

兰生复旦 2024 学年第一学期七年级

数学第一阶段练习

一、选择题 (每题 3 分, 共 6 题)

1. 已知每个人做某项工作的效率相同, m 个人做 d 天可以完成, 若增加 r 人, 则完成工作所需的天数为 ().

- A. $d+r$ B. $d-r$ C. $\frac{d}{m+r}$ D. $\frac{md}{m+r}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了用字母表示数, 设每个人做某项工作的效率为 1, 则这项工作总量为 md , 若增加 r 人, 现在总人数是 $(m+r)$ 人, 用工作总量除以总人数, 即可求出完成工作所需的天数.

【详解】 解: 设每个人做某项工作的效率为 1, 则这项工作总量为 md , 若增加 r 人, 则完成工作所需的天数为 $\frac{md}{m+r}$,

故选: D.

2. 下列计算正确的 ()

- A. $x^2 + x^3 = x^5$ B. $(-a)^8 \div (-a)^3 = a^5$
C. $x^6 - x^3 = x^2$ D. $(3 \times 10^6) \times (5 \times 10^3) = 1.5 \times 10^{10}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查合并同类项, 同底数幂的除法, 科学记数法, 根据合并同类项, 同底数幂的除法, 科学记数法的法则逐项判断即可.

- 【详解】 解: A. $x^2 + x^3 \neq x^5$, 故选项不符合题意;
B. $(-a)^8 \div (-a)^3 = a^8 \div (-a^3) = -a^5$, 故选项不符合题意;
C. $x^6 - x^3 \neq x^2$, 故选项不符合题意;
D. $(3 \times 10^6) \times (5 \times 10^3) = 1.5 \times 10^{10}$, 故选项符合题意;

故选: D.

3. 下列语句正确的是 ()

- A. 一个单项式中, 所有字母的指数的和叫作这个单项式的系数.
B. 有限个单项式求和得到的代数式叫作整式. 单项式也是整式.

C. 单项式就是一次式.

D. 一个五次整式与一个五次整式的和是一个次数不大于五次的整式.

【答案】BD

【解析】

【分析】本题考查单项式的次数，单项式与多项式，整式的概念，整式的加减，根据定义逐项分析即可.

【详解】解：A. 一个单项式中，所有字母的指数的和叫作这个单项式的次数，故选项不正确；

B. 有限个单项式求和得到的代数式叫作整式，单项式也是整式，故选项正确；

C. 单项式并不一定是一次式，故选项不正确；

D. 一个五次整式与一个五次整式的和是一个次数不大于五次的整式，故选项正确；

故选：BD.

4. 下列结论中正确的是（ ）

A. 单项式 $\frac{\pi xy^2}{4}$ 的系数是 $\frac{1}{4}$ ，次数是 4

B. 单项式 $-xy^2z$ 的系数是 1，次数是 4

C. 单项式 m 的次数是 1，没有系数

D. 多项式 $2x^2 + xy^2 + 3$ 是三次三项式

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了单项式和多项式，根据单项式的系数和次数的定义、多项式的次数和项数的定义逐项判断即可求解，掌握以上知识点是解题的关键.

【详解】解：A、单项式 $\frac{\pi xy^2}{4}$ 的系数是 $\frac{\pi}{4}$ ，次数是 3，该选项结论错误，不合题意；

B、单项式 $-xy^2z$ 的系数是 -1 ，次数是 4，该选项结论错误，不合题意；

C、单项式 m 的次数是 1，系数是 1，该选项结论错误，不合题意；

D、多项式 $2x^2 + xy^2 + 3$ 是三次三项式，该选项结论正确，符合题意；

故选：D.

5. 若关于 x 的方程 $2x - \frac{1-ax}{3} = 2(x+1) - 1$ 的解是正整数，且关于 y 的多项式 $(a-2)y^2 + ay - 1$ 是二次三项式，那么所有满足条件的整数 a 的值之和是（ ）

A. 1

B. 3

C. 5

D. 7

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了解一元一次方程，多项式次数和项的定义，先解方程得到 $x = \frac{4}{a}$ ，根据方程的解为

正整数推出 $x = \frac{4}{a}$ 是整数, 进而得到解得 $a = 1$ 或 2 或 4 ; 再根据多项式次数和项的定义得到 $a \neq 0$ 且 $a \neq 2$, 据此得到所有满足条件的整数 a 的值为 $1, 4$, 由此可得答案.

【详解】解: $2x - \frac{1-ax}{3} = 2(x+1) - 1$

去分母得: $6x - (1-ax) = 6(x+1) - 3$,

去括号得: $6x - 1 + ax = 6x + 6 - 3$,

移项得: $ax = 6 - 3 + 1$,

合并同类项得: $ax = 4$,

系数化为 1 得: $x = \frac{4}{a}$,

$\therefore$ 关于 x 的方程 $2x - \frac{1-ax}{3} = 2(x+1) - 1$ 的解是正整数,

$\therefore \frac{4}{a}$ 是整数, 且 $a > 0$

$\therefore a = 1$ 或 2 或 4 ,

$\therefore (a-2)y^2 + ay - 1$ 是二次三项式,

$\therefore \begin{cases} a \neq 0 \\ (a-2) \neq 0 \end{cases}$,

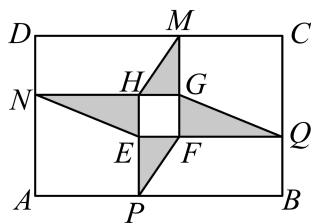
$\therefore a \neq 0$ 且 $a \neq 2$,

$\therefore$ 所有满足条件的整数 a 的值为 $1, 4$,

$\therefore$ 所有满足条件的整数 a 的值之积是 $1 + 4 = 5$,

故选: C.

6. 如图, 长方形 $ABCD$ 是由两个长为 a , 宽为 b 的长方形 $BPEQ$ 和 $DMGN$ ($a > b$), 两个相同的大正方形 $APHN$ 和 $FQCM$, 以及小正方形 $EFGH$ 无缝拼接组成. 若阴影部分 (四个直角三角形) 的面积是正方形 $EFGH$ 面积的 4 倍, 则 $\frac{a}{b}$ 的值是 ()



- A. 2 B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{7}{3}$ D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查整式运算的实际应用，设小正方形的边长为 x ，易得 $NH = FQ = a - x$ ，根据阴影部分（四个直角三角形）的面积是正方形 $EFGH$ 面积的4倍，得到 $ax - x^2 + bx = 4x^2$ ，进而求出 x 的值，根据正方形的边长相等，得到 $a - x = b + x$ ，进行求解即可.

【详解】解：设小正方形的边长为 x ，

由题意，得： $MG = PE = b, NG = EQ = a$

则： $NH = FQ = a - x$ ，

$\therefore$ 阴影部分（四个直角三角形）的面积为： $(a - x) \cdot x + bx = ax - x^2 + bx$ ，

正方形 $EFGH$ 面积的面积为 x^2 ，

$\therefore ax - x^2 + bx = 4x^2$ ，

$\therefore x = \frac{1}{5}(a + b)$ ，

$\because$ 四边形 $APHN$ 为正方形，

$\therefore NH = PH$ ，

$\therefore a - x = b + x$ ，

$\therefore a - \frac{1}{5}(a + b) = b + \frac{1}{5}(a + b)$ ，

整理得： $3a = 7b$ ，

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{7}{3}$ ；

故选C.

二、填空题（每题3分，共11题）

7. 若 a 的平方比甲数小2，则甲数是_____.

【答案】 $a^2 + 2$

【解析】

【分析】本题考查代数式，根据题意列出代数式即可.

【详解】解：根据题意得：甲数是 $a^2 + 2$ ，

故答案为： $a^2 + 2$

8. 若多项式 $(m-2)x^2y^3 - \pi^2xy^{n-1} + 2xy + 1$ 是四次三项式, 则 $m-n =$ _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查多项式的定义, 根据多项式是四次三项式可知 $m-2=0$, $n-1=2$, 可得 m 、 n 的值, 即可得解. 掌握多项式的定义是解题的关键. 也考查了求代数式的值.

【详解】 解: $\because$ 多项式 $(m-2)x^2y^3 - \pi^2xy^{n-1} + 2xy + 1$ 是四次三项式,

$$\therefore m-2=0, \quad 1+n-1=4,$$

$$\therefore m=2, \quad n=4,$$

$$\therefore m-n=2-4=-2.$$

故答案为: -2.

9. 已知 a 的绝对值为 3, m 与 n 互为相反数, y 与 x 互为倒数, 则 $-m-n+3xy-a$ 的值为_____.

【答案】 0 或 6 或 0

【解析】

【分析】 本题主要考查了有理数的混合运算、相反数、倒数的性质和应用等知识点, 掌握分类讨论思想成为解题的关键.

根据题意, 可得: $a = \pm 3, m+n=0, xy=1$, 然后分 $a=3$ 、 $a=-3$ 两种情况分别求解即可.

【详解】 解: $\because a$ 的绝对值为 3, m 与 n 互为相反数, y 与 x 互为倒数,

$$\therefore a = \pm 3, m+n=0, \quad xy=1,$$

$$\text{当 } a=3 \text{ 时, } -m-n+3xy-a = -(m+n)+3xy-a = 0+3-3=0;$$

$$\text{当 } a=-3 \text{ 时, } -m-n+3xy-a = -(m+n)+3xy-a = 0+3-(-3)=6.$$

故答案为: 0 或 6.

10. 已知: $3 \times 9^m \times 27^m = 3^{21}$, 求 $m =$ _____.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查同底数幂的乘法, 根据同底数幂的乘法法则计算即可得出答案.

【详解】 解: $3 \times 9^m \times 27^m = 3^{21}$,

$$3 \times 3^{2m} \times 3^{3m} = 3^{21},$$

$$1 + 2m + 3m = 21,$$

$$m = 4,$$

故答案为：4.

11. 计算： $3(-x^2)^3 \cdot (x^2)^5 - (-x^5)^2 \cdot (-x^3)^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-4x^{16}$

【解析】

【分析】 本题考查幂的乘方，同底数幂相乘，根据幂的乘方，同底数幂相乘的运算法则计算即可.

【详解】 解： $3(-x^2)^3 \cdot (x^2)^5 - (-x^5)^2 \cdot (-x^3)^2$

$$= 3 \times (-x^6) \cdot x^{10} - x^{10} \cdot x^6$$

$$= -4x^{16},$$

故答案为： $-4x^{16}$.

12. $\left(\frac{2}{3}\right)^{2023} \times 1.5^{2024} \times (-1)^{2023} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查幂的运算. 熟练掌握同底数幂乘法法则，积的乘方法则，是解决问题的关键. 逆用同底数幂相乘法法则和积的乘方法则，进行计算即可得到答案.

【详解】 解： $\left(\frac{2}{3}\right)^{2023} \times 1.5^{2024} \times (-1)^{2023}$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{2023} \times \frac{3}{2} \times (-1)^{2023}$$

$$= \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}\right)^{2023} \times \frac{3}{2} \times (-1)^{2023}$$

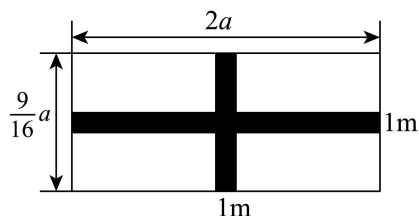
$$= 1^{2023} \times \frac{3}{2} \times (-1)^{2023}$$

$$= 1 \times \frac{3}{2} \times (-1)$$

$$= -\frac{3}{2}.$$

故答案为: $-\frac{3}{2}$.

13. 如图, 公园里一个长方形花坛, 长为 $2a$ 米, 宽为 $\frac{9}{16}a$ 米, 花坛中间横竖各铺设一条宽为 1 米的小路 (阴影部分), 剩余部分栽种花卉; 栽种花卉部分的面积是_____平方米.



【答案】 $\left(\frac{9}{8}a^2 - \frac{41}{16}a + 1\right)$

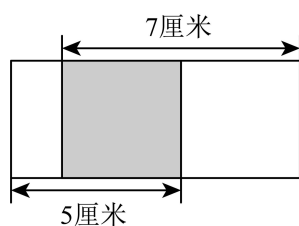
【解析】

【分析】 本题主要考查列代数式, 长方形的面积, 表示出栽种花卉部分的面积是解题的关键. 根据平移结合长方形的面积公式即可求解.

【详解】 解: $(2a-1)\left(\frac{9}{16}a-1\right)$
 $=\frac{9}{8}a^2 - 2a - \frac{9}{16}a + 1$
 $=\left(\frac{9}{8}a^2 - \frac{41}{16}a + 1\right)$ 平方米,

故答案为: $\left(\frac{9}{8}a^2 - \frac{41}{16}a + 1\right)$

14. 如图, 涂色部分是正方形, 图中最大的长方形的周长是 () 厘米.



【答案】 24

【解析】

【分析】 设正方形的边长为 x 厘米, 根据题意, 大长方形的长为 $5-x+7=12-x$, 宽为 x , 计算周长即可. 本题考查了列代数式、整式加减的应用, 熟练掌握长方形的周长的表示法是解题的关键.

【详解】 解: 设正方形的边长为 x 厘米, 根据题意, 大长方形的长为 $5-x+7=12-x$, 宽为 x ,

故大长方形的周长为 $2(12-x)+2x=24$ (厘米),

故答案为: 24.

15. 已知代数式 $(mx^2+2x)(x^2+3nx+2)$ 积是一个关于 x 的三次多项式, 且化简后含 x^2 项的系数为 1, 则

$n =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】 此题考查了多项式乘多项式的计算能力, 关键是能准确理解并运用该知识进行正确地求解. 运用多项式乘多项式的运算方法进行求解.

【详解】 解: $(mx^2+2x)(x^2+3nx+2)$

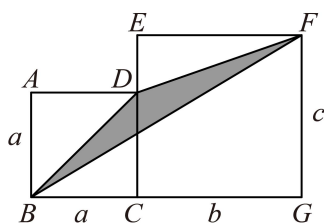
$$= mx^4 + 3mnx^3 + 2mx^2 + 2x^3 + 6nx^2 + 4x$$
$$= mx^4 + (3mn+2)x^3 + (2m+6n)x^2 + 4x$$

由题意得, $m=0$, $2m+6n=1$,

解得 $m=0$, $n=\frac{1}{6}$,

故答案为: $\frac{1}{6}$.

16. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 a , 长方形 $CEFG$ 的长和宽分别为 b 和 c , 且 $b>c>a$, 请用代数式表示阴影部分三角形 BDF 的面积_____.



【答案】 $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}ac + \frac{1}{2}ab$

【解析】

【分析】 本题考查列代数式以及整式的加减运算, 根据阴影部分三角形 BDF 的面积 $= S_{\text{正方形}ABCD} + S_{\text{长方形}CEFG} - S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BFG} - S_{\triangle DEF}$, 分别求出面积可得得出答案.

【详解】 解: 阴影部分三角形 BDF 的面积 $= S_{\text{正方形}ABCD} + S_{\text{长方形}CEFG} - S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BFG} - S_{\triangle DEF}$

$$= a^2 + bc - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}(a+b)c - \frac{1}{2}(c-a)b$$

$$= \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}ac + \frac{1}{2}ab,$$

故答案为: $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}ac + \frac{1}{2}ab$.

17. 已知正方形 $ABCD$ 内部摆放两个一样大小的长方形, 长方形长为 b , 宽为 $a (b > a)$, 按图 1 摆放的阴影面积为 S_1 , 按图 2 摆放的阴影面积为 S_2 , 按图 3 摆放的阴影面积为 S_3 . 若 $b - a = \frac{3}{2}$, $S_1 - S_3 = 0.75$, $S_2 - S_3 = 3.75$, 则 a 的值为_____.

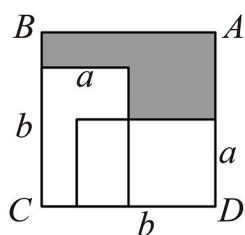


图1

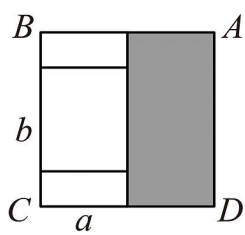


图2

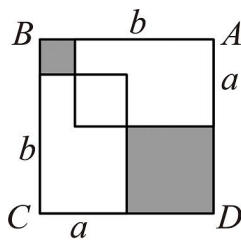


图3

【答案】2

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式, 整式加减的应用, 数形结合是解答本题的关键. 设正方形 $ABCD$ 的边长为 m , 用含 m, a, b 的代数式表示出 S_1, S_2, S_3 , 根据 $S_1 - S_3 = 0.75$ 得

$$-m^2 + am + 2bm - b^2 - ab = 0.75 \text{ ①}, \text{ 根据 } S_2 - S_3 = 3.75 \text{ 得 } -m^2 + am + 2bm - a^2 - b^2 = 3.75 \text{ ②}, \text{ ②} - \text{①}$$

得 $ab - a^2 = 3$, 进而可求出 a 的值.

【详解】 解: 设正方形 $ABCD$ 的边长为 m ,

$$\text{由图 1 得: } S_1 = m^2 - ab - a(m - a) = m^2 - am + a^2 - ab,$$

$$\text{由图 2 得: } S_2 = m(m - a) = m^2 - ma,$$

$$\text{由图 3 得: } S_3 = (m - a)^2 + (m - b)^2 = 2m^2 - 2am - 2bm + a^2 + b^2,$$

$$\therefore S_1 - S_3 = 0.75,$$

$$\therefore m^2 - am + a^2 - ab - (2m^2 - 2am - 2bm + a^2 + b^2) = 0.75,$$

$$\therefore -m^2 + am + 2bm - b^2 - ab = 0.75 \text{ ①}.$$

$$\therefore S_2 - S_3 = 3.75,$$

$$\therefore m^2 - ma - (2m^2 - 2am - 2bm + a^2 + b^2) = 3.75,$$

$$\therefore -m^2 + am + 2bm - a^2 - b^2 = 3.75 \text{ ②},$$

②-①, 得

$$ab - a^2 = 3,$$

$$\therefore a(b - a) = 3,$$

$$\therefore b - a = \frac{3}{a},$$

$$\therefore a = 2.$$

故答案为: 2.

三、化简 (每题 4 分, 共 5 题)

18. $(-2m^3)^3 + 5m \cdot (m^2)^4.$

【答案】 $-3m^9$

【解析】

【分析】 本题考查积的乘方, 同底数幂的乘法, 合并同类项, 积的乘方, 同底数幂的乘法, 合并同类项运算法则计算即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & (-2m^3)^3 + 5m \cdot (m^2)^4 \\ &= -8m^9 + 5m^9 \\ &= -3m^9. \end{aligned}$$

19. $(x^m + 2y^m)(x^m - 2y^m) - x^m(x^m - 2y^m), m, n$ 为正整数.

【答案】 $-4y^{2m} + 2x^m y^m$

【解析】

【分析】 本题考查幂的运算, 平方差公式; 根据平方差公式以及幂的乘方, 同底数幂的乘法进行计算即可求解.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & (x^m + 2y^m)(x^m - 2y^m) - x^m(x^m - 2y^m) \\ &= (x^m)^2 - (2y^m)^2 - x^{2m} + 2x^m y^m \\ &= x^{2m} - 4y^{2m} - x^{2m} + 2x^m y^m \end{aligned}$$

$$= -4y^{2m} + 2x^m y^m$$

20. 化简: $(-xy)^3 \cdot xy^3 \div \left(-\frac{1}{3}xy^3\right)^2$.

【答案】 $-9x^2$

【解析】

【分析】 本题考查积的乘方，单项式乘以单项式，单项式除以单项式，根据积的乘方，单项式乘以单项式，单项式除以单项式的运算法则计算即可

【详解】 解: $(-xy)^3 \cdot xy^3 \div \left(-\frac{1}{3}xy^3\right)^2$

$$= -x^3 y^3 \cdot xy^3 \div \frac{1}{9} x^2 y^6$$

$$= -9x^3 y^3 \cdot xy^3 \div x^2 y^6$$

$$= -9x^2$$

21. $\left[(2x+y)^2 - y(y+4x) - 8x\right] \div (-2x)$.

【答案】 $-2x+4$

【解析】

【分析】 此题主要考查整式的混合运算，根据完全平方公式与整式的除法即可化简求解.

【详解】 解: $\left[(2x+y)^2 - y(y+4x) - 8x\right] \div (-2x)$

$$= (4x^2 + 4xy + y^2 - y^2 - 4xy - 8x) \div (-2x)$$

$$= (4x^2 - 8x) \div (-2x)$$

$$= -2x + 4$$

22. 计算: $\frac{1}{9}a^4b^8c^3 - (-ab)^3 \cdot (-a^2b^4c^3) \div \left[2\left(-\frac{3}{2}abc\right)^3\right]$.

【答案】 $\frac{1}{9}a^4b^8c^3 + \frac{4}{27}a^2b^4$

【解析】

【分析】 本题考查积的乘方，单项式乘以单项式，单项式除以单项式，正确计算是解题的关键.

【详解】 解: 原式 $= \frac{1}{9}a^4b^8c^3 + a^3b^3 \cdot (-a^2b^4c^3) \div \left(-\frac{27}{4}a^3b^3c^3\right)$

$$= \frac{1}{9}a^4b^8c^3 - a^5b^7c^3 \div \left(-\frac{27}{4}a^3b^3c^3\right)$$

$$= \frac{1}{9}a^4b^8c^3 + \frac{4}{27}a^2b^4.$$

四、解答题 (23-27 每题 5 分, 28 题 4 分)

23. 马虎同学在计算一个多项式 A 减去另一个多项式 $2x^2 + 5x - 3$ 时, 错将减号抄成了加号, 于是他得到的结果是 $x^2 + 3x - 7$, 请问如果不抄错, 正确答案该是多少?

【答案】 $-3x^2 - 7x - 1$

【解析】

【分析】 本题考查了整式的加减运算, 根据题意可求出多项式 A, 再正确列出算式计算即可求解, 掌握整式的加减运算法则是解题的关键.

【详解】 解: 由题意可知: $A + (2x^2 + 5x - 3) = x^2 + 3x - 7$,

$$\therefore A = x^2 + 3x - 7 - (2x^2 + 5x - 3) = -x^2 - 2x - 4,$$

$$\therefore \text{正确答案为: } -x^2 - 2x - 4 - (2x^2 + 5x - 3) = -x^2 - 2x - 4 - 2x^2 - 5x + 3 = -3x^2 - 7x - 1.$$

24. 先化简, 再求值:

已知 $A = x^2 - xy + y^2$, $B = x^2 + xy + 3y^2$, 其中 $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{3}{2}$. 求 $A + (B - 2A)$ 的值.

【答案】 $2xy + 2y^2$; $\frac{13}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查整式的加减—化简求值, 利用整式的加减法的法则进行化简, 再把相应的值代入运算即可.

【详解】 解: $A + (B - 2A)$

$$= A + B - 2A$$

$$= B - A,$$

$$\because A = x^2 - xy + y^2, \quad B = x^2 + xy + 3y^2,$$

$$\therefore \text{原式} = x^2 + xy + 3y^2 - (x^2 - xy + y^2)$$

$$= x^2 + xy + 3y^2 - x^2 + xy - y^2$$

$$= 2xy + 2y^2$$

当 $x = \frac{2}{3}, y = \frac{3}{2}$ 时,

$$\text{原式} = 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} + 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2 + \frac{9}{2} = \frac{13}{2}$$

25. 已知关于 x, y 的整式 $ax^3y^2 + x^2y^3 - 2x^2y - 6xy - 6 + (a-1)x^2y + 2bxy^2 - 1$ 中不含三次项, 求 a, b 的值, 并将整式按 y 的升幂排列.

【答案】 $a = 3, b = 0, -7 - 6xy + 3x^3y^2 + x^2y^3$

【解析】

【分析】 本题考查多项式的项的定义, 升幂排列的定义, 排列多项式各项时, 要保持其原有的符号. 根据多项式的定义, 升幂排列的定义, 解答即可.

【详解】 解: 原式 $= ax^3y^2 + x^2y^3 - 2x^2y - 6xy - 6 + (a-1)x^2y + 2bxy^2 - 1$

$$= ax^3y^2 + x^2y^3 + (a-3)x^2y + 2bxy^2 - 6xy - 7,$$

$\because$ 原式不含三次项,

$$\therefore a-3=0, \quad 2b=0,$$

$$\therefore a=3, \quad b=0,$$

$$\therefore \text{原式} = -7 - 6xy + 3x^3y^2 + x^2y^3$$

26. 若 $a = \frac{m}{2027} + 2025, b = \frac{m}{2027} + 2026, c = \frac{m}{2027} + 2027$, 求 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ 的值.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查了代数式求值, 完全平方公式; 先求出 $a-b=-1, b-c=-1, a-c=-2$, 再利用完全平方公式对原式进行变形, 最后整体代入计算即可.

【详解】 解: $\because a = \frac{m}{2027} + 2025, b = \frac{m}{2027} + 2026, c = \frac{m}{2027} + 2027,$

$$\therefore a-b = \frac{m}{2027} + 2025 - \frac{m}{2027} - 2026 = -1, \quad b-c = \frac{m}{2027} + 2026 - \frac{m}{2027} - 2027 = -1,$$

$$a-c = \frac{m}{2027} + 2025 - \frac{m}{2027} - 2027 = -2,$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

$$= \frac{1}{2} \times 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left[(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (a^2 - 2ac + c^2) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \times \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \times \left[(-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \times (1+1+4) \\
&= \frac{1}{2} \times 6 \\
&= 3.
\end{aligned}$$

27. 已知 $m^x = 2023$, $n^y = 2023$, 且 $mn = 2023$, 求 $\frac{x+y}{xy}$ 的值.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查同底数幂的乘方, 解题的关键是熟练运用整式乘法公式, 根据 $2023^{x+y} = (mn)^{xy} = 2023^{xy}$ 解答即可.

【详解】 解: $\because m^x = 2023$, $n^y = 2023$, $mn = 2023$,

$$\therefore 2023^{x+y} = 2023^x \cdot 2023^y = (n^y)^x \cdot (m^x)^y = (mn)^{xy} = 2023^{xy},$$

$$\therefore x+y = xy,$$

$$\therefore \frac{x+y}{xy} = 1.$$

28. 已知: $4a^2b^4 + a^2b^2 - 4ab^2 + b^2 + \frac{1}{4} = 0$, 求 $a^2 + b^2$ 的值.

【答案】 $\frac{5}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查配方法的应用, 非负数的性质, 解题的关键是注意配方法的步骤, 在变形的过程中不要改变式子的值. 利用配方法把原式变形, 根据非负数的性质解答即可.

$$\text{【详解】 解: 原式} = \left(2ab^2 - \frac{1}{2} \right)^2 + b^2(a-1)^2 = 0,$$

$$\therefore 2ab^2 - \frac{1}{2} = 0 \text{ 且 } b^2(a-1)^2 = 0,$$

$$\therefore \begin{cases} 2ab^2 - \frac{1}{2} = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 2ab^2 - \frac{1}{2} = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = 1 \\ b^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$