式的加法运算, 解题的关键是掌握以上运算法则.

将 $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1}$ 通分化简, 然后比较对应得到
$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+2C=0 \\ -2A=1 \end{cases}$$
 进而求解即可.

【详解】 解: $\therefore \frac{1}{x(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1}$

$$= \frac{A(x+2)(x-1)}{x(x+2)(x-1)} + \frac{Bx(x-1)}{x(x+2)(x-1)} + \frac{Cx(x+2)}{x(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2 + (A-B+2C)x - 2A}{x(x+2)(x-1)},$$

$$\therefore \begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+2C=0 \\ -2A=1 \end{cases}$$

解得: $A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{6}, C = \frac{1}{3}.$

27. 分式中, 在分子、分母都是整式的情况下, 如果分子的次数低于分母的次数, 称这样的分式为真分式,

例如 $\frac{4}{x+2}, \frac{3x^2}{x^3-4x}$ 是真分式, 如果分子的次数不低于分母的次数, 称这样的分式为假分式. 例如, 分式

$\frac{x+1}{x-1}, \frac{x^2}{x+1}$ 假分式, 一个假分式可以化为一个整式与一个真分式的和. 例如: $\frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

(1) 将假分式 $\frac{4x-3}{2x+1}$ 为一个整数与一个真分式的和

(2) 利用上述方法解决问题：若 x 是整数，且分式 $\frac{x^2}{x-3}$ 的值为正整数，求 x 的值

【答案】(1) $2 - \frac{5}{2x+1}$

(2) $x=4$ 或 6 或 12

【解析】

【分析】(1) 根据题意，把分式 $\frac{4x-3}{2x+1}$ 化为整式与真分式的和的形式即可；

(2) 根据题中所给出的例子，把原式化为整式与真分式的和形式，再根据分式的值为整数即可得出 x 的值.

【小问 1 详解】

解：由题可得， $\frac{4x-3}{2x+1} = \frac{2(2x+1)-5}{2x+1} = 2 - \frac{5}{2x+1}$ ；

【小问 2 详解】

解： $\frac{x^2}{x-3} = \frac{x^2-9+9}{x-3} = \frac{(x+3)(x-3)+9}{x-3} = x+3 + \frac{9}{x-3}$ ，

$\because$ 分式的值为正整数，且 x 为整数，

$\therefore x-3=1, x-3=3, x-3=9$ ，

$\therefore x=4$ 或 6 或 12 .

【点睛】本题考查了分式的混合运算，熟知分式混合运算的法则是解答此题的关键.

28. 在初中数学学习阶段，我们常常会利用一些变形技巧来简化式子，解答问题.

材料一：在解决某些分式问题时，倒数法是常用的变形技巧之一，所谓倒数法，即把式子变成其倒数形式，从而运用约分化简，以达到计算目的.

例：已知： $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{4}$ ，求代数式 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 的值.

解： $\because \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{4}$ ， $\therefore \frac{x^2+1}{x} = 4$ 即 $\frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = 4$

$\therefore x + \frac{1}{x} = 4 \therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 16 - 2 = 14$

材料二：在解决某些连等式问题时，通常可以引入参数“ k ”，将连等式变成几个值为 k 的等式，这样就可以通过适当变形解决问题.

例：若 $2x = 3y = 4z$ ，且 $xyz \neq 0$ ，求 $\frac{x}{y+z}$ 的值.

解：令 $2x = 3y = 4z = k (k \neq 0)$ 则 $x = \frac{k}{2}$ ， $y = \frac{k}{3}$ ， $z = \frac{k}{4}$ ， $\therefore \frac{x}{y+z} = \frac{\frac{1}{2}k}{\frac{1}{3}k + \frac{1}{4}k} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{12}} = \frac{6}{7}$

根据材料回答问题：

(1) 已知 $\frac{x}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{5}$ ，求 $x + \frac{1}{x}$ 的值.

(2) 已知 $\frac{a}{5} = \frac{b}{4} = \frac{c}{3} (abc \neq 0)$ ，求 $\frac{3b+4c}{2a}$ 的值.

(3) 若 $\frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} = \frac{xy}{ay+bx} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$ ， $x \neq 0$ ， $y \neq 0$ ， $z \neq 0$ ，且 $abc = 5$ ，求 xyz 的值.

【答案】(1) $x + \frac{1}{x} = 6$ ；(2) $\frac{12}{5}$ ；(3) $xyz = \frac{5}{8}$.

【解析】

【分析】(1) 仿照材料一，取倒数，再约分，利用等式的性质求解即可；

(2) 仿照材料二，设 $\frac{a}{5} = \frac{b}{4} = \frac{c}{3} = k (k \neq 0)$ ，则 $a = 5k$ ， $b = 4k$ ， $c = 3k$ ，代入所求式子即可；

(3) 解法一：设 $\frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} = \frac{xy}{ay+bx} = \frac{1}{k} (k \neq 0)$ ，化简得： $\frac{b}{y} + \frac{c}{z} = k$ ①， $\frac{c}{z} + \frac{a}{x} = k$ ②，

$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = k$ ③，，相加变形可得 x 、 y 、 z 的代入 $\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{1}{k}$ 中，可得 k 的值，从而得结论；

解法二：取倒数得： $\frac{bz+cy}{yz} = \frac{cx+az}{zx} = \frac{ay+bx}{xy}$ ，拆项得 $\frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{c}{z} + \frac{a}{x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ ，从而得 $x = \frac{ay}{b}$ ， $z = \frac{cy}{b}$ ，

代入已知可得结论.

【详解】解：(1) $\therefore \frac{x}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{5}$ ，

$\therefore \frac{x^2 - x + 1}{x} = 5$ ，

$$\therefore x - 1 + \frac{1}{x} = 5,$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = 6.$$

$$(2) \text{ 设 } \frac{a}{5} = \frac{b}{4} = \frac{c}{3} = k (k \neq 0), \text{ 则 } a = 5k, \quad b = 4k, \quad c = 3k,$$

$$\therefore \frac{3b+4c}{2a} = \frac{12k+12k}{10k} = \frac{12}{5}$$

$$(3) \text{ 解法一: 设 } \frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} = \frac{xy}{ay+bx} = \frac{1}{k} (k \neq 0),$$

$$\therefore \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = k \text{ ①}, \quad \frac{c}{z} + \frac{a}{x} = k \text{ ②}, \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = k \text{ ③},$$

$$\text{①+②+③得: } 2\left(\frac{b}{y} + \frac{c}{z} + \frac{a}{x}\right) = 3k,$$

$$\frac{b}{y} + \frac{c}{z} + \frac{a}{x} = \frac{3}{2}k \text{ ④},$$

$$\text{④-①得: } \frac{a}{x} = \frac{1}{2}k,$$

$$\text{④-②得: } \frac{b}{y} = \frac{1}{2}k,$$

$$\text{④-③得: } \frac{c}{z} = \frac{1}{2}k,$$

$$\therefore x = \frac{2a}{k}, \quad y = \frac{2b}{k}, \quad z = \frac{2c}{k} \text{ 代入 } \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{1}{k} \text{ 中, 得: } \frac{\frac{4}{k^2}(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} = \frac{1}{k},$$

$$\frac{4}{k^2} = \frac{1}{k}, \text{ 则 } k = 4,$$

$$\therefore x = \frac{2a}{4}, \quad y = \frac{2b}{4}, \quad z = \frac{2c}{4},$$

$$\therefore xyz = \frac{8abc}{64} = \frac{5}{8}$$

$$\text{解法二: } \therefore \frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} = \frac{xy}{ay+bx},$$

$$\therefore \frac{bz+cy}{yz} = \frac{cx+az}{zx} = \frac{ay+bx}{xy},$$

$$\therefore \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{c}{z} + \frac{a}{x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{y},$$

$$\therefore \frac{b}{y} = \frac{a}{x}, \quad \frac{c}{z} = \frac{b}{y},$$

$$\therefore x = \frac{ay}{b}, \quad z = \frac{cy}{b},$$

$$\text{将其代入 } \frac{zx}{cx+az} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} \text{ 中得: } \frac{\frac{cy}{b} \cdot \frac{ay}{b}}{\frac{acy}{b} + \frac{acy}{b}} = \frac{\frac{a^2y^2}{b^2} + y^2 + \frac{c^2y^2}{b^2}}{a^2+b^2+c^2}, \quad \frac{y}{2b} = \frac{y^2}{b^2}, \quad y = \frac{b}{2},$$

$$\therefore x = \frac{ab}{2b} = \frac{a}{2}, \quad z = \frac{cy}{2y} = \frac{c}{2},$$

$$\therefore xyz = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{5}{8}.$$

【点睛】 本题考查了给材料阅读，然后仿做并探索较为复杂的化简计算题型，难度较大.