

2024-1 交中德富七年级数学学科单元诊断卷

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分).

1. 下列等式成立的是 ()

- A. $a^2 + a^2 = a^4$ B. $a^2 \cdot a^4 = a^8$ C. $(a^3)^n = a^{3n}$ D. $(2a)^3 = 2a^3$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了同底数幂的乘法、幂的乘方、积的乘方等知识, 掌握幂的运算性质是关键; 根据合并同类项知识可判断 A; 根据同底数幂的乘法、幂的乘方、积的乘方可分别判断 B、C、D.

【详解】解: A、 $a^2 + a^2 = 2a^2 \neq a^4$, 故等式不成立;

B、 $a^2 \cdot a^4 = a^6 \neq a^8$, 故等式不成立;

C、 $(a^3)^n = a^{3n}$, 故等式成立;

D、 $(2a)^3 = 8a^3 \neq 2a^3$, 故等式不成立;

故选: C.

2. 下列代数式 $\frac{x+a}{2}, 2x^3y, \frac{1}{n}, \frac{4a}{3-b}, -1, a, 3x^2+2x-1$ 中, 单项式有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】C

【解析】

【分析】根据单项式的定义求解.

【详解】 $\frac{x+a}{2}, 2x^3y, \frac{1}{n}, \frac{4a}{3-b}, -1, a, 3x^2+2x-1$ 中, 单项式有: $2x^3y, -1, a$, 共 3 个.

故选 C.

【点睛】本题主要考查了单项式的定义: 数字与字母的乘积叫做单项式, 单独的一个数字或字母也叫做单项式. 注意单项式一定不含加减运算.

3. 下列多项式乘以多项式能用平方差公式计算的是 ()

- A. $(-a+3b)(-a-3b)$ B. $(a+3b)(-a-3b)$
C. $(a-3b)(-a+3b)$ D. $(-a-3b)(-a-3b)$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了平方差公式，两数的和与这两个数的差的积等于这两个数的平方差，掌握公式的特点是解题的关键。根据平方差公式的特点分析即可。

【详解】解：A、满足平方差公式的特点，能用平方差公式计算，符号题意；

B、 $(a+3b)(-a-3b) = -(a+3b)^2$ ，不能用平方差公式计算，不符号题意；

C、 $(a-3b)(-a+3b) = -(a-3b)(a-3b)$ ，不能用平方差公式计算，不符号题意；

D、两个因式都是两数的差的积，不能用平方差公式计算，不符号题意；

故选：A。

4. $(-2-3x^2)^2$ 计算结果正确的是 ()

A. $9x^4 - 12x^2 + 4$

B. $9x^4 + 12x^2 + 4$

C. $9x^4 - 12x^2 - 4$

D. $-9x^4 - 12x^2 - 4$

【答案】B

【解析】

【分析】解：本题考查了完全平方公式，熟记完全平方公式是解题的关键；直接利用完全平方公式展开即可。

【详解】解： $(-2-3x^2)^2 = (3x^2+2)^2 = 9x^4 + 12x^2 + 4$ ；

故选：B。

5. 下列四个从左到右的变形中，是因式分解的是 ()

A. $(2x+1)(2x-1) = 4x^2 - 1$

B. $x^2 + 2x - 3 = x(x+2) - 3$

C. $ab - a - b + 1 = (a-1)(b-1)$

D. $m^2 - 2m - 3 = m\left(m - 2 - \frac{3}{m}\right)$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查因式分解的定义，正确理解因式分解的定义是解题的关键。因式分解就是把多项式转化成几个整式的积的形式，根据定义即可作出判断。

【详解】解：A. $(2x+1)(2x-1) = 4x^2 - 1$ 为多项式乘法，不符合题意；

B. $x^2 + 2x - 3 = x(x+2) - 3$ ，结果不是整式的积的形式，不是因式分解，不符合题意；

C. $ab - a - b + 1 = (a-1)(b-1)$ ，符合因式分解的定义，符合题意；

D. $m^2 - 2m - 3 = m\left(m - 2 - \frac{3}{m}\right)$, 结果中存在分式, 不是整式的积的形式, 不符合题意.

故选 C.

6. 如果 $x^2 + px + q = \frac{1}{2}(2x+1)(x+4)$, 那么 p 、 q 的值是 ()

A. $p = \frac{9}{2}$, $q = 2$ B. $p = 9$, $q = 4$ C. $p = \frac{9}{2}$, $q = 4$ D. $p = 9$, $q = 2$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了多项式乘以多项式, 根据多项式乘以多项式的计算法则求出 $\frac{1}{2}(2x+1)(x+4)$ 展开的结果即可得到答案.

【详解】解: $\because x^2 + px + q = \frac{1}{2}(2x+1)(x+4)$,

$$\therefore x^2 + px + q = \frac{1}{2}(2x^2 + x + 8x + 4),$$

$$\therefore x^2 + px + q = x^2 + \frac{9}{2}x + 2,$$

$$\therefore p = \frac{9}{2}, q = 2,$$

故选: A.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分).

7. 单项式 $-\frac{4x^2y}{3}$ 的系数是_____, 次数是_____.

【答案】 ①. $-\frac{4}{3}$ ②. 3

【解析】

【分析】本题考查单项式的系数和次数的定义, 解题的关键是熟练掌握相关的定义. 根据单项式的次数是所含所有字母指数的和, 单项式中的数字因数是单项式的系数, 由此即可求解.

【详解】解: 单项式 $-\frac{4x^2y}{3}$ 的系数是 $-\frac{4}{3}$, 次数是 3.

故答案为: $-\frac{4}{3}$, 3.

8. 小红有 12 元钱, 她买了 a 本作业本, 每本 b 元, 还剩_____元.

【答案】 $(12 - ab)$

【解析】

【分析】本题考查了列代数式, 理解题意、掌握常见数量关系是关键; 总钱数减去买作业本花去的钱数得

剩下的钱数，由此列出代数式即可.

【详解】解：由题意得：买作业本花去 ab 元，剩下 $(12 - ab)$ 元；

故答案为： $(12 - ab)$.

9. 如果单项式 $\frac{7}{8}x^{m-1}y^{2n}$ 与 $-\frac{3}{5}x^3y^{n+3}$ 的和仍是单项式，那么 $mn = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 12 .

【解析】

【分析】根据题意得到两单项式为同类项，利用同类项定义求出 m 与 n 的值即可. 所含字母相同，并且相同字母的指数也相同，这样的项叫做同类项.

【详解】 $\because$ 单项式 $\frac{7}{8}x^{m-1}y^{2n}$ 与 $-\frac{3}{5}x^3y^{n+3}$ 的和仍是单项式，

$$\therefore m - 1 = 3, 2n = n + 3,$$

$$\text{解得 } m = 4, n = 3.$$

$$\therefore mn = 4 \times 3 = 12.$$

故答案为： 12

【点睛】此题考查了合并同类项，熟练掌握合并同类项法则是解本题的关键.

10. 计算： $(-2x)^3 \cdot (5x^2y)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-200x^7y^2$

【解析】

【分析】本题考查了积的乘方，单项式乘单项式，掌握两种运算的法则是关键；分别计算积的乘方，再计算单项式乘单项式即可.

【详解】解： $(-2x)^3 \cdot (5x^2y)^2 = -8x^3 \cdot 25x^4y^2 = -200x^7y^2$;

故答案为： $-200x^7y^2$.

11. 分解因式： $x(x-y)^2 - (y-x)y^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(x^2 - xy + y^2)(x - y)$

【解析】

【分析】本题主要考查了分解因式，直接提取公因式 $(x - y)$ 进行分解因式即可.

【详解】解： $x(x-y)^2 - (y-x)y^2$

$$= [x(x-y) + y^2](x-y)$$

$$= (x^2 - xy + y^2)(x-y)$$

故答案为: $(x^2 - xy + y^2)(x-y)$.

12. 如果 $(x+q)\left(x+\frac{1}{5}\right)$ 展开式中不含 x 项, 则 $q =$ _____.

【答案】 $-\frac{1}{5}$

【解析】

【详解】 $(x+q)\left(x+\frac{1}{5}\right) = x^2 + \frac{1}{5}x + qx + \frac{1}{5}q = x^2 + \left(\frac{1}{5} + q\right)x + \frac{1}{5}q$,

$\because (x+q)\left(x+\frac{1}{5}\right)$ 展开式中不含 x 项,

$$\therefore \frac{1}{5} + q = 0,$$

$$\therefore q = -\frac{1}{5}.$$

故答案为 $-\frac{1}{5}$.

13. 计算: (1) $-a^3 \cdot (-a)^2 =$ _____; (2) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 =$ _____.

【答案】 ① $-a^5$ ② $\frac{1}{64}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了积的乘方, 熟练掌握积的乘方运算法则进行求解是解决本题的关键; 根据积的乘方计算法则求解即可.

【详解】 解: (1) $-a^3 \cdot (-a)^2$

$$= -a^3 \cdot a^2$$

$$= -a^{3+2}$$

$$= -a^5;$$

(2) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^3$

$$= \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \times \left(-\frac{1}{2} \right) \right]^3$$

$$= \left(\frac{1}{4} \right)^3$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{64};$$

故答案为: $-a^5$, $\frac{1}{64}$.

14. 比较大小: $(2^3)^4$ _____ $(3^4)^2$ (填“>”、“<”或“=”).

【答案】<

【解析】

【分析】本题主要考查了幂的乘方计算, 幂的乘方的逆运算, 根据幂的乘方计算法则得到 $(2^3)^4 = 8^4$, 根据幂的乘方的逆运算法则和幂的乘方计算法则得到 $(3^4)^2 = 9^4$, 再由 $8^4 < 9^4$ 即可得到答案.

【详解】解: $(2^3)^4 = 8^4$, $(3^4)^2 = [(9)^2]^2 = 9^4$,

$$\therefore 8 < 9,$$

$$\therefore 8^4 < 9^4,$$

$$\therefore (2^3)^4 < (3^4)^2,$$

故答案为: <.

15. 已知 $a - 3b = 1$ 则 $2 - 3a + 9b =$ _____.

【答案】-1

【解析】

【分析】本题主要考查了代数式求值, 添括号, 根据 $2 - 3a + 9b = 2 - 3(a - 3b)$, 利用整体代入法求解即可.

【详解】解: $\because a - 3b = 1$,

$$\therefore 2 - 3a + 9b = 2 - 3(a - 3b) = 2 - 3 \times 1 = -1,$$

故答案为: -1.

16. 计算: $2002 \times 2004 - 2003^2 =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题主要考查了平方差公式，先把原式变形为 $(2003-1) \times (2023+1) - 2003^2$ ，再利用平方差公式去括号后计算减法即可得到答案.

【详解】 解： $2002 \times 2004 - 2003^2$
 $= (2003-1) \times (2023+1) - 2003^2$
 $= 2023^2 - 1^2 - 2003^2$
 $= -1,$

故答案为： -1.

17. 若 $\frac{1}{4}x^2 + kx + 36$ 是一个完全平方式，则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 ± 6

【解析】

【分析】 本题考查完全平方式，掌握完全平方式的结构特点是解题关键. 利用完全平方式的结构特征求解即可.

【详解】 解： 因为 $\frac{1}{4}x^2 + kx + 36$ 是一个完全平方式，
所以 $|k| = 2 \times \frac{1}{2} \times 6 = 6,$

所以 $k = \pm 6$

故答案为： ± 6 .

18. 设 $(2x^2 - x - 1)^5 = a_{10}x^{10} + a_9x^9 + \cdots + a_1x + a_0$ ，则 $a_9 + a_7 + a_5 + a_3 + a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -16

【解析】

【分析】 本题考查了多项式的乘法，利用赋值思想与方程思想是解题的关键；分别令 $x=1$ 与 $x=-1$ ，得到两式，两式相减即可求解.

【详解】 解： 令 $x=1$ ，则 $a_{10} + a_9 + \cdots + a_1 + a_0 = 0$ ①；

令 $x=-1$ ，则 $a_{10} - a_9 + \cdots + a_2 - a_1 + a_0 = 2^5$ ②；

① - ② 得： $2(a_9 + a_7 + a_5 + a_3 + a_1) = -32,$

$$\therefore a_9 + a_7 + a_5 + a_3 + a_1 = -16,$$

故答案为：-16.

三、解答题（本大题共 4 题，每题 6 分，满分 24 分）

19. 计算： $-\frac{9}{2}a^2b - 3ab^2 + \frac{10}{2}a^2b + \frac{2}{5}ab^2$

【答案】 $\frac{1}{2}a^2b - \frac{13}{5}ab^2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了合并同类项，合并同类项时，只对同类项的系数进行加减计算，字母和字母的指数都保持不变，据此求解即可.

【详解】 解： $-\frac{9}{2}a^2b - 3ab^2 + \frac{10}{2}a^2b + \frac{2}{5}ab^2$

$$= \left(-\frac{9}{2} + \frac{10}{2}\right)a^2b - \left(3 - \frac{2}{5}\right)ab^2$$

$$= \frac{1}{2}a^2b - \frac{13}{5}ab^2.$$

20. 计算： $(a+b-2c)(a-b+2c)$

【答案】 $a^2 - b^2 + 4bc - 4c^2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了平方差公式和完全平方公式，先把原式变形为 $[a+(b-2c)][a-(b-2c)]$ ，再利用平方差公式去括号，接着利用完全平方公式去括号即可得到答案.

【详解】 解： $(a+b-2c)(a-b+2c)$

$$= [a+(b-2c)][a-(b-2c)]$$

$$= a^2 - (b-2c)^2$$

$$= a^2 - (b^2 - 4bc + 4c^2)$$

$$= a^2 - b^2 + 4bc - 4c^2.$$

21. 计算： $\left(2x^3y^2 - 2x^2y + \frac{1}{8}x^4y\right) \div \left(-\frac{1}{2}x^3y\right)$

【答案】 $-4y + 4x^{-1} - \frac{1}{4}x$

【解析】

【分析】 本题主要考查了多项式除以单项式，直接根据多项式除以单项式的计算法则求解即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \left(2x^3y^2 - 2x^2y + \frac{1}{8}x^4y\right) \div \left(-\frac{1}{2}x^3y\right) \\ &= 2x^3y^2 \div \left(-\frac{1}{2}x^3y\right) - 2x^2y \div \left(-\frac{1}{2}x^3y\right) + \frac{1}{8}x^4y \div \left(-\frac{1}{2}x^3y\right) \\ &= -4y + 4x^{-1} - \frac{1}{4}x. \end{aligned}$$

22. 分解因式: $(5a+2b)^2 - 9a^2$

【答案】 $4(a+b)(4a+b)$

【解析】

【分析】 本题考查因式分解，掌握综合提公因式和公式法分解因式是解题关键. 先根据平方差公式计算，再提取公因式即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & (5a+2b)^2 - 9a^2 \\ &= (5a+2b-3a)(5a+2b+3a) \\ &= (2a+2b)(8a+2b) \\ &= 4(a+b)(4a+b). \end{aligned}$$

23. 分解因式: $x^3y - 6x^2y^2 + 9xy^3$

【答案】 $xy(x-3y)^2$

【解析】

【分析】 先提取公因式 xy ，再根据完全平方公式分解因式.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & x^3y - 6x^2y^2 + 9xy^3 \\ &= xy(x^2 - 6xy + 9y^2) \\ &= xy(x-3y)^2 \end{aligned}$$

【点睛】 考查了因式分解-运用公式法，要注意公式的综合应用，分解到每一个因式都不能再分解为止.

24. 分解因式: $(x^2+x)^2 - 3(x^2+x) + 2$

【答案】 $(x-1)(x+2)(x^2+x-1)$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解，利用十字相乘法分解因式；先利用十字相乘法分解，再继续利用十字相乘法分解即可．

$$\begin{aligned} \text{【详解】解：} & (x^2+x)^2-3(x^2+x)+2 \\ &= (x^2+x-1)(x^2+x-2) \\ &= (x-1)(x+2)(x^2+x-1) . \end{aligned}$$

四、简答题（本大题共 4 小题，每题 7 分，满分 28 分）

25. 先化简，再求值： $\frac{1}{3}y^2-4x^2y-[4y^2+(-6yx^2+xy-y^2)-xy]$ ，其中 $x=-\frac{1}{2}$ ， $y=-1$ ．

【答案】 $-\frac{8}{3}y^2+2x^2y$ ； $-\frac{19}{6}$

【解析】

【分析】 本题考查了整式加减的化简求值；从内往外依次去括号，再合并同类项，最后代值计算即可．注意每去一层括号，要合并同类项后，再去括号，减少运算量．

$$\begin{aligned} \text{【详解】解：} & \frac{1}{3}y^2-4x^2y-[4y^2+(-6yx^2+xy-y^2)-xy] \\ &= \frac{1}{3}y^2-4x^2y-(4y^2-6yx^2+xy-y^2-xy) \\ &= \frac{1}{3}y^2-4x^2y-(3y^2-6yx^2) \\ &= \frac{1}{3}y^2-4x^2y-3y^2+6yx^2 \\ &= -\frac{8}{3}y^2+2x^2y ; \end{aligned}$$

当 $x=-\frac{1}{2}$ ， $y=-1$ 时，

$$\begin{aligned} \text{原式} &= -\frac{8}{3} \times (-1)^2 + 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \times (-1) \\ &= -\frac{19}{6} . \end{aligned}$$

26. 设 $A=2x^2-3xy+y^2-x+2y$ ， $B=4x^2-6xy+2y^2-3x-y$ ．

(1) 求： $B-2A$ ；

(2) 若 $|x-2a|+(y+3)^2=0$ ，且 $B-2A=a$ ，求 a 的值.

【答案】(1) $-x-5y$

(2) $a=5$

【解析】

【分析】本题考查了整式的加减运算，非负数的性质，解一元一次方程等知识，关键是熟练进行整式加减运算.

(1) 去括号，再合并同类项即可；

(2) 由非负数的性质求得 x 、 y 的值，再把两个值代入等式中即可求得结果.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: } B-2A &= 4x^2-6xy+2y^2-3x-y-2(2x^2-3xy+y^2-x+2y) \\ &= 4x^2-6xy+2y^2-3x-y-4x^2+6xy-2y^2+2x-4y \\ &= -x-5y; \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: } \because |x-2a| \geq 0, (y+3)^2 \geq 0, \text{ 且 } |x-2a|+(y+3)^2 &= 0, \\ \therefore x-2a &= 0, y+3=0, \\ \therefore x &= 2a, y=-3; \\ \because B-2A &= a, \\ \therefore -x-5y &= a; \end{aligned}$$

把 $x=2a$, $y=-3$ 代入上式中，得: $-2a-5 \times (-3)=a$,

解得: $a=5$.

27. 矩形的周长是 28cm，两边 x ， y 使 $x^3+x^2y-xy^2-y^3=0$ ， x ， y 是正整数. 求矩形的面积.

【答案】 49cm^2

【解析】

【分析】本题考查了因式分解的应用；把 $x^3+x^2y-xy^2-y^3=0$ 变形得 $(x+y)^2(x-y)=0$ ，由此得 $x=y$ ；由矩形周长得 $x=y=7$ ，从而求得面积.

【详解】解: $\because x^3+x^2y-xy^2-y^3=0$,

$$\therefore x^2(x+y) - y^2(x+y) = 0,$$

$$\text{即 } (x+y)(x^2 - y^2) = 0,$$

$$\therefore (x+y)^2(x-y) = 0,$$

$\because x, y$ 是正整数,

$$\therefore (x+y)^2 \neq 0,$$

$$\therefore x - y = 0,$$

$$\therefore x = y;$$

$\because$ 矩形周长为 28cm,

$$\therefore 4x = 28,$$

$$\therefore x = y = 7\text{cm},$$

$\therefore$ 矩形面积为: $7 \times 7 = 49(\text{cm}^2)$.

28. 已知 $a^2 - 4a - 1 = 0$,

(1) 求 $a^2 + \frac{1}{a^2}$ 的值;

(2) 求 $(a-2)\left(\frac{1}{a} + 2\right)$ 的值.

【答案】(1) 18 (2) 5

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式变形运用, 掌握完全平方公式是解题的关键.

(1) 由 $a^2 - 4a - 1 = 0$ 可变形为 $a - \frac{1}{a} = 4$, 利用完全平方公式即可求解;

(2) 先相乘后整理得 $2\left(a - \frac{1}{a}\right) - 3$, 再整体代入即可.

【小问 1 详解】

解: $\because a^2 - 4a - 1 = 0$, 且 $a \neq 0$,

$$\therefore a - 4 - \frac{1}{a} = 0,$$

$$\text{即 } a - \frac{1}{a} = 4,$$

$$\therefore \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = 16,$$

$$\text{即 } a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 = 16,$$

$$\therefore a^2 + \frac{1}{a^2} = 18;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because (a-2)\left(\frac{1}{a}+2\right) = 1 - \frac{2}{a} + 2a - 4 = 2\left(a - \frac{1}{a}\right) - 3,$$

$$\therefore (a-2)\left(\frac{1}{a}+2\right) = 2 \times 4 - 3 = 5.$$

五、解答题 (本大题共 1 题, 满分 6 分)

29. 我们知道, 对于一个图形, 通过两种不同的方法计算它的面积, 可以得到一个数学等式. 例如图 1 可以得到 $(a+2b)(a+b) = a^2 + 3ab + 2b^2$. 请解答下列问题:

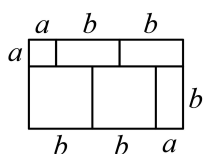


图1

(1) 写出图 2 中所表示的数学等式;

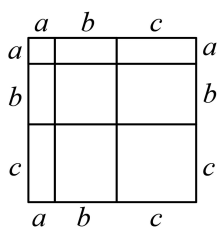


图2

(2) 利用 (1) 中所得到的结论, 解决下面的问题: 已知 $a+b+c=12$, $ab+bc+ac=47$, 求 $a^2+b^2+c^2$ 的值;

(3) 小明同学打算用 x 张边长为 a 的正方形, y 张边长为 b 的正方形, z 张相邻两边长分别为 a 、 b 的长方形纸片拼出了一个面积为 $(5a+8b)(7a+4b)$ 长方形, 那么他总共需要多少张纸片?

【答案】(1) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$; (2) 50; (3) 143.

【解析】

【分析】(1) 直接求得正方形的面积, 再根据正方形的面积=各矩形的面积之和求解即可.

(2) 将 $a+b+c=12$, $ab+bc+ac=47$ 代入 (1) 中得到的式子, 然后计算即可;

(3) 长方形的面积 $(5a+8b)(7a+4b)=xa^2+yb^2+zab$, 然后运算多项式乘多项式, 从而求得 x 、 y 、 z 的值, 代入即可求解.

【详解】解: (1) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$$(2) \text{ 由 (1) 可知: } a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ = (12)^2 - 2 \times 47 = 50$$

(3) 根据题意得, $(5a+8b)(7a+4b)=xa^2+yb^2+zab$

$$35a^2 + 76ab + 32b^2 = xa^2 + yb^2 + zab$$

所以 $x=35$, $y=76$, $z=32$

所以 $x+y+z=143$

答: 小明总共需要 143 张纸.

【点睛】本题主要考查整式的运算, 难度较大, 熟练掌握整式的运算以及代数式求值是解题关键.

拓展部分 (共 20 分, 第 1, 2, 3, 4, 5 每题 3 分; 第 6 题 5 分)

30. 分解因式: $a^4 - 7a^2 + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\left(a - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(a + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(a - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(a + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

【解析】

【分析】本题考查了实数范围内因式分解, 利用完全平方公式与平方差公式是解题的关键; 先把前两项凑成完全平方, 再利用平方差公式分解, 再对每一个因式继续利用平方差公式分解; 把一个二次根式表示成一个实数的平方是解题的关键.

【详解】解: $a^4 - 7a^2 + 1$

$$= \left[a^4 - 2 \times a^2 \times \frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 \right] - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 1$$

$$= \left(a^2 - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{45}{4}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(a^2 - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\
 &= \left(a^2 - \frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)\left(a^2 - \frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right) \\
 &= \left[a^2 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]\left[a^2 - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] \\
 &= \left(a - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(a + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(a - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(a + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).
 \end{aligned}$$

31. 已知 $a+b=2$, $b+c=17$, 求 $2a^2+3b^2+3c^2+2ab+4bc-2ac=$ _____.

【答案】 807

【解析】

【分析】 本题主要考查了完全平方公式，先求出 $a-c=-15$ ，再利用完全平方公式把所求式子变形为 $(a-c)^2+(a+b)^2+2(b+c)^2$ ，据此求解即可.

【详解】 解： $\because a+b=2$, $b+c=17$,

$$\therefore a-c=-15,$$

$$\therefore 2a^2+3b^2+3c^2+2ab+4bc-2ac$$

$$= (a^2-2ac+c^2) + (a^2+2ab+b^2) + 2(b^2+2bc+c^2)$$

$$= (a-c)^2 + (a+b)^2 + 2(b+c)^2$$

$$= (-15)^2 + 2^2 + 2 \times 17^2$$

$$= 225 + 4 + 578$$

$$= 807,$$

故答案为： 807.

32. 若 $a+b+c=0$, 则 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)$ 的值为_____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 本题考查代数式求值，正确计算是解题关键. 由 $a+b+c=0$ 可得： $a+b=-c$, $a+c=-b$,

$b+c=-a$. 再将所求式子去括号, 将同分母分数相加, 最后代入求值即可.

【详解】解: 因为 $a+b+c=0$,

所以 $a+b=-c$, $a+c=-b$, $b+c=-a$.

$$\text{所以 } a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)$$

$$= \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a}$$

$$= \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c}$$

$$= \frac{-a}{a} + \frac{-b}{b} + \frac{-c}{c}$$

$$= -1-1-1$$

$$= -3.$$

故答案为: -3 .

33. $a=2014x+2010$, $b=2014x+2012$, $c=2014x+2014$, 则 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=$ _____.

【答案】12

【解析】

【分析】本题主要考查了完全平方公式, 先把所求式子变形为 $\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac)$, 再利用完全平方公式得到原式 $= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2]$, 据此代值计算即可.

【详解】解: $\because a=2014x+2010$, $b=2014x+2012$, $c=2014x+2014$,

$$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$$

$$= \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac)$$

$$= \frac{1}{2}[(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bc+c^2)]$$

$$= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2]$$

$$= \frac{1}{2}[(2014x+2010-2014x-2012)^2 + (2014x+2010-2014x-2014)^2 + (2014x+2012-2014x-2014)^2]$$

$$= \frac{1}{2}[(-2)^2 + (-4)^2 + (-2)^2]$$

$$= \frac{1}{2} \times (4 + 16 + 4)$$

$$= 12,$$

故答案为：12.

34. 已知 m, n 为正整数, $m < n$, 且 $3mn + 2m + 2n = 395$, 则 $n =$ _____.

【答案】 13

【解析】

【分析】 本题主要考查了因式分解的应用, 把 $3mn + 2m + 2n = 395$ 两边同时乘以 3 得到 $9mn + 6m + 6n = 1185$, 再利用十字相乘法分解因式得到 $(3m + 2)(3n + 2) = 1189$, 根据 $1189 = 1 \times 1189 = 29 \times 41$, $n > m$, 可得 $3m + 2 = 29, 3n + 2 = 41$, 解方程即可得到答案.

【详解】 解: $\because 3mn + 2m + 2n = 395$,

$$\therefore 9mn + 6m + 6n = 1185,$$

$$\therefore 9mn + 6m + 6n + 4 = 1189,$$

$$\therefore (3m + 2)(3n + 2) = 1189,$$

$\because m, n$ 都为正整数

$\therefore 3m + 2, 3n + 2$ 都是大于 1 的正整数,

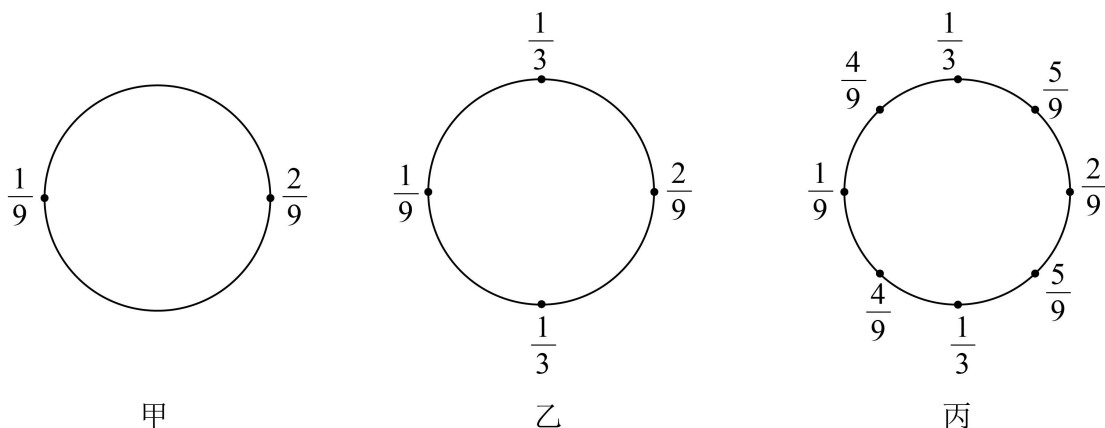
$$\therefore 1189 = 1 \times 1189 = 29 \times 41, \quad n > m,$$

$$\therefore 3m + 2 = 29, 3n + 2 = 41,$$

$$\therefore n = 13,$$

故答案为: 13.

35. 如图所示, 每个圆周上的数是按下述规则逐次标出的: 第一次先在圆周上标出 $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}$ 两个数 (如图甲); 第二次又在第一次标出的两个数之间的圆周上分别标出这两个数的和 (如图乙); 第三次再在第二次标出的所有相邻两数之间的圆周上, 分别标出这相邻两数的和 (如图丙); 按照此规则, 以此类推, 一直标下去.



(1) 设 n 是大于 1 的自然数, 第 $n-1$ 次标完数字后, 圆周上所有数字的和记为 S_{n-1} ; 第 n 次标完数字后, 圆周上所有数字的和记为 S_n . 试写出 S_n 与 S_{n-1} 的等量关系;

(2) 请你求出 S_{102} 的值.

【答案】(1) $S_n = 3S_{n-1}$

(2) $S_{102} = 3^{100}$

【解析】

【分析】 本题考查分析总结归纳能力, 关键在于通过计算每次标注完的和, 由数的变化推出数的变化规律.

(1) 由题意可求出 $S_1 = \frac{1}{3}$, $S_2 = 1$, $S_3 = 3$, 即推出 $S_{n-1} = 3^{n-3}$, $S_n = 3^{n-2}$, 从而得出 $S_n = 3S_{n-1}$;

(2) 将 $n=102$ 代入 $S_n = 3^{n-2}$, 求解即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } S_1 = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3},$$

$$S_2 = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1,$$

$$S_3 = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{5}{9} + \frac{4}{9} + \frac{5}{9} = 3,$$

.....

$$S_{n-1} = 3^{n-3},$$

$$S_n = 3^{n-2},$$

所以 $S_2 = 3S_1$, $S_3 = 3S_2$,, $S_n = 3S_{n-1}$;

【小问 2 详解】

解：由 (1) 可知 $S_{102} = 3^{102-2} = 3^{100}$.