

华政附校 2024 学年第一学期七年级数学 12 月阶段反馈

(满分 100 分, 完成试卷时间 90 分钟)

一、填空题 (每题 2 分, 共 28 分)

1. 若 $-2x^m y^2$ 与 $3x^4 y^n$ 是同类项, 则 m^n 的值为_____.

【答案】 16

【解析】

【分析】 本题考查了同类项. 根据同类项的定义: 所含字母相同, 且相同字母的指数也相同的两个单项式是同类项, 求出 m 和 n 的值即可.

【详解】 解: $\because -2x^m y^2$ 与 $3x^4 y^n$ 是同类项,

$$\therefore m = 4, \quad n = 2,$$

$$\therefore m^n = 4^2 = 16,$$

故答案为: 16.

2. 计算: $(a-2b)^2 =$ _____.

【答案】 $a^2 - 4ab + 4b^2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了完全平方公式. 利用完全平方公式计算, 即可求解.

【详解】 解: $(a-2b)^2 = a^2 - 4ab + 4b^2$.

故答案为: $a^2 - 4ab + 4b^2$.

3. 分解因式: $x^2 - 5x - 6 =$ _____.

【答案】 $(x+1)(x-6)$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解, 熟练掌握因式分解的常用方法 (提取公因式法、公式法、十字相乘法、换元法等) 是解题关键. 利用十字相乘法分解因式即可得.

【详解】 解: $x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x-6)$,

故答案为: $(x+1)(x-6)$.

4. 分解因式: $a^2 - 2ab + b^2 - 9 =$ _____.

【答案】 $(a-b+3)(a-b-3)$

【解析】

【分析】 本题考查了分组分解法分解因式. 首先将前三项分组进而利用完全平方公式和平方差公式分解因式得出即可.

【详解】 解: $a^2 - 2ab + b^2 - 9$

$$= (a-b)^2 - 3^2$$

$$= (a-b+3)(a-b-3)$$

故答案为: $(a-b+3)(a-b-3)$.

5. 计算: $(6x^2 + 5x^3 - 4x^4) \div 2x^2 =$ _____.

【答案】 $3 + \frac{5}{2}x - 2x^2$

【解析】

【分析】 本题考查多项式除以单项式. 用多项式的每一项分别除以单项式, 再把它们的商相加即可.

【详解】 解: $(6x^2 + 5x^3 - 4x^4) \div 2x^2$

$$= 6x^2 \div 2x^2 + 5x^3 \div 2x^2 - 4x^4 \div 2x^2$$

$$= 3 + \frac{5}{2}x - 2x^2.$$

故答案为: $3 + \frac{5}{2}x - 2x^2$.

6. 当 x _____ 时, 分式 $\frac{x^2-9}{x-3}$ 的值为零.

【答案】 $= -3$

【解析】

【分析】 根据分母为 0 是分式无意义, 分式值为零的条件是分子等于零且分母不等于零列式计算即可.

【详解】 解: 根据题意,

$\therefore$ 分式 $\frac{x^2-9}{x-3}$ 的值为零,

$$\therefore \begin{cases} x^2 - 9 = 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases},$$

$$\therefore x = -3;$$

故答案为： -3 .

【点睛】 本题考查的是分式为 0 的条件、分式有意义的条件，掌握分式值为零的条件是分子等于零且分母不等于零是解题的关键.

7. 计算: $\frac{2a(x-y)}{9b} \cdot \frac{3b^3}{a^2(y-x)^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{2b^2}{3a(x-y)}$

【解析】

【分析】 本题考查了分式的乘法，熟练掌握分式的乘法法则是解题关键. 根据分式的乘法法则计算即可得.

【详解】 解: 原式 $= \frac{2a(x-y)}{9b} \cdot \frac{3b^3}{a^2(x-y)^2}$
 $= \frac{2b^2}{3a(x-y)},$

故答案为: $\frac{2b^2}{3a(x-y)}.$

8. 计算: $\frac{2}{x^2-4} - \frac{x}{4-x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{1}{x-2}$

【解析】

【分析】 本题考查了分式的加减. 先将原式转化为同分母的分式加减, 再进行计算, 最后约分即可求解.

【详解】 解: $\frac{2}{x^2-4} - \frac{x}{4-x^2} = \frac{2}{x^2-4} + \frac{x}{x^2-4} = \frac{2+x}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2},$

故答案为: $\frac{1}{x-2}.$

9. 已知: $a^m = 2, a^n = 3$, 则 $a^{2m-n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查幂的乘方和同底数幂的除法, 根据逆用幂的乘方和同底数幂的除法运算法则进行计算即可得到答案.

【详解】解： $\because a^m = 2, a^n = 3,$

$$\therefore a^{2m-n} = a^{2m} \div a^n = (a^m)^2 \div a^n = 2^2 \div 3 = \frac{4}{3},$$

故答案为： $\frac{4}{3}$.

10. 将 $-5xy^{-1}(x-y)^{-2}$ 写成只含正整数指数幂的形式：_____.

【答案】 $-\frac{5x}{y(x-y)^2}$

【解析】

【分析】 本题考查了负整数指数幂. 根据负整数指数幂与正整数指数幂互为倒数, 可得答案.

【详解】解： $-5xy^{-1}(x-y)^{-2}$

$$= -\frac{5x}{y(x-y)^2},$$

故答案为： $-\frac{5x}{y(x-y)^2}$.

11. 若关于 x 的整式 $4x^2 + mx + 9$ 是某个整式的平方, 则 m 的值是_____.

【答案】 ± 12

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式 “ $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ ”, 熟记完全平方公式是解题关键. 根据完全平方公式可得 $4x^2 + mx + 9 = (2x \pm 3)^2$, 由此即可得.

【详解】解： 由题意得： $4x^2 + mx + 9 = (2x \pm 3)^2,$

$$\text{即 } 4x^2 + mx + 9 = 4x^2 \pm 12x + 9,$$

所以 $m = \pm 12,$

故答案为： ± 12 .

12. 已知关于 x 的方程 $\frac{x-2}{x-3} = 2 + \frac{a}{x-3}$ 有增根, 那么 $a =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的增根问题, 熟练掌握分式方程的解法是解题关键. 先解分式方程可得

$x = 4 - a$ ，再根据分式方程有增根可得 $x = 3$ ，则 $4 - a = 3$ ，由此即可得.

【详解】解： $\frac{x-2}{x-3} = 2 + \frac{a}{x-3}$,

方程两边同乘以 $(x-3)$ 得： $x-2 = 2(x-3) + a$,

解得 $x = 4 - a$,

$\because$ 关于 x 的方程 $\frac{x-2}{x-3} = 2 + \frac{a}{x-3}$ 有增根,

$\therefore x-3 = 0$, 即 $x = 3$,

$\therefore 4 - a = 3$,

解得 $a = 1$,

故答案为：1.

13. 关于 x 的分式方程 $\frac{2x+m}{x-3} = 3$ 的解为正数，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > -9$ 且 $m \neq -6$

【解析】

【详解】试题解析：原方程整理得： $2x+m=3x-9$.

解得： $x=m+9$,

$\because x > 0$,

$\therefore m+9 > 0$,

$\therefore m > -9$.①

又 $\because$ 原式是分式方程,

$\therefore x \neq 3$,

$\therefore m+9 \neq 3$,

$\therefore m \neq -6$.②

由①②可得，则 m 的取值范围为 $m > -9$ 且 $m \neq -6$.

故答案为 $m > -9$ 且 $m \neq -6$.

14. 如果一个分式的分子或分母可以因式分解，且这个分式不可约分，那么我们称这个分式为“和谐分式”. 如分式 $\frac{a-2b}{a^2-b^2}$ 就是“和谐分式”. 若 a 为正整数，且 $\frac{x-1}{x^2+ax+9}$ 为“和谐分式”，则 a 的值为_____.

【答案】 6 或 10

【解析】

【分析】根据 $x^2 + ax + 9$ 可分解因式设 $x^2 + ax + 9 = (x+p)(x+q) = x^2 + (p+q)x + pq$ ，根据 a 为正整数可得 pq 为 1×9 或 3×3 ，即可得出 $p+q$ 的值，可得答案.

【详解】 $\because x^2 + ax + 9$ 可以分解因式，

$\therefore$ 设 $x^2 + ax + 9 = (x+p)(x+q) = x^2 + (p+q)x + pq$,

$\because a$ 为正整数，

$\therefore pq = 1 \times 9$ 或 $pq = 3 \times 3$,

$\therefore a = p+q = 10$ 或 $a = p+q = 6$,

综上， a 的值是 6 或 10，

故答案为：6 或 10

【点睛】本题考查约分、因式分解的意义，解答本题的关键是明确题意，会对题目中的式子分解因式.

二、选择题（每题 3 分，共 12 分）

15. 下列计算正确的是（ ）

- A. $a^2 + a^2 = a^4$ B. $(-2a)^3 = -6a^3$ C. $3a^{-2} = \frac{1}{3a^2}$ D. $(-a)^3 \cdot (-a)^4 = -a^7$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了合并同类项、积的乘方、同底数幂的乘法、负整数指数幂，熟练掌握各运算法则是解题关键. 根据合并同类项、积的乘方、同底数幂的乘法、负整数指数幂法则逐项计算即可得.

【详解】解：A、 $a^2 + a^2 = 2a^2$ ，则此项错误，不符合题意；

B、 $(-2a)^3 = -8a^3$ ，则此项错误，不符合题意；

C、 $3a^{-2} = \frac{3}{a^2}$ ，则此项错误，不符合题意；

D、 $(-a)^3 \cdot (-a)^4 = -a^3 \cdot a^4 = -a^7$ ，则此项正确，符合题意；

故选：D.

16. 下列各式从左到右的变形，是因式分解的是（ ）

- A. $3x - 6y = 3(x - 2y)$ B. $x^2 - 6xy + 5y^2 = (x - 5y)(x + y)$
C. $(x - 2y)(x + 2y) = x^2 - 4y^2$ D. $1 + x + \frac{1}{4x^2} = \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^2$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了因式分解的定义. 根据因式分解的定义, 因式分解是把多项式写成几个整式积的形式, 对各选项分析判断后求解.

【详解】解: A、 $3x-6y=3(x-2y)$ 是因式分解, 故本选项符合题意;

B、 $x^2-6xy+5y^2=(x-5y)(x-y)$ 原式分解错误, 故本选项不符合题意;

C、原式是整式的乘法, 不是因式分解, 故本选项不符合题意;

D、原式右边不是整式积的形式, 不是因式分解, 故本选项不符合题意;

故选: A.

17. 如果分式 $\frac{x^2+y^2}{x-y}$ 中的 x 、 y 的值同时扩大到原来的 2 倍, 那么分式的值 ()

A. 保持不变

B. 扩大到原来的 4 倍

C. 扩大到原来的 2 倍

D. 缩小到原来的 $\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查分式的基本性质. x, y 都扩大成原来的 4 倍就是分别变成原来的 2 倍, 变成 $2x$ 和 $2y$. 用 $2x$ 和 $2y$ 代替式子中的 x 和 y , 看得到的式子与原来的式子的关系即可得到答案.

【详解】解: 将 $2x$ 和 $2y$ 分别替换原分式中的 x, y 得

$$\frac{(2x)^2+(2y)^2}{2x-2y} = \frac{4(x^2+y^2)}{2(x-y)} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)},$$

$\therefore$ 分式的值扩大到原来的 2 倍,

故选: C.

18. 某班组织学生参加植树活动, 第一组植树 12 棵, 第二组比第一组多 6 人, 植树 36 棵, 结果两组平均每人植树的棵树相等, 设第一组学生有 x 人, 则可列方程为 ()

A. $\frac{12}{x} = \frac{36}{x-6}$

B. $\frac{12}{x} = \frac{36}{x+6}$

C. $\frac{36}{x} = \frac{12}{x+6}$

D. $\frac{36}{x} = \frac{12}{x-6}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了列分式方程，找准等量关系，正确建立方程是解题关键．先可求出第二组学生有 $(x+6)$ 人，再根据两组平均每人植树的棵树相等建立方程即可得．

【详解】解：由题意得：第二组学生有 $(x+6)$ 人，
因为第一组植树 12 棵，第二组植树 36 棵，两组平均每人植树的棵树相等，
所以可列方程为 $\frac{12}{x} = \frac{36}{x+6}$ ，

故选：B．

三、简答题（本大题共 6 题，每题 5 分，满分 30 分）

19. 计算： $(x+y)^2 + (x-y)(2x+y) - 3x^2$ ．

【答案】 xy

【解析】

【分析】本题考查了整式的混合运算，熟练掌握整式的运算法则是解题关键．先计算完全平方公式、多项式乘以多项式，再计算整式的加减即可得．

【详解】解：原式 $= x^2 + 2xy + y^2 + 2x^2 + xy - 2xy - y^2 - 3x^2$
 $= xy$ ．

20. 计算： $(-2a^3b)^{-2} \cdot (a^3b^{-1})^3 \div b^{-4}$ ．（结果只含有正整数指数幂）

【答案】 $\frac{a^3}{4b}$

【解析】

【分析】本题考查了负整数指数幂、分式的乘方与乘除法，熟练掌握分式的运算法则是解题关键．先将负整数指数幂转化成正整数指数幂，再计算分式的乘方，然后计算分式的乘除法即可得．

【详解】解：原式 $= \frac{1}{(-2a^3b)^2} \cdot \left(\frac{a^3}{b}\right)^3 \div \frac{1}{b^4}$
 $= \frac{1}{4a^6b^2} \cdot \frac{a^9}{b^3} \cdot b^4$
 $= \frac{a^3}{4b}$ ．

21. 分解因式： $(a^2 - 3a)^2 - 2(a^2 - 3a) - 8$ ．

【答案】 $(a+1)(a-4)(a-1)(a-2)$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解，熟练掌握因式分解的常用方法（提取公因式法、十字相乘法、公式法、换元法、分组分解法等）是解题关键．先将 $a^2 - 3a$ 作为一个整体，利用十字相乘法分解因式，然后利用十字相乘法再次分解两个因式即可得．

【详解】 解： $(a^2 - 3a)^2 - 2(a^2 - 3a) - 8$

$$= (a^2 - 3a - 4)(a^2 - 3a + 2)$$

$$= (a+1)(a-4)(a-1)(a-2).$$

22. 分解因式： $x^3 - 4x^2y + 4y - x$.

【答案】 $(x+1)(x-1)(x-4y)$

【解析】

【分析】 本题考查了分解因式．先分组，再提公因式 $(x^2 - 1)$ ，然后利用平方差公式继续分解即可．

【详解】 解： $x^3 - 4x^2y + 4y - x$

$$= x^3 - x - 4x^2y + 4y$$

$$= x(x^2 - 1) - 4y(x^2 - 1)$$

$$= (x^2 - 1)(x - 4y)$$

$$= (x+1)(x-1)(x-4y).$$

23. 计算： $(x^{-2} - y^{-2}) \div (x^{-1} + y^{-1})$.

【答案】 $\frac{y-x}{xy}$

【解析】

【分析】 此题主要考查了负整数指数幂和平方差公式.先把分子运用平方差公式进行因式分解，约分后再用负整数指数幂运算法则计算即可．

【详解】 解： $(x^{-2} - y^{-2}) \div (x^{-1} + y^{-1})$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(x^{-1})^2 - (y^{-1})^2}{x^{-1} + y^{-1}} \\
 &= \frac{(x^{-1} + y^{-1})(x^{-1} - y^{-1})}{x^{-1} + y^{-1}} \\
 &= x^{-1} - y^{-1} \\
 &= \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \\
 &= \frac{y-x}{xy}.
 \end{aligned}$$

24. 解方程: $\frac{2-x}{x-3} = \frac{1}{3-x} - 2$.

【答案】原方程无解.

【解析】

【详解】试题分析：方程两边同乘 $(x-3)$ ，化成整式方程，解整式方程后进行检验即可得.

试题解析：方程两边同时乘以 $(x-3)$ ，得

$$2-x = -1-2x+6,$$

$$x=3,$$

检验：当 $x=3$ 时， $x-3=0$ ，所以 $x=3$ 是增根，

∴原方程无解

四、解答题（本大题共 4 题，第 25、26、27 题每题 7 分、第 28 题 9 分，满分 30 分）

25. 先化简，再求值： $\left(\frac{3}{a-1} - a - 1\right) \div \frac{a^2 - 4a + 4}{a-1}$ ，其中 $a = -\frac{3}{5}$.

【答案】 $\frac{2+a}{2-a}$, $\frac{7}{13}$

【解析】

【分析】本题考查了分式的化简求值，熟练掌握分式的运算法则是解题关键. 先计算括号内的分式减法，再计算分式的除法，然后将 $a = -\frac{3}{5}$ 代入计算即可得.

【详解】解：原式 $= \left[\frac{3}{a-1} - \frac{(a+1)(a-1)}{a-1} \right] \div \frac{(a-2)^2}{a-1}$

$$= \left(\frac{3}{a-1} - \frac{a^2-1}{a-1} \right) \cdot \frac{a-1}{(a-2)^2}$$

$$= \frac{4-a^2}{a-1} \cdot \frac{a-1}{(a-2)^2}$$

$$= \frac{(2+a)(2-a)}{a-1} \cdot \frac{a-1}{(2-a)^2}$$

$$= \frac{2+a}{2-a}.$$

将 $a = -\frac{3}{5}$ 代入得：原式 $= \frac{2+a}{2-a} = \frac{2-\frac{3}{5}}{2+\frac{3}{5}} = \frac{7}{13}.$

26. 已知 $\frac{3x+4}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2} - \frac{B}{x+1}$ ，其中 A, B 为常数，求 $4A-B$ 的值.

【答案】13

【解析】

【分析】本题考查了分式的减法、二元一次方程组，熟练掌握分式的减法法则是解题关键。先计算等式右边的减法，再与等式的左边进行比较可得一个关于 A, B 的二元一次方程组，解方程组即可得。

【详解】解： $\frac{A}{x-2} - \frac{B}{x+1}$

$$= \frac{A(x+1)}{(x-2)(x+1)} - \frac{B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{Ax+A}{x^2-x-2} - \frac{Bx-2B}{x^2-x-2}$$

$$= \frac{(A-B)x+A+2B}{x^2-x-2},$$

$$\therefore \frac{3x+4}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2} - \frac{B}{x+1},$$

$$\therefore \frac{3x+4}{x^2-x-2} = \frac{(A-B)x+A+2B}{x^2-x-2},$$

$$\therefore \begin{cases} A-B=3 \text{ ①} \\ A+2B=4 \text{ ②} \end{cases},$$

由① $\times 3$ +②得： $3A+A-3B+2B=3\times 3+4,$

所以 $4A-B=13.$

27. 学校到学习基地的公路距离为 15 千米，一部分人骑自行车先走，40 分钟后，其余的人乘坐汽车出发，结果他们同时到达，如果汽车的平均速度与自行车的平均速度的比是 3:1，问：汽车与自行车的平均速度分

别是多少？

【答案】自行车的平均速度是 15 千米/小时，汽车的平均速度是 45 千米/小时。

【解析】

【详解】试题分析：设自行车的平均速度是 x 千米/时，汽车的平均速度是 $3x$ 千米/时，根据学校到学习基地的公路距离为 15 千米，部分同学骑自行车先走，40 分钟后，其余同学乘汽车出发，结果他们同时到达学习基地可列方程求解。

试题解析：设自行车的平均速度是 x 千米/小时，汽车的平均速度是 $3x$ 千米/小时，

$$\text{由题意得：} \frac{15}{x} = \frac{15}{3x} + \frac{40}{60},$$

$$x=15,$$

经检验， $x=15$ 是原方程的解且符合题意，

$$\therefore 3x=45,$$

答：自行车的平均速度是 15 千米/小时，汽车的平均速度是 45 千米/小时。

28. 我们定义：如果两个分式 A 与 B 的差为常数，且这个常数为正数，则称 A 是 B 的“雅中式”，这个常数称为 A 关于 B 的“雅中值”。

$$\text{如分式 } A = \frac{2x}{x+1}, B = \frac{-2}{x+1}, A - B = \frac{2x}{x+1} - \left(\frac{-2}{x+1} \right) = \frac{2x+2}{x+1} = \frac{2(x+1)}{x+1} = 2, \text{ 则 } A \text{ 是 } B \text{ 的“雅中式”，}$$

A 关于 B 的“雅中值”为 2。

$$(1) \text{ 已知分式 } C = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 4x + 4}, D = \frac{1}{x+2}, \text{ 判断 } C \text{ 是否为 } D \text{ 的“雅中式”，若不是，请说明理由；若}$$

是，请求出 C 关于 D 的“雅中值”；

$$(2) \text{ 已知分式 } P = \frac{E}{9-x^2}, Q = \frac{x}{3-x}, P \text{ 是 } Q \text{ 的“雅中式”，且 } P \text{ 关于 } Q \text{ 的“雅中值”是 } 1, x \text{ 为整数，}$$

且 P 的值也为整数。

①求 E 所代表的代数式；

②求所有符合条件的 x 的值；

【答案】(1) C 是 D 的“雅中式”， C 关于 D 的“雅中值”为 1

(2) ① $E = 3x + 9$ ；②所有符合条件的 x 的值为 0, 2, 4, 6

【解析】

【分析】本题主要考查了分式减法的应用、分式的约分，熟练掌握分式的减法法则是解题关键。

(1) 根据分式的减法法则计算 $C - D$ ，由此即可得；

(2) ①先得出 $\frac{E}{9-x^2} - \frac{x}{3-x} = 1$, 据此化简计算即可得;

②求出 $P = \frac{3}{3-x}$, 从而可得 $3-x$ 是 3 的因式, 由此即可得.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \because C = \frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}, \quad D = \frac{1}{x+2},$$

$$\therefore C-D = \frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4} - \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)^2} - \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{x+3}{x+2} - \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{x+2}{x+2}$$

$$= 1,$$

$\therefore C$ 是 D 的“雅中式”, C 关于 D 的“雅中值”为 1.

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \textcircled{1} \text{ 由题意得: } \frac{E}{9-x^2} - \frac{x}{3-x} = 1,$$

$$\therefore \frac{E}{9-x^2} - \frac{x}{3-x} = \frac{E}{(3+x)(3-x)} - \frac{x(3+x)}{(3+x)(3-x)}$$

$$= \frac{E-x^2-3x}{(3+x)(3-x)},$$

$$\therefore \frac{E-x^2-3x}{(3+x)(3-x)} = 1,$$

$$\therefore E-x^2-3x = 9-x^2,$$

$$\therefore E = 3x+9.$$

$$\textcircled{2} \text{ 由 (2) } \textcircled{1} \text{ 可知, } P = \frac{3x+9}{9-x^2} = \frac{3(x+3)}{(3+x)(3-x)} = \frac{3}{3-x},$$

$\therefore x$ 为整数, 且 P 的值也为整数,

$$\therefore 3-x=3 \text{ 或 } 3-x=1 \text{ 或 } 3-x=-1 \text{ 或 } 3-x=-3,$$

$$\therefore x=0 \text{ 或 } x=2 \text{ 或 } x=4 \text{ 或 } x=6,$$

综上，所有符合条件的 x 的值为 0, 2, 4, 6.