

2024 学年第一学期七年级数学学科

阶段诊断测评

(考试时间 60 分钟, 满分 100 分)

一、选择题: (每题 3 分, 共 18 分)

1. 下列叙述中正确的是 ()

A. $\frac{1}{3}$ 是单项式

B. $(2a^2)^3 = 8a^5$

C. $a^0 = 1$ (a 是有理数)

D. -3^5 底数是 -3

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题主要考查了单项式的定义, 有理数幂的概念, 零指数幂和积的乘方计算, 单独的一个数字是单项式, 据此可判断 A; 根据积的乘方计算法则可判断 B; 任何非零底数的零指数幂结果为 1, 据此可判断 C; 根据有理数幂的概念可判断 D.

【详解】 解: A、 $\frac{1}{3}$ 是单项式, 原说法正确, 符合题意;

B、 $(2a^2)^3 = 8a^6$, 原式计算错误, 不符合题意;

C、 $a^0 = 1(a \neq 0)$, 原说法错误, 不符合题意;

D、 -3^5 底数是 3, 原说法错误, 不符合题意;

故选: A.

2. 下列变形中, 从左到右属于因式分解的是 ()

A. $6x^2y^2 = 3xy \cdot 2xy$

B. $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$

C. $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

D. $x^2 - x - 4 = x(x-1) - 2$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查因式分解的定义: 将一个多项式恒等变形为几个因式乘积的形式, 结合因式分解定义逐项验证即可得到答案, 熟记因式分解定义、整式乘法公式等知识判定是解决问题的关键.

【详解】 解: A、 $6x^2y^2 = 3xy \cdot 2xy$, 这个变形, 从左到右不属于因式分解, 不符合题意;

B、 $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$, 这个变形, 从左到右是整式乘法, 不属于因式分解, 不符合题意;

C、 $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ ，这个变形，从左到右属于因式分解，符合题意；

D、 $x^2 - x - 4 = x(x - 1) - 2$ ，这个变形，从左到右不属于因式分解，不符合题意；

故选：C.

3. 下列方程中，属于分式方程的是（ ）

A. $\frac{1}{x} = 2$

B. $\frac{x-9}{4} = \frac{x+5}{3}$

C. $\frac{x}{|x|-1}$

D. $xy - 1 = 0$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了分式方程的定义，分母中含有未知数的方程叫做分式方程，据此求解即可.

【详解】解：由分式方程的定义可知，四个选项中只有 A 选项中的方程是分式方程，

故选：A.

4. 小陈同学计算了四个分式，其中有一个结果忘记约分了，是下面的（ ）

A. $\frac{x+1}{2x+1}$

B. $\frac{x^2+y^2}{x+y}$

C. $\frac{y}{2x}$

D. $\frac{3(a^2-b^2)}{a+b}$

【答案】D

【解析】

【分析】此题考查了约分. 观察各分式，找出分子分母含有公因式的即可.

【详解】解： $\frac{x+1}{2x+1}$ ， $\frac{x^2+y^2}{x+y}$ ， $\frac{y}{2x}$ 都是最简分式，不符合题意；

$$\frac{3(a^2-b^2)}{a+b} = \frac{3(a+b)(a-b)}{a+b} = 3(a-b),$$

故选：D.

5. 本学期学校升级学生午餐的供餐方式为自助餐. 餐盘里有若干块质量相等的鸡米花，可以平均分给 $(x+1)$ 名同学，也可以平均分给 $(x+3)$ 名同学 (x 为大于 3 的正整数)，用代数式表示鸡米花的数量不可能是... ()

A. $(x+1)(x-3)$

B. $x(x^2-2x-3)$

C. x^2-4x+3

D. $2x^3-4x^2-6x$

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查了多项式的乘法. 根据题意可得纪念品的数量为 $(x+1)(x-3)$, 进而根据多项式的乘法进行计算求解即可.

【详解】 解: 根据题意可得, 这些鸡米花数量可能是 $(x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$,

也可能是 $x(x^2 - 2x - 3)$ 或 $2x^3 - 4x^2 - 6x = 2x(x^2 - 2x - 3)$,

不可能是 $x^2 - 4x + 3$,

观察四个选项, 选项 C 符合题意,

故选: C.

6. 为了大力促进人工智能与教育教学深度融合, 本学期学校开设了人工智能课程. 已知利用如图 1 的二维码可以进行身份识别, 小王同学建立了一个身份识别系统. 图 2 是某个学生的识别图案, 黑色小正方形表示 1, 白色小正方形表示 0, 将第一行数字从左到右依次记为 a, b, c, d , 那么可以转换为学生所在班级序号, 其序号为 $a \times 2^3 + b \times 2^2 + c \times 2^1 + d \times 2^0$. 如图 2 第一行数字从左到右依次为 0, 1, 0, 1, 序号为 $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 5$, 表示该生为 5 班学生, 表示 6 班学生的识别图案是 ()



图1

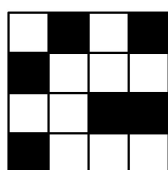
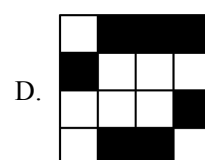
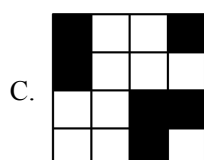
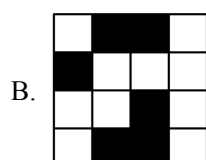
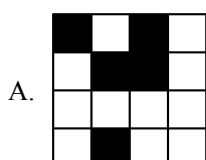


图2



【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了有理数的混合运算. 根据班级序号的计算方法一一进行计算即可.

【详解】 解: A、第一行数字从左到右依次为 1, 0, 1, 0, 序号为 $1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 10$, 表示该生为 10 班学生;

B、第一行数字从左到右依次为 0, 1, 1, 0, 序号为 $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 6$, 表示该生为 6 班学生;

C、第一行数字从左到右依次为 1, 0, 0, 1, 序号为 $1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 9$, 表示该生为 9 班学

生;

D、第一行数字从左到右依次为 0, 1, 1, 1, 序号为 $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 7$, 表示该生为 7 班学生.

故选: B.

二、填空题: (每题 3 分, 共 42 分)

7. 已知太阳到地球的距离约为 1.5×10^8 千米, 光速约为 3×10^5 千米/秒, 那么光从太阳照到地球大约需要 _____ 秒. (结果用科学记数法表示)

【答案】 5×10^2

【解析】

【分析】 本题考查了有理数的除法, 科学计数法, 根据题意得到 $1.5 \times 10^8 \div (3 \times 10^5)$, 计算即可, 掌握有理数的除法法则是解题的关键.

【详解】 解: 由题意得:

$$1.5 \times 10^8 \div (3 \times 10^5) = 500 = 5 \times 10^2 (\text{s}),$$

故答案为: 5×10^2 .

8. 整式 $2ax^2 + 6a^2x$ 中各项的公因式是 _____.

【答案】 $2ax$ ## $2xa$

【解析】

【分析】 本题考查了寻找多项式中的各项的公因式. 先找出公因式的系数, 即各项系数的最大公约数, 然后再提取出相同字母, 最后找相同字母的最低次幂.

【详解】 解: 由题意可知: 各项系数的最大公约数为 2, 相同的字母为 a 和 x , a 和 x 的最小指数都为 1,

$\therefore$ 整式 $2ax^2 + 6a^2x$ 中各项的公因式是 $2ax$,

故答案为: $2ax$.

9 因式分解: $25 - b^2 =$ _____.

【答案】 $(5+b)(5-b)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分解因式, 直接利用平方差公式分解因式即可得到答案.

【详解】 解: $25 - b^2 = (5+b)(5-b)$,

故答案为: $(5+b)(5-b)$.

10. 已知 $a+b=4$, $a-b=6$, 则 a^2-b^2 的值是_____.

【答案】 24

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解的应用. 根据平方差公式直接计算即可求解.

【详解】 解: $\because a+b=4$, $a-b=6$,

$$\therefore a^2-b^2=(a+b)(a-b)=4\times 6=24,$$

故答案为: 24.

11. 已知正方形的面积是 $(y^2+8y+16)\text{m}^2$, 则正方形的边长为_____ m. ($y>-4$)

【答案】 $(y+4)$

【解析】

【分析】 本题考查因式分解的应用, 涉及完全平方和公式因式分解, 设正方形的边长为 x m, 由题意列出等式, 因式分解求解即可得到答案. 熟练掌握完全平方和公式因式分解是解决问题的关键.

【详解】 解: 设正方形的边长为 x m,

$$\text{由正方形的面积是 } (y^2+8y+16)\text{m}^2 \text{ 可得, } x^2=y^2+8y+16=(y+4)^2,$$

$$\because y>-4,$$

$$\therefore y+4>0, \text{ 则正方形的边长 } x=y+4,$$

故答案为: $(y+4)$.

12. 因式分解: a^2-5a-6 =_____.

【答案】 $(a+1)(a-6)$

【解析】

【分析】 本题考查了解因式, 一般来说, 如果可以先提取公因式的要先提取公因式, 再考虑运用公式法与十字相乘法与分组分解法分解. 利用十字相乘法分解因式即可得解.

$$\text{【详解】 解: } a^2-5a-6=(a+1)(a-6).$$

故答案为: $(a+1)(a-6)$.

13. 因式分解: $(a+b)^2-15(a+b)+56$.

【答案】 $(a+b-7)(a+b-8)$

【解析】

【分析】 本题主要考查因式分解. 将 $(a+b)$ 看作整体, 从而因式分解为两个多项式相乘的形式.

【详解】 解: $(a+b)^2 - 15(a+b) + 56,$
 $= (a+b-7)(a+b-8),$

故答案为: $(a+b-7)(a+b-8).$

14. 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 分式 $\frac{x+5}{x+2}$ 无意义.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式无意义的条件, 分式无意义的条件是分母为 0, 据此求解即可.

【详解】 解: $\because$ 分式 $\frac{x+5}{x+2}$ 无意义,

$$\therefore x+2=0,$$

$$\therefore x=-2,$$

故答案为: $-2.$

15. 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 分式 $\frac{2-x}{2x+1}$ 的值为零.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查分式值为零的条件, 分式值为零的条件是分子等于零且分母不等于零. 根据分子为零, 分母不为零列式求解.

【详解】 由题意知, $x-2=0$, $2x+1 \neq 0$,

解得, $x=2$,

故答案为: $2.$

16. 计算: $\frac{3x-2}{x-1} \cdot \frac{x-1}{2-3x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式的乘法计算, 直接根据分式的乘法计算法则求解即可.

【详解】 解: $\frac{3x-2}{x-1} \cdot \frac{x-1}{2-3x} = \frac{3x-2}{x-1} \cdot \frac{x-1}{-(3x-2)} = -1,$

故答案为：-1.

17. 若关于 x 的方程 $\frac{2a}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1$ 有增根，则 a 的值为_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$ ## 0.5

【解析】

【分析】 本题考查分式的增根问题，增根是分式方程化为整式方程后产生的使分式方程的分母为0的根. 增根问题解决的步骤：①根据最简公分母确定增根的值；②化分式方程为整式方程；③把增根代入整式方程即可求得相关字母的值.

【详解】 解：方程两边都乘 $(x+1)$,

得： $2a-1=x+1$,

$\therefore$ 原方程有增根，

$\therefore$ 最简公分母 $x+1=0$,

解得： $x=-1$,

$\therefore 2a-1=-1+1$,

解得： $a=\frac{1}{2}$,

$\therefore a$ 的值是 $\frac{1}{2}$.

故答案为： $\frac{1}{2}$.

18. 计算： $\frac{a+b}{2ab} - \frac{a-b}{2ab} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{a}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式减法计算，直接根据同分母分式减法计算法则求解即可.

【详解】 解： $\frac{a+b}{2ab} - \frac{a-b}{2ab} = \frac{a+b-a+b}{2ab} = \frac{2b}{2ab} = \frac{1}{a}$,

故答案为： $\frac{1}{a}$.

19. 计算，结果不含负整数指数幂： $(y^{-2})^3 =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{y^6}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了整数指数幂的计算，先计算幂的乘方，再把负整数指数幂化成分数的形式即可得到答案.

【详解】 解: $(y^{-2})^3 = (y^{-2})^3 = y^{-6} = \frac{1}{y^6},$

故答案为: $\frac{1}{y^6}.$

20. 如果一个分式的分子或分母可以因式分解，且这个分式不可约分，那么我们称这个分式为“和谐分式”. 如分式 $\frac{a-2b}{a^2-b^2}$ 就是“和谐分式”. 若 a 为正整数，且 $\frac{x-1}{x^2+ax+9}$ 为“和谐分式”，则 a 的值为_____.

【答案】 6 或 10

【解析】

【分析】 根据 x^2+ax+9 可分解因式设 $x^2+ax+9=(x+p)(x+q)=x^2+(p+q)x+pq$ ，根据 a 为正整数可得 pq 为 1×9 或 3×3 ，即可得出 $p+q$ 的值，可得答案.

【详解】 $\because x^2+ax+9$ 可以分解因式，

$\therefore$ 设 $x^2+ax+9=(x+p)(x+q)=x^2+(p+q)x+pq$,

$\because a$ 为正整数，

$\therefore pq=1 \times 9$ 或 $pq=3 \times 3$,

$\therefore a=p+q=10$ 或 $a=p+q=6$,

综上， a 的值是 6 或 10，

故答案为: 6 或 10

【点睛】 本题考查约分、因式分解的意义，解答本题的关键是明确题意，会对题目中的式子分解因式.

三、将下列整式因式分解: (6 分 + 4 分 + 5 分, 共 15 分)

21. 因式分解: $(a^2+a)^2-8(a^2+a)+12$

【答案】 $(a+2)(a-1)(a+3)(a-2)$

【解析】

【分析】 此题考查了因式分解的方法. 因式分解的方法有: 提公因式法, 平方差公式法, 完全平方公式法, 十字相乘法等. 先将 (a^2+a) 看作整体, 利用十字相乘法分解, 再利用十字相乘法继续分解即可.

【详解】 解: $(a^2+a)^2-8(a^2+a)+12$

$$= (a^2 + a - 2)(a^2 + a - 6)$$

$$= (a + 2)(a - 1)(a + 3)(a - 2).$$

22. 因式分解: $a^3 - 5a^2b - 24ab^2$

【答案】 $a(a + 3b)(a - 8b)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分解因式，先提取公因式 a ，再利用十字相乘法分解因式即可得到答案.

【详解】 解: $a^3 - 5a^2b - 24ab^2$

$$= a(a^2 - 5ab - 24b^2)$$

$$= a(a + 3b)(a - 8b).$$

23. 因式分解: $4m^2 - n^2 - 1 + 2n$

【答案】 $(2m + n - 1)(2m - n + 1)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分解因式，利用完全平方公式把后三项分解因式，再利用平方差公式分解因式即可.

【详解】 解: $4m^2 - n^2 - 1 + 2n$

$$= 4m^2 - (n^2 - 2n + 1)$$

$$= 4m^2 - (n - 1)^2$$

$$= (2m + n - 1)(2m - n + 1).$$

四、分式的运算: (5分+6分+6分, 共17分)

24. 计算: $\frac{x+1}{x^2+2x-3} \div \frac{x+1}{x-1}$

【答案】 $\frac{1}{x+3}$

【解析】

【分析】 本题考查了分式的除法运算. 先把分子分母因式分解，再把除法运算化为乘法运算，然后约分即可.

【详解】 解: $\frac{x+1}{x^2+2x-3} \div \frac{x+1}{x-1}$

$$= \frac{x+1}{(x-1)(x+3)} \times \frac{x-1}{x+1}$$

$$= \frac{1}{x+3}.$$

25. 解分式方程: $\frac{2}{x-1} = \frac{1}{x}$

【答案】 $x = -1$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解分式方程，先把原方程去分母化为整式方程，再解方程并检验即可得到答案.

【详解】 解: $\frac{2}{x-1} = \frac{1}{x}$

去分母得: $2x = x - 1$,

解得 $x = -1$,

检验, 当 $x = -1$ 时, $x(x-1) \neq 0$,

$\therefore x = -1$ 是原方程的解.

26. 先将分式 $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1}$ 化简, 再从 1、-1、0 中选一个你喜欢的 x 值, 代入求值.

【答案】 $\frac{1-x}{x+1}$, 1

【解析】

【分析】 本题考查分式的化简求值. 先通分并利用同分母分式的减法法则计算, 约分得到最简结果, 再选择一个使分式有意义的值代入计算即可.

【详解】 解: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1}$

$$= \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} + \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} - \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$= -\frac{x^2-2x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$= -\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{1-x}{x+1};$$

$$\because x-1 \neq 0, \quad x+1 \neq 0,$$

$$\therefore x \neq 1 \text{ 且 } x \neq -1,$$

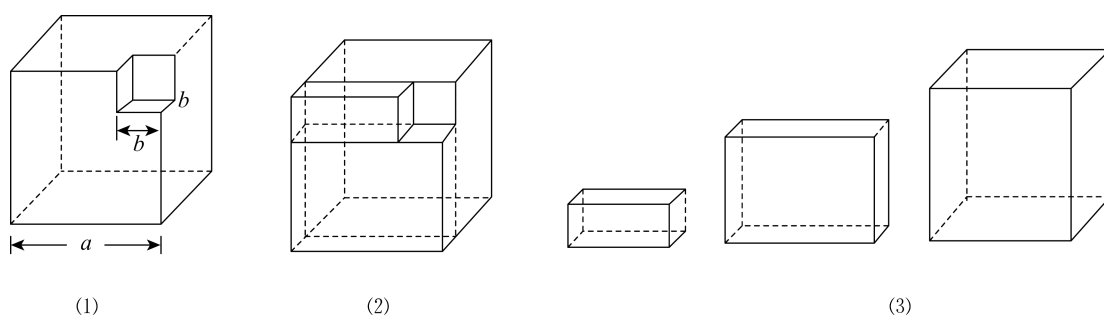
$$\text{当 } x=0 \text{ 时, 原式} = \frac{1-0}{0+1} = 1.$$

五、综合与实践问题: (1分+3分+2分+2分, 共8分)

27. 在乘法公式的学习中, 我们通过用不同的方法求同一平面图形的面积验证了平方差公式和完全平方公式. 这种方法称为等面积法. 类似地, 通过不同的方法求同一个立体图形的体积, 称为等体积法. 根据课堂学习的经验, 解决下列问题:

在一个棱长为 a 的正方体中挖出一个棱长为 b 的正方体, 如图 (1) 所示. 然后切割剩余的立体图形, 如图

(2) 所示. 将之分成三部分, 如图 (3) 所示. 这三部分长方体的体积依次为 $b^2(a-b)$ 、 $ab(a-b)$ 、 $a^2(a-b)$.



(1) 因式分解: $a^2(a-b) + ab(a-b) + b^2(a-b) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) 请用两种不同的方法求图 (1) 中的立体图形的体积 (用含有 a 、 b 的代数式表示):

① $\underline{\hspace{2cm}}$ (整式乘积的形式);

② $\underline{\hspace{2cm}}.$

利用等体积法, 能得到公式: $\underline{\hspace{2cm}}.$

(3) 应用: 利用在 (2) 中所得到的公式进行因式分解: $x^3 - 125.$

(4) 拓展: 若 $a-2b=1$, $ab=-2$, 则 a^4b-8ab^4 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 (1) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(2) a^3-b^3 ; $(a-b)(a^2+ab+b^2)$; $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(3) $(x-5)(x^2+5x+25)$

(4) 22

【解析】

【分析】 此题主要考查了因式分解的应用, 立方差公式的几何背景, 乘法公式在因式分解中的应用, 正方

体的体积公式等，理解题意，熟练掌握因式分解的方法与技巧，乘法公式的结构特征是解决问题的关键.

(1) 根据提公因式法可得;

(2) 由 (1) 可得，立体图行体积等于图 3 的三个立体图形的体积和，根据等式可得①②；根据图 1 和图 3 可得立体图形体积关系是： $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ ；

(3) 根据 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ ，可进一步分解因式；

(4) 根据上述公式进行因式分解，同时运用完全平方公式进行变形可得.

【小问 1 详解】

解：分解因式： $a^2(a - b) + ab(a - b) + b^2(a - b) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ ，

故答案为： $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ ；

【小问 2 详解】

解：① $a^3 - b^3$ ；

② $a^2(a - b) + ab(a - b) + b^2(a - b)$ 即 $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ ；

利用等体积法，能得到公式： $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ ，

故答案为： $a^3 - b^3$ ； $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ ； $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ ；

【小问 3 详解】

解： $x^3 - 125 = x^3 - 5^3 = (x - 5)(x^2 + 5x + 25)$ ；

【小问 4 详解】

解：因为 $a - 2b = 1$ ， $ab = -2$ ，

所以 $a^4b - 8ab^4 = ab[a^3 - (2b)^3] = ab(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)$

$= ab(a - 2b)[(a - 2b)^2 + 6ab]$

$= -2 \times 1 \times [1^2 + 6 \times (-2)]$

$= -2 \times (1 - 12) = 22$ ，

故答案为：22.