

# 2021 – 2022 学年上海市浦东新区张江集团中学八年级（下）期中数学 试卷

## 一、填空题（40 分）

1. 若一个多边形的内角和是其外角和的 3 倍，则这个多边形的边数是\_\_\_\_\_.

【答案】 8

【解析】

【分析】根据多边形的内角和定理，多边形的内角和等于  $(n-2) \cdot 180^\circ$ ，外角和等于  $360^\circ$ ，然后列方程求解即可.

【详解】解：设边数为  $n$ ，由题意得，

$$180(n-2) = 360 \times 3,$$

解得  $n=8$ .

所以这个多边形的边数是 8.

故答案为：8.

【点睛】本题主要考查了多边形的内角和公式与外角和定理，根据题意列出方程是解题的关键.

2. 化简： $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DE}) - (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BE}) + \overrightarrow{CA} =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $\vec{0}$

【解析】

【分析】先去括号，再利用向量的三角形法则进行求解即可.

【详解】解：原式  $= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CA}$

$$= (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC})$$

$$= \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}.$$

故答案为： $\vec{0}$

【点睛】本题考查的是平面向量的加法，减法，三角形法则等知识，解题的关键是熟练掌握三角形法则.

3. 有 15 只型号相同的杯子，其中一等品 3 只，二等品 5 只，三等品 7 只，从中任取 1 只，是一等品的概率是\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{1}{5}$

【解析】

【分析】用一等品的杯子总数除以杯子的总数即可求得答案.

【详解】解：∵15只杯子里面有3只一等品，

∴从中任取1只是一等品的概率为 $\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$ 。

故答案为： $\frac{1}{5}$ 。

【点睛】本题考查的是概率的求法。如果一个事件有 $n$ 种可能，而且这些事件的可能性相同，其中事件 $A$ 出现 $m$ 种结果，那么事件 $A$ 的概率 $P(A)=\frac{m}{n}$ 。

4. 菱形的两条对角线长分别是6和8，则菱形的边长为\_\_\_\_\_。

【答案】5

【解析】

【分析】根据菱形对角线垂直平分，再利用勾股定理即可求解。

【详解】解：因为菱形的对角线互相垂直平分，

根据勾股定理可得菱形的边长为 $\sqrt{3^2+4^2}=5$ 。

故答案为5。

【点睛】此题主要考查菱形的边长求解，解题的关键是熟知菱形的性质及勾股定理的运用。

5. 已知 $P$ 是正方形 $ABCD$ 的对角线 $BD$ 上一点，且 $BP=BA$ ，则 $\angle APD=$ \_\_\_\_\_°。

【答案】112.5

【解析】

【分析】画出图形，利用正方形的性质和等腰三角形的性质求得 $\angle BPA$ ，再利用平角是 $180^\circ$ 求解即可。

【详解】解：如图，∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

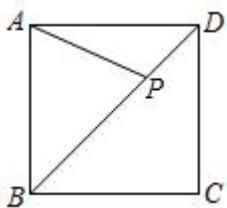
∴ $\angle ABP=45^\circ$ ，

∵ $BP=BA$ ，

∴ $\angle BAP=(180^\circ-45^\circ)\div 2=67.5^\circ$ ，

∴ $\angle APD=180^\circ-67.5^\circ=112.5^\circ$ ，

故答案为：112.5。



【点睛】本题考查正方形的性质和等腰三角形的性质，熟练掌握它们的性质是解答的关键。

6. 已知一次函数 $y=2x+4$ 的图像与 $x$ 轴、 $y$ 轴分别相交于点 $A$ 、 $B$ ，在直线右侧以 $AB$ 为边作正方形 $ABCD$ ，

则点  $D$  的坐标是\_\_\_\_\_.

【答案】 (2, -2)

【解析】

【分析】 作  $DE$  垂直  $x$  轴于点  $E$ , 先根据函数与坐标轴交点求出  $A$ 、 $B$  点坐标, 得到  $AO$ 、 $BO$  的长, 再证明  $\triangle ADE \cong \triangle BAO$ , 求出  $DE$ 、 $AE$  的长, 即可求出  $D$  点坐标.

【详解】 作  $DE$  垂直  $x$  轴于点  $E$ , 如图,

$\because$  一次函数  $y = 2x + 4$  的图像与  $x$  轴、 $y$  轴分别相交于点  $A$ 、 $B$ ,

$\therefore$  当  $x=0$  时,  $y=4$ ,

当  $y=0$  时,  $x=-2$ ,

$\therefore$  点  $A$ 、 $B$  的坐标分别为:  $A(-2, 0)$ ,  $B(0, 4)$ ,

$\therefore AO=2$ ,  $BO=4$ ,

$\because$  四边形  $ABCD$  是正方形,

$\therefore AD=AB$ ,

$\because \angle ABO + \angle BAO = 90^\circ$ ,  $\angle BAO + \angle DAE = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle DAE = \angle ABO$ ,

$\therefore$  在  $\triangle ABO$  与  $\triangle DAE$  中,

$$\begin{cases} \angle BOA = \angle AED = 90^\circ \\ \angle ABO = \angle DAE \\ AB = AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BAO (AAS)$ ,

$\therefore DE=AO=2$ ,  $AE=BO=4$ ,

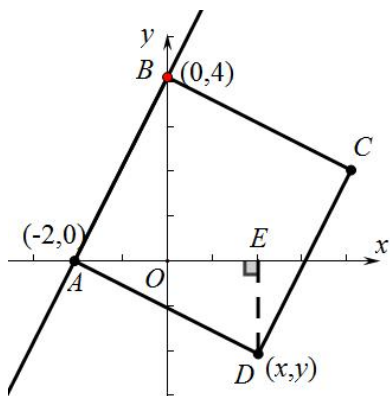
设点  $D$  的坐标为  $(x, y)$ , 则:

$AE=x-(-2)=4$ ,  $DE=0-y=2$ ,

解得:  $x=2$ ,  $y=-2$ ,

$\therefore$  点  $D$  的坐标为  $(2, -2)$ ,

故答案为:  $(2, -2)$ .



【点睛】 本题考查了一次函数和全等三角形，解题关键是灵活运用全等三角形的性质求出所求点在水平方向和垂直方向相关线段的长，从而容易求得点的坐标.

7. 已知方程组  $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x^2 - y^2 + 4x + 2y = 0 \end{cases}$ ，消去  $y$ ，化简后所得到的方程是\_\_\_\_\_.

【答案】  $8x^2 - 16x + 3 = 0$

【解析】

【分析】 利用代入消元法即可消去  $y$ .

【详解】 解:  $\begin{cases} 3x - y = 1 \text{ ①} \\ x^2 - y^2 + 4x + 2y = 0 \text{ ②} \end{cases}$ ,

由①得:  $y = 3x - 1$  ③,

将③代入②得:  $x^2 - (3x - 1)^2 + 4x + 2(3x - 1) = 0$ ,

化简得:  $8x^2 - 16x + 3 = 0$ ,

故答案为:  $8x^2 - 16x + 3 = 0$ .

【点睛】 本题考查了代入消元法，解题关键是通过变形将  $y$  转化为含有  $x$  的式子.

8. 已知方程组  $\begin{cases} 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 2 \\ 4x - 9y = 12 \end{cases}$ ，那么  $2\sqrt{x} + 3\sqrt{y}$  的值是\_\_\_\_\_.

【答案】 6

【解析】

【分析】 把方程  $4x - 9y = 12$  因式分解得到  $(2\sqrt{x} + 3\sqrt{y})(2\sqrt{x} - 3\sqrt{y}) = 12$ ，把第一个方程代入即可求解.

【详解】 解: 由  $4x - 9y = 12$  因式分解得到  $(2\sqrt{x} + 3\sqrt{y})(2\sqrt{x} - 3\sqrt{y}) = 12$ ,

将  $2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 2$  代入可得:  $2(2\sqrt{x} + 3\sqrt{y}) = 12$ ,

$$\therefore 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 6,$$

故答案为：6.

【点睛】本题考查了解二元一次方程组、二次根式的应用和因式分解，将方程分解变形为

$$(2\sqrt{x} + 3\sqrt{y})(2\sqrt{x} - 3\sqrt{y}) = 12 \text{ 是解题的关键.}$$

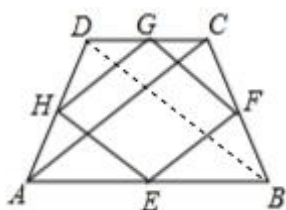
9. 在等腰梯形  $ABCD$  中， $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$  分别为各边中点，已知对角线  $AC = 10$ ，则四边形  $EFGH$  的周长为 \_\_\_\_\_.

【答案】20

【解析】

【分析】连接  $BD$ ，根据等腰梯形的性质得到  $BD = AC$ ，根据三角形中位线定理解答即可.

【详解】解：连接  $BD$ ， $\because$  四边形  $ABCD$  为等腰梯形，



$$\therefore BD = AC = 10,$$

$\because E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$  分别为各边中点，

$$\therefore EF = \frac{1}{2} AC = 5, \quad GH = \frac{1}{2} AC = 5, \quad EH = \frac{1}{2} BD = 5, \quad GF = \frac{1}{2} BD = 5,$$

$$\therefore \text{四边形 } EFGH \text{ 的周长} = 5 + 5 + 5 + 5 = 20,$$

故答案为：20.

【点睛】本题考查的是中点四边形，掌握等腰梯形的性质、三角形中位线定理是解题的关键.

10. 在梯形  $ABCD$  中， $AB \parallel CD$  ( $AB < CD$ )，中位线  $EF$  把梯形分成两个梯形，已知这两个梯形的面积比为  $3 : 5$ ， $EF = 10$ ，则  $AB =$  \_\_\_\_\_.

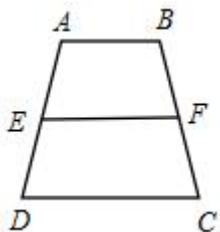
【答案】5

【解析】

【分析】由梯形中位线定理可得  $AB + CD = 2EF = 20$ ，由已知这两个梯形的面积比为  $3 : 5$ ，得出  $\frac{AB + EF}{EF + CD} = \frac{3}{5}$ ，

进一步计算即可得出  $AB$  的长度.

【详解】解：如图，



$\because EF$  是梯形  $ABCD$  的中位线,  $EF=10$ ,

$\therefore AB+CD=2EF=2\times 10=20$ ,

$\because$  中位线  $EF$  把梯形分成两个梯形,

$\therefore$  这两个梯形的高相等,

$\because$  已知这两个梯形的面积比为  $3:5$ ,

$$\therefore \frac{AB+EF}{EF+CD} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{AB+10}{10+20-AB} = \frac{3}{5},$$

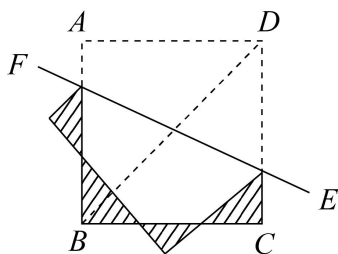
$\therefore AB=5$ , 经检验符合题意;

故答案为: 5.

【点睛】 本题考查了梯形的面积, 梯形的中位线, 掌握梯形中位线定理是解决问题的关键.

11. 如图, 已知正方形  $ABCD$  的边长为  $\sqrt{2}$ , 将正方形  $ABCD$  沿直线  $EF$  折叠, 则图中阴影部分的周长为

\_\_\_\_\_.



【答案】  $4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 利用轴对称的性质将边进行转化, 再利用正方形的边长求解即可.

【详解】 解: 由轴对称可知:  $AD=GN$ ,  $AK=GK$ ,  $DQ=NQ$ ,

$\therefore$  阴影部分的周长为  $GK+GH+HK+HB+HM+BM+MN+MP+NP+PQ+QC+PC$

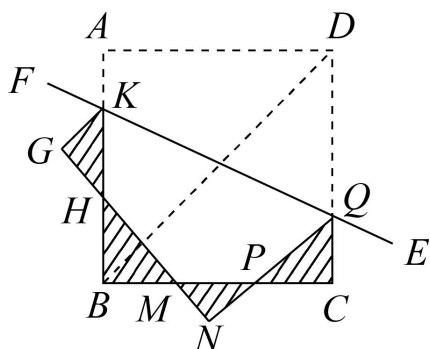
$$= (GK+HK+HB) + (GH+HM+MN) + (BM+MP+PC) + (NP+PQ+QC)$$

$$= AB+GN+BC+DC$$

$$= AB+AD+BC+DC$$

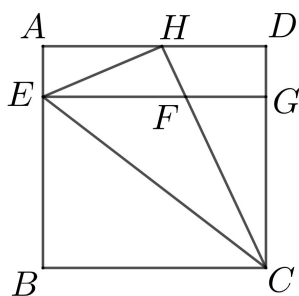
$$=4\sqrt{2}.$$

故答案为:  $4\sqrt{2}$ .



【点睛】 本题考查了阴影部分的周长问题，解题关键是利用轴对称的性质进行边的转化.

12. 如图，已知正方形  $ABCD$  的边长为 5 厘米， $EG \parallel AD$ ，点  $H$  在边  $AD$  上， $\triangle CEH$  的面积为 8 平方厘米，则  $FG =$  \_\_\_\_\_ 厘米.

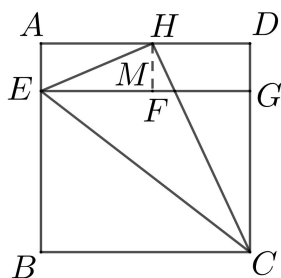


【答案】  $\frac{9}{5}$  ## 1.8

【解析】

【分析】 过  $H$  作  $HM \perp EG$  于  $M$ ，由四边形  $ABCD$  是正方形， $EG \parallel AD$ ， $HM \perp EG$ ，可得四边形  $AEGD$ 、四边形  $HMGD$  是矩形，根据  $\triangle CEH$  的面积为 8 平方厘米，有  $\frac{1}{2}EF \cdot MH + \frac{1}{2}EF \cdot CG = 8$ ，即得  $\frac{1}{2}EF \cdot CD = 8$ ，可求出  $EF = \frac{16}{5}$  厘米，故  $FG = EG - EF = \frac{9}{5}$  厘米.

【详解】 解：过  $H$  作  $HM \perp EG$  于  $M$ ，如图：



$\because$  四边形  $ABCD$  是正方形，边长为 5 厘米，

$\therefore AD = CD = 5$  厘米， $\angle A = \angle D = 90^\circ$ ，

$$\because EG \parallel AD, HM \perp EG,$$

$\therefore$  四边形  $AEGD$ 、四边形  $HMGD$  是矩形,

$$\therefore EG=AD=5 \text{ 厘米}, MH=DG,$$

$\therefore \triangle CEH$  的面积为 8 平方厘米,

$$\therefore \frac{1}{2} EF \cdot MH + \frac{1}{2} EF \cdot CG = 8,$$

$$\therefore \frac{1}{2} EF \cdot (MH + CG) = 8,$$

$$\therefore \frac{1}{2} EF \cdot (DG + CG) = 8, \text{ 即 } \frac{1}{2} EF \cdot CD = 8, \text{ 又 } CD = 5,$$

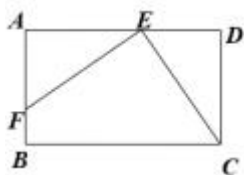
$$\therefore EF = \frac{16}{5},$$

$$\therefore FG = EG - EF = 5 - \frac{16}{5} = \frac{9}{5} \text{ (厘米)},$$

故答案为:  $\frac{9}{5}$ .

【点睛】 本题考查正方形性质及应用, 解题的关键是根据  $\triangle CEH$  的面积为 8 平方厘米, 列出关于  $EF$  的方程, 从而求得  $EF$  的长度.

13. 如图, 已知矩形  $ABCD$  中,  $E$  是  $AD$  上的一点,  $F$  是  $AB$  上的一点,  $EF \perp EC$ , 且  $EF = EC$ ,  $DE = 4\text{cm}$ , 矩形  $ABCD$  的周长为 32cm, 则  $AE =$  \_\_\_\_\_ cm.



【答案】 6

【解析】

【分析】 先证  $\angle AEF = \angle ECD$ , 再证  $Rt\triangle AEF \cong Rt\triangle DCE$ , 然后结合题目中已知的线段关系求解.

【详解】 解: 在  $Rt\triangle AEF$  和  $Rt\triangle DEC$  中,  $EF \perp CE$ .

$$\therefore \angle FEC = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle AEF + \angle DEC = 90^\circ. \text{ 而 } \angle ECD + \angle DEC = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle AEF = \angle ECD,$$

$$\text{在 } \triangle AEF \text{ 与 } \triangle DCE \text{ 中, } \begin{cases} \angle FAE = \angle EDC = 90^\circ \\ \angle AEF = \angle ECD \\ EF = EC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle DCE \text{ (AAS).}$$

$$\therefore AE = CD, \text{ 而 } AD = AE + 4.$$

∵ 矩形  $ABCD$  的周长为 32cm.

∴  $2(AE+ED+DC) = 32$ , 即  $2(2AE+4) = 32$ ,

整理得:  $2AE+4=16$  解得:  $AE=6$  (cm).

故答案为 6.

【点睛】 本题综合考查了矩形的性质, 三角形全等的判定和性质, 熟练掌握矩形的性质定理是解题的关键.

14. 如果  $|\overrightarrow{AB}|=5, |\overrightarrow{BC}|=3$ , 则  $|\overrightarrow{AC}|$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

【答案】  $2 \leq |\overrightarrow{AC}| \leq 8$

【解析】

【分析】 当三个向量不共线时, 根据三角形的三边关系“任意两边之和大于第三边, 任意两边之差小于第三边”, 进行分析求解; 当三个向量共线时, 根据向量的加减求解.

【详解】 解: 当三个向量不共线时, 根据三角形的三边关系, 得  $5-3 < |\overrightarrow{AC}| < 5+3$ , 即  $2 < |\overrightarrow{AC}| < 8$ .

当三个向量共线时,  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = 5+3=8$  或  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{BC}| = 5-3=2$ ,

综上,  $|\overrightarrow{AC}|$  的取值范围是:  $2 \leq |\overrightarrow{AC}| \leq 8$

故答案为:  $2 \leq |\overrightarrow{AC}| \leq 8$ .

【点睛】 本题主要考查了平面向量和三角形的三边关系: 任意两边之和大于第三边, 任意两边之差小于第三边.

15. 已知一个正方形周长为  $x$  厘米, 面积为  $x$  平方厘米, 则它的对角线的长度是\_\_\_\_\_厘米.

【答案】  $4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 根据正方形的周长和面积公式求得  $x$ , 再利用勾股定理求解即可.

【详解】 解: ∵ 正方形周长为  $x$  厘米, 面积为  $x$  平方厘米,

∴  $(\frac{x}{4})^2 = x$ , 且  $x > 0$ ,

解得:  $x=16$ ,

∴ 正方形的边长为 4 厘米,

∴ 对角线的长度为  $\sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$  (厘米),

故答案为:  $4\sqrt{2}$ .

【点睛】 本题考查正方形的周长和面积公式、勾股定理，根据题意求得  $x$  值和边长是解答的关键.

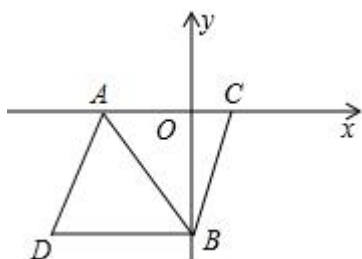
16. 在平面直角坐标系中，点  $A$ 、 $B$  分别为  $A(-3, 0)$ 、 $B(0, -4)$ ，点  $C$  在  $x$  轴上，若四边形  $ACBD$  是菱形，则点  $D$  的坐标为\_\_\_\_\_.

【答案】  $(\frac{25}{6}, -4)$

【解析】

【分析】由菱形的性质得  $BD=AC=BC$ ， $BD \parallel AC$ ，设  $OC=x$ ，则  $BD=BC=AC=OA+OC=3+x$ ，然后在  $Rt\triangle OBC$  中，由勾股定理得：  $x^2+4^2=(3+x)^2$ ，解得  $x=\frac{7}{6}$ ，即可解决问题.

【详解】解：如图， $\because$  四边形  $ACBD$  是菱形，



$\therefore BD=AC=BC$ ， $BD \parallel AC$ ，

$\because A(-3, 0)$ 、 $B(0, -4)$ ，

$\therefore OA=3$ ， $OB=4$ ，设  $OC=x$ ，则  $BD=BC=AC=OA+OC=3+x$ ，

在  $Rt\triangle OBC$  中，由勾股定理得：  $x^2+4^2=(3+x)^2$ ，

解得：  $x=\frac{7}{6}$ ，

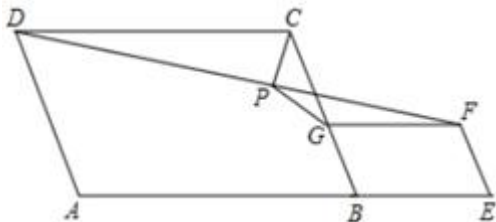
$\therefore BD=3+\frac{7}{6}=\frac{25}{6}$ ，

$\therefore$  点  $D$  的坐标为  $(\frac{25}{6}, -4)$ ，

故答案为：  $(\frac{25}{6}, -4)$  .

【点睛】 本题考查了菱形的性质、坐标与图形性质以及勾股定理等知识，熟练掌握菱形的性质和勾股定理是解题的关键.

17. 如图，在  $\square ABCD$  和  $\square BEFG$  中， $AB=AD$ ， $BG=BE$ ，点  $A$ 、 $B$ 、 $E$  在同一直线上， $P$  是线段  $DF$  的中点，联结  $PG$ ， $PC$ 。若  $\angle ABC = \angle BEF = 60^\circ$ ，则  $\frac{PC}{PG} =$ \_\_\_\_\_.

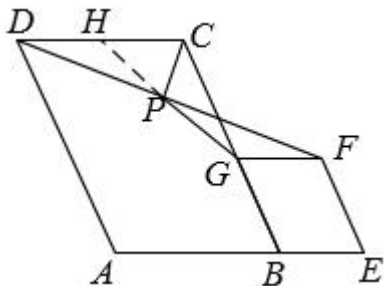


【答案】  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 延长  $GP$  交  $CD$  于点  $H$ ，根据  $AB = AD$ ， $BG = BE$ ，得出四边形  $ABCD$  和四边形  $BEFG$  都是菱形，由菱形的性质证明  $\triangle DPH \cong \triangle FPG$ ，得出  $DH = GF$ ，进而得出  $\triangle CHG$  为等腰三角形，利用等腰三角形的性质得出  $CP \perp HG$ ， $\angle PCG = 60^\circ$ ，再利用直角三角形的性质，即可求解。

【详解】 解：如图，延长  $GP$  交  $CD$  于点  $H$ ，



在  $\square ABCD$  和  $\square BEFG$  中， $AB = AD$ ， $BG = BE$ ，

$\therefore$  四边形  $ABCD$  和四边形  $BEFG$  都是菱形，

$\therefore CD = CB$ ， $GF = GB$ ， $CD \parallel AE$ ， $GF \parallel AE$ ，

$\therefore CD \parallel GF$ ，

$\therefore \angle DHP = \angle FGP$ ，

$\because \angle DPH = \angle FPG$ ， $DP = FP$ ，

$\therefore \triangle DPH \cong \triangle FPG$  (AAS)，

$\therefore DH = GF$ ， $PH = PG$ ，

$\therefore DH = GB$ ，

$\therefore CH = CG$ ，

$\therefore CP \perp PG$ ，

$\therefore \angle HCG = 2\angle PCG$ ，

$\because \angle ABC = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle HCG = 180^\circ - \angle ABC = 120^\circ$ ，

$$\therefore \angle PCG = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CGP = 30^\circ,$$

$$\therefore CG = 2PC,$$

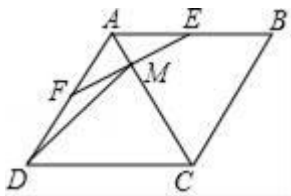
$$\therefore PG = \sqrt{CG^2 - PC^2} = \sqrt{3}PC,$$

$$\frac{PC}{PG} = \frac{PC}{\sqrt{3}PC} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【点睛】本题考查了菱形的判定与性质，全等三角形的判定与性质等知识，掌握全等三角形的判定与性质，等腰三角形的性质，直角三角形的性质是解决问题的关键。

18. 如图，已知菱形  $ABCD$ ， $AC$  是对角线，点  $E$  是  $AB$  的中点，过点  $E$  作对角线  $AC$  的垂线，垂足是点  $M$ ，与边  $AD$  交于点  $F$ ，连接  $DM$ 。若  $\angle BAD = 120^\circ$ ， $AB = 8$ ，则  $DM =$  \_\_\_\_\_。



$$\text{【答案】 } 2\sqrt{13}$$

【解析】

【分析】根据菱形的性质证得  $\angle DAC = \angle BAC = 60^\circ$ ， $AD = AB = 8$ ，过  $M$  作  $MN \perp AD$  于  $N$ ，根据含  $30^\circ$  的直角三角形的性质求得  $AM$  和  $AN$ ，然后利用勾股定理求解  $DM$  即可。

【详解】解： $\because$  四边形  $ABCD$  是菱形， $\angle BAD = 120^\circ$ ， $AB = 8$ ，

$$\therefore AD = AB = 8, \quad \angle DAC = \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\because EF \perp AC, \quad E \text{ 为 } AB \text{ 的中点},$$

$$\therefore \angle AEM = 30^\circ, \quad \angle AME = 90^\circ, \quad AE = BE = 4,$$

$$\therefore AM = \frac{1}{2} AE = 2,$$

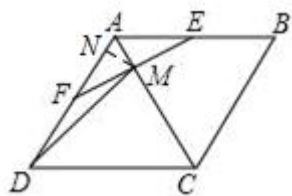
过  $M$  作  $MN \perp AD$  于  $N$ ，则  $\angle AMN = 30^\circ$ ， $\angle ANM = \angle DNM = 90^\circ$ ，

$$\therefore AN = \frac{1}{2} AM = 1, \quad MN = \sqrt{3},$$

$$\therefore DN = AD - AN = 7,$$

$$\text{在 Rt}\triangle MND \text{ 中, } DM = \sqrt{DN^2 + MN^2} = \sqrt{7^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{13},$$

故答案为:  $2\sqrt{13}$ .



【点睛】 本题考查菱形的性质、含  $30^\circ$  的直角三角形的性质、勾股定理, 熟练掌握菱形的性质和含  $30^\circ$  的直角三角形的性质是解答的关键.

19. 已知正方形  $ABCD$ , 以  $CD$  为边作等边  $\triangle CDE$ , 则  $\angle ADE$  的度数是\_\_\_\_\_.

【答案】  $150^\circ$  或  $30^\circ$

【解析】

【分析】 分等边  $\triangle CDE$  在正方形的外部 and 内部两种情况, 利用正方形和等边三角形的性质求解即可

【详解】 解:  $\because$  四边形  $ABCD$  是正方形,  $\triangle CDE$  是等边三角形,

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ, \angle CDE = 60^\circ,$$

若等边  $\triangle CDE$  在正方形的外部时, 如图 1,

$$\text{则 } \angle ADE = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ;$$

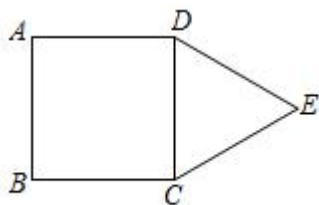


图1

若等边  $\triangle CDE$  在正方形的内部时, 如图 2,

$$\text{则 } \angle ADE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

综上,  $\angle ADE$  的度数是  $150^\circ$  或  $30^\circ$ ,

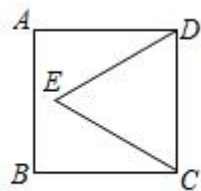


图2

故答案为:  $150^\circ$  或  $30^\circ$ .

【点睛】 本题考查正方形的性质、等边三角形的性质, 分类讨论的思想的运用是解答的关键.

20. 在梯形  $ABCD$  中,  $AD \parallel BC$ ,  $AH$  是高, 已知  $AB = \sqrt{17}$ ,  $AD = 3$ ,  $CD = 5$ ,  $AH = 4$ , 则梯形  $ABCD$  的面

积是\_\_\_\_\_.

【答案】 20 或 8 或 16

【解析】

【分析】 分三种情况进行讨论，先根据勾股定理和线段的和差关系求出下底，再根据梯形的面积公式即可求解.

【详解】 解： 过  $D$  点作  $DE \perp BC$  于  $E$ ,

$\because AH$  是高,  $AH=4$ ,

$\therefore DE=4$ ,

$\because CD=5$ ,

$\therefore CE = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ ,

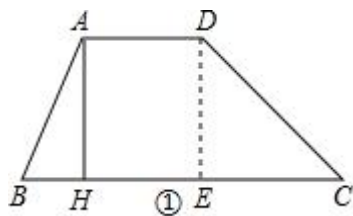
$\because AB = \sqrt{17}$ ,

$\therefore BH = \sqrt{(\sqrt{17})^2 - 4^2} = 1$ ,

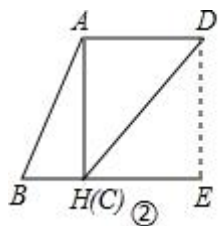
$\because AD \parallel BC$ ,

$\therefore HE=AD=3$ ,

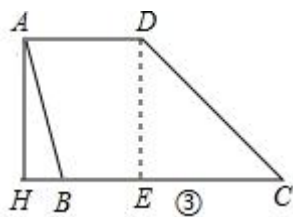
如图①梯形  $ABCD$  的面积 =  $(3+1+3+3) \times 4 \div 2 = 20$ ;



如图②梯形  $ABCD$  的面积 =  $(3+1+3-3) \times 4 \div 2 = 8$ ;



如图③梯形  $ABCD$  的面积 =  $(3+3+3-1) \times 4 \div 2 = 16$ .



故梯形  $ABCD$  的面积是 20 或 8 或 16.

故答案为：20 或 8 或 16.

【点睛】本题考查了梯形，关键是求出梯形的下底，注意分类思想的应用.

## 二、选择题 (10 分)

21. 一条边长为 5 的平行四边形，它的对角线长可能是 ( )

- A. 4 和 6                      B. 4 和 3                      C. 2 和 6                      D. 4 和 8

【答案】D

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质中，两条对角线的一半和一边构成三角形，利用三角形三边关系判断可知.

【详解】解：A、对角线一半分别是 2 和 3， $2+3=5$ ，故不能构成三角形，故本选项不符合题意；

B、对角线一半分别是 2 和 1.5， $2+1.5=3.5 < 5$ ，故不能构成三角形，故本选项不符合题意；

C、对角线一半分别是 1 和 3， $1+3 < 5$ ，故不能构成三角形，故本选项不符合题意；

D、对角线一半分别是 2 和 4，符合三角形的三边关系，能构成三角形，故本选项符合题意.

故选：D.

【点睛】本题主要考查了平行四边形的性质及三角形的三边关系，注意平行四边形中两条对角线的一半和一边构成三角形，另外要熟练三角形的三边关系.

22. 某厂接到加工 720 件衣服的订单，预计每天做 48 件，正好按时完成，后因客户要求提前 5 天交货，设每天应多做  $x$  件，则  $x$  应满足的方程为 ( )

A.  $\frac{720}{48+x} - \frac{720}{48} = 5$

B.  $\frac{720}{48} + 5 = \frac{720}{48+x}$

C.  $\frac{720}{48} - \frac{720}{x} = 5$

D.  $\frac{720}{48} - \frac{720}{48+x} = 5$

【答案】D

【解析】

【分析】本题的关键是要弄清因客户要求工作量提速后的工作效率和工作时间，然后根据题目给出的关键语“提前 5 天”找到等量关系，然后列出方程.

【详解】因客户的要求每天的工作效率应该为： $(48+x)$  件，所用的时间为： $\frac{720}{48+x}$ ，根据“因客户要求提前 5 天交货”，用原有完成时间  $\frac{720}{48}$ ，减去提前完成时间  $\frac{720}{48+x}$ ，可以列出方程： $\frac{720}{48} - \frac{720}{48+x} = 5$

故选：D.

【点睛】此题考查了分式方程的应用，这道题的等量关系比较明确，直接分析题目中的重点语句即可得知，再利用等量关系列出方程.

23. 已知  $\vec{a}$ ， $\vec{b}$  非零向量，且  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ ，则一定有 ( )

A.  $\vec{a} = \vec{b}$

B.  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , 且  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  方向相同

C.  $\vec{a} = \vec{b}$

D.  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , 且  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  方向相反

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据向量的数量积，利用平方法进行判断即可.

【详解】 解:  $\because \vec{a}, \vec{b}$  非零向量, 且  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ ,

$$\sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|},$$

$$\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}||\vec{b}|},$$

$$\sqrt{|\vec{a}||\vec{b}|\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} = \sqrt{|\vec{a}||\vec{b}|},$$

$$\sqrt{\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} = 1, \text{ 即 } \vec{a} \parallel \vec{b}, \text{ 且 } \vec{a}, \vec{b} \text{ 的方向相同},$$

故选: B

【点睛】 本题考查的是向量的数量积的应用，掌握平方法是解本题的关键.

24. 甲、乙、丙、丁四位同学参加校田径运动会接力比赛，如果任意安排四位同学的跑步顺序，那么，其中恰好由甲将接力棒交给乙的概率是 ( )

A.  $\frac{1}{4}$

B.  $\frac{1}{6}$

C.  $\frac{1}{8}$

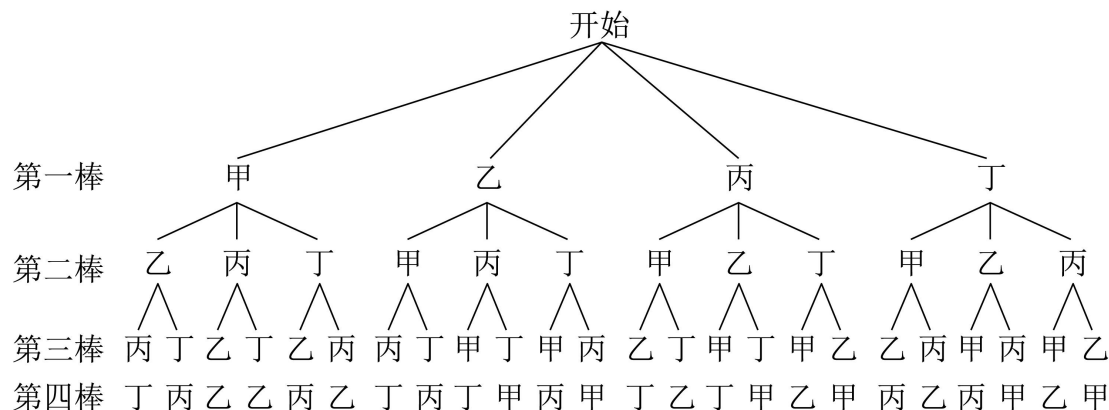
D.  $\frac{1}{12}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 列举出所有情况，让恰好由甲将接力棒交给乙的情况数除以总情况数即为所求的概率.

【详解】 解: 根据题意，画树状图得:



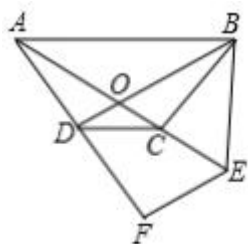
所以一共有 24 种跑步顺序，而恰好由甲将接力棒交给乙的有 6 种， 所以恰好由甲将接力棒交给乙的概率

是:  $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ .

故选: A.

【点睛】本题主要考查了树状图法求概率. 树状图法可以不重不漏的列举出所有可能发生的情况, 适合于两步或两步以上完成的事件. 还要注意题目是放回实验还是不放回实验. 用到的知识点为: 概率=所求情况数与总情况数之比.

25. 如图, 已知等腰梯形  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ ,  $AD = BC$ ,  $AC \perp BC$ ,  $BE \perp AB$  交  $AC$  的延长线于  $E$ ,  $EF \perp AD$  交  $AD$  的延长线于  $F$ , 下列结论: ①  $BD \parallel EF$ ; ②  $\angle AEF = 2\angle BAC$ ; ③  $AD = DF$ ; ④  $AC = CE + EF$ . 其中错误的结论有 ( )



A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 3 个

【答案】 A

【解析】

【分析】根据等腰梯形的性质结合全等三角形的判定与性质、平行线的判定与性质、等腰三角形的判定、三角形的外角性质、三角形的中位线等知识进行逐个判断解答即可.

【详解】解:  $\because$  四边形  $ABCD$  是等腰梯形,

$\therefore AC = BD$ , 又  $AD = BC$ ,  $AB = AB$ ,

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle BAD$  (SSS),

$\therefore \angle BAC = \angle ABD$ ,  $\angle ADB = \angle BCA$ , 又  $AC \perp BC$ ,

$\therefore OA = OB$ ,  $OC = OD$ ,  $\angle ADB = \angle BCA = 90^\circ$  即  $BD \perp AD$ ,

$\therefore EF \perp AD$ ,

$\therefore BD \parallel EF$ , 故①正确;

$\therefore \angle AEF = \angle AOD = \angle BAC + \angle ABD$ ,

$\therefore \angle AEF = 2\angle BAC$ , 故②正确;

$\therefore BE \perp AB$ ,

$\therefore \angle BAC + \angle AEB = \angle ABD + \angle OBE = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle AEB = \angle OBE$ ,

$\therefore OB = OE$ ,

$\therefore AO=OE$ , 又  $OD \parallel EF$ ,

$\therefore AD=DF$ , 故③正确;

$\therefore EF=2OD=2OC$ ,

$\therefore OA=OE=OC+CE$ ,

$\therefore AC=OA+OC=OC+CE+OC=2OC+CE=EF+CE$ , 故④正确,

综上, 正确的结论有 4 个, 即错误的结论有 0 个,

故选: A.

【点睛】本题考查等腰梯形的性质、全等三角形的判定与性质、平行线的判定与性质、等腰三角形的判定、三角形的外角性质、三角形的中位线性质的知识, 熟练掌握相关知识的联系与运用是解答的关键.

### 三、解方程 (8 分)

26. (1)  $\frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{1}{x} = 1$

(2)  $\sqrt{x+2} + 6 = 2x$

【答案】(1)  $x_1=1, x_2=3$ ; (2)  $x = \frac{17}{4}$

【解析】

【分析】(1) 先将分式方程化为整式方程, 然后根据整式方程的解法步骤求解, 最后检验即可解答;

(2) 先将原方程化为  $\sqrt{x+2} = 2x-6$ , 给方程两边平方并整理为一元二次方程, 然后解一元二次方程, 注意  $x$  的取值要保证原方程有意义.

【详解】解: (1) 去分母, 得:  $x-1+x-2=x^2-2x$ ,

移项、合并, 得:  $x^2-4x+3=0$ ,

解得:  $x_1=1, x_2=3$ ,

经检验,  $x^2-2x \neq 0$ ,

$\therefore$  原方程的解为  $x_1=1, x_2=3$ ;

(2) 原方程化为  $\sqrt{x+2} = 2x-6$ ,

两边平方, 得:  $x+2 = (2x-6)^2$ ,

整理为:  $4x^2-25x+34=0$ ,

解得:  $x_1 = \frac{17}{4}, x_2=2$ ,

$\therefore x+2 \geq 0$  且  $2x-6 \geq 0$ ,

$$\therefore x \geq 3,$$

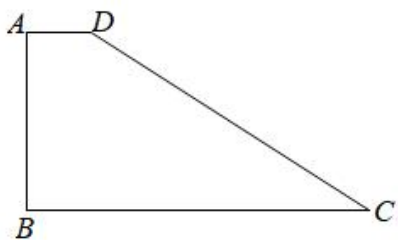
$$\therefore x = \frac{17}{4},$$

故原方程的解为  $x = \frac{17}{4}$ .

【点睛】本题考查解分式方程、无理方程、解一元二次方程、解一元一次不等式组，熟练掌握它们的解法步骤是解答的关键，注意求得的解要使原方程有意义.

#### 四、解答题 (42 分)

27. 如图，在直角梯形  $ABCD$  中， $AD \parallel BC$ ， $\angle B = 90^\circ$ ， $AD = 2$ ， $BC = CD = 10$ ，求梯形  $ABCD$  的周长.



【答案】 28

【解析】

【分析】先利用作辅助线构造矩形，再利用勾股定理分别求出  $BM$  和  $DM$ ，最后求出  $AB$ ，再把四条边相加即可.

【详解】解： $\because AD \parallel BC$ ， $\angle B = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ, \text{ 即 } \angle A = 90^\circ,$$

如图，过  $D$  点作  $DM \perp BC$  于点  $M$ ，

$$\therefore \angle BMD = 90^\circ,$$

$\therefore$  四边形  $ABMD$  是矩形，

$$\therefore BM = AD = 2,$$

$$\therefore MC = 10 - 2 = 8,$$

在  $\text{Rt}\triangle DMC$  中，由  $DM^2 + MC^2 = DC^2$ ，

$$\therefore DM^2 + 8^2 = 10^2$$

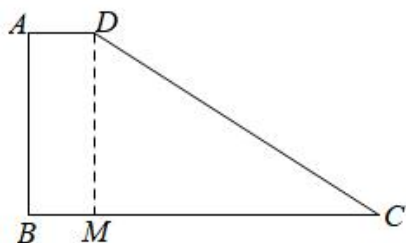
由  $DM > 0$ ，

$$\therefore DM = 6,$$

$$\therefore AB = DM = 6,$$

$$\therefore AB + BC + CD + AD = 6 + 10 + 10 + 2 = 28$$

$\therefore$  梯形  $ABCD$  的周长为 28.



【点睛】 本题考查了矩形的判定与性质和勾股定理，解题的关键是构造矩形，最后求出  $AB$  的值.

28. 某汽车装配厂计划在规定的时限内组装汽车 21 辆，组装了 6 辆后，又追加了组装 5 辆的订单，要求交货时间不超过原来规定的期限，通过改革，提高工效，平均每天比原计划多组装 2 辆汽车，结果恰好提前一天交货. 问：追加订单后，平均每天组装多少辆汽车？

【答案】 5

【解析】

【分析】 利用计划的天数与实际完成的天数之间的关系建立分式方程求解即可.

【详解】 解： 设原计划平均每天组装  $x$  辆汽车，

$$\frac{21}{x} - 1 = \frac{6}{x} + \frac{21 - 6 + 5}{x + 2},$$

解得：  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -10$  (舍),

经检验，当  $x = 3$  时，  $x(x + 2) \neq 0$ ,

$\therefore x = 3$  是该分式方程的解，

$\therefore x + 2 = 5$ ,

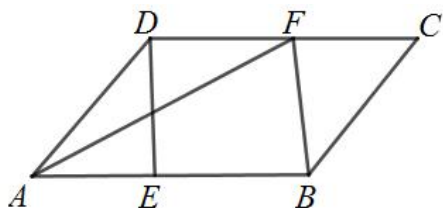
$\therefore$  追加订单后，平均每天组装 5 辆汽车.

【点睛】 本题考查了分式方程的应用，解题关键是找到相等关系建立分式方程，注意解分式方程后需要检验.

29. 在平行四边形  $ABCD$  中，  $E$ ,  $F$  分别是  $AB$ ,  $DC$  上的点， 且  $AE = CF$ ， 连接  $DE$ ,  $BF$ ,  $AF$ .

(1) 求证： 四边形  $DEBF$  是平行四边形；

(2) 若  $AF$  平分  $\angle DAB$ ，  $AE = 3$ ，  $DE = 4$ ，  $BE = 5$ ， 求  $AF$  的长.



【答案】(1) 见解析; (2)  $4\sqrt{5}$

【解析】

【分析】(1) 根据平行四边形的性质得到  $\angle A = \angle C$ ,  $AD = CB$ , 根据全等三角形的性质和平行四边形的判定定理即可得到结论;

(2) 根据平行线的性质和角平分线的定义得到  $\angle DAF = \angle AFD$ , 求得  $AD = DF$ , 根据勾股定理的逆定理和勾股定理即可得到结论.

【详解】(1) 证明:  $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形,

$$\therefore \angle A = \angle C, \quad AD = CB,$$

在  $\triangle DAE$  和  $\triangle BCF$  中

$$\begin{cases} AD = CB \\ \angle A = \angle C \\ AE = CF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DAE \cong \triangle BCF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore DE = BF,$$

$$\because AB = CD, \quad AE = CF,$$

$$\therefore AB - AE = CD - CF,$$

$$\text{即 } DF = BE,$$

$$\because DE = BF, \quad BE = DF,$$

$$\therefore \text{四边形 } DEBF \text{ 是平行四边形};$$

$$(2) \text{ 解: } \because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle DFA = \angle BAF,$$

$$\because AF \text{ 平分 } \angle DAB,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle BAF,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle AFD,$$

$$\therefore AD = DF,$$

$$\because \text{四边形 } DEBF \text{ 是平行四边形},$$

$$\therefore DF = BE = 5, \quad BF = DE = 4,$$

$$\therefore AD = 5,$$

$$\because AE = 3, \quad DE = 4,$$

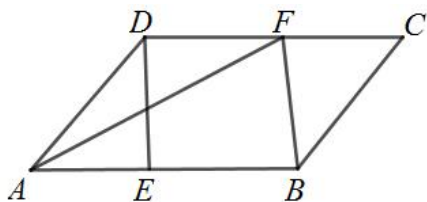
$$\therefore AE^2 + DE^2 = AD^2,$$

$$\therefore \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore DE \parallel BF,$$

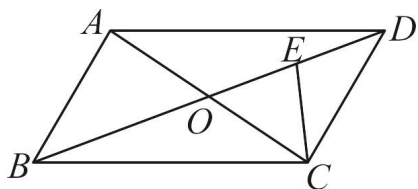
$$\therefore \angle ABF = \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}.$$



【点睛】本题考查了全等三角形的判定和性质，平行四边形的性质和判定，勾股定理及逆定理，能综合运用知识点进行推理是解题的关键.

30. 如图，在  $\square ABCD$  中，对角线  $AC$  和  $BD$  相交于点  $O$ ， $E$  为  $OD$  中点，联结  $EC$ ，设  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ .



(1) 用  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  表示  $\overrightarrow{AO}$ ,  $\overrightarrow{CE}$ ;

(2) 作  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DC}$ .

【答案】(1)  $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{CE} = -\frac{1}{4}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a}$

(2) 作图见解析

【解析】

【分析】(1) 利用平行四边形的性质进行向量之间的转化，再通过计算即可完成求解；

(2) 利用平行四边形法则作出向量即可.

【小问 1 详解】

$$\because \square ABCD,$$

$$\therefore BO = DO, AO = CO, AD = BC, AD \parallel BC, AB = CD, AB \parallel CD,$$

$$\therefore \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b};$$

$$\because E \text{ 点为 } OD \text{ 的中点},$$

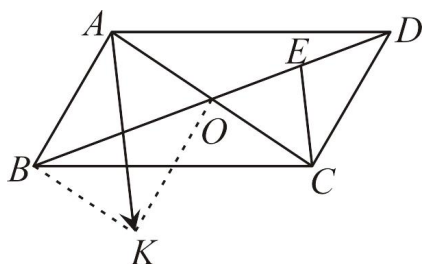
$$\therefore \overrightarrow{BE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BD} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BC} = \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a} - \vec{b} = -\frac{1}{4}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a};$$

$$\therefore \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \overrightarrow{CE} = -\frac{1}{4}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a}.$$

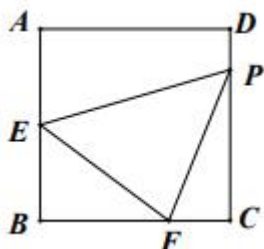
【小问 2 详解】

由  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB}$ , 即可作图如下:  $\overrightarrow{AK}$  即为所求.



【点睛】 本题考查了向量之间的加减运算和向量作图, 解题关键是理解向量的运算法则.

31. 如图, 已知正方形  $ABCD$ , 边长  $AB = 6$ ,  $E$  是  $AB$  的中点, 点  $F$  在边  $BC$  上, 且  $BF = 2FC$ , 点  $P$  在线段  $CD$  上, 连接  $PE$ 、 $EF$ 、 $PF$ .



- (1) 若  $\triangle PEF$  为等腰三角形, 求  $PC$  的长度;
- (2) 若  $EF$  平分  $\angle BEP$ , 求  $PC$  的长度.

【答案】 (1)  $\sqrt{21}$

(2)  $\frac{19}{4}$

【解析】

【分析】 (1) 根据矩形的性质和勾股定理可得  $EF = 5$ , 设  $PC = x$ , 则  $PF = \sqrt{x^2 + 4}$ , 过点  $P$  作  $PG \perp AB$  于点  $G$ , 得矩形  $ADPG$ , 求出  $PE$ , 若  $\triangle PEF$  为等腰三角形, 分 3 种情况: ①  $EF = PF$ , ②  $EF = PE$ , ③  $PE = PF$ , 然后计算即可;

(2) 过点  $F$  作  $FH \perp PE$  于点  $H$ , 证明  $Rt\triangle BEF \cong Rt\triangle HEF$  (HL), 可得  $EH = BE = 3$ , 设  $PC = x$ , 表示出  $PF$  和  $HP$ , 然后利用勾股定理即可解决问题.

【小问 1 详解】

解: 在正方形  $ABCD$  中,

$\therefore AB = 6$ ,  $E$  是  $AB$  的中点,

$$\therefore AE = BE = 3,$$

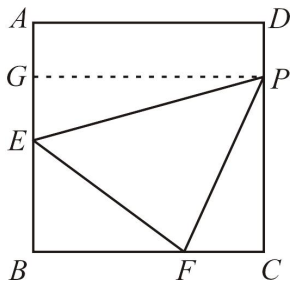
$$\therefore BF = 2FC,$$

$$\therefore BF = 4, FC = 2,$$

$$\therefore EF = \sqrt{BE^2 + BF^2} = 5,$$

$$\text{设 } PC = x, \text{ 则 } PF = \sqrt{PC^2 + FC^2} = \sqrt{x^2 + 4},$$

如图, 过点  $P$  作  $PG \perp AB$  于点  $G$ , 得矩形  $ADPG$ ,



$$\therefore AG = DP = DC - PC = 6 - x,$$

$$\therefore GE = AE - AG = 3 - (6 - x) = x - 3,$$

$$\therefore PE = \sqrt{PG^2 + GE^2} = \sqrt{6^2 + (x - 3)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 45},$$

$\therefore \triangle PEF$  为等腰三角形,

$\therefore$  分 3 种情况:

$$\textcircled{1} EF = PF,$$

$$\therefore 5 = \sqrt{x^2 + 4},$$

$$\text{解得: } x = \sqrt{21} \text{ (负值已舍去);}$$

$$\textcircled{2} EF = PE,$$

$$\therefore 5 = \sqrt{x^2 - 6x + 45},$$

此方程无解, 情况不存在;

$$\textcircled{3} PE = PF,$$

$$\therefore \sqrt{x^2 - 6x + 45} = \sqrt{x^2 + 4},$$

$$\text{解得: } x = \frac{41}{6},$$

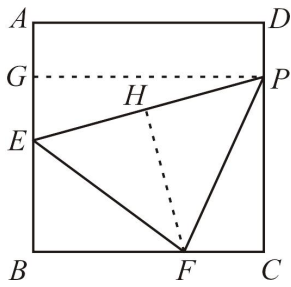
$$\therefore \frac{41}{6} > 6,$$

$\therefore$  点  $P$  在线段  $CD$  的延长线上, 不符合题意, 舍去.

综上所述:  $PC$  的长度为  $\sqrt{21}$ ;

【小问 2 详解】

如图，过点  $F$  作  $FH \perp PE$  于点  $H$ ，



$\because EF$  平分  $\angle BEP$ ,

$\therefore BF = HF = 4$

在  $Rt\triangle BEF$  和  $Rt\triangle HEF$  中, 
$$\begin{cases} EF = EF \\ BF = HF \end{cases},$$

$\therefore Rt\triangle BEF \cong Rt\triangle HEF$  (HL),

$\therefore EH = BE = 3$ ,

设  $PC = x$ ,

由 (1) 可知  $PF = \sqrt{x^2 + 4}$ ,  $PE = \sqrt{x^2 - 6x + 45}$ ,

$\therefore HP = PE - EH = \sqrt{x^2 - 6x + 45} - 3$ ,

在  $Rt\triangle HPF$  中, 根据勾股定理得:  $HP^2 + FH^2 = PF^2$ ,

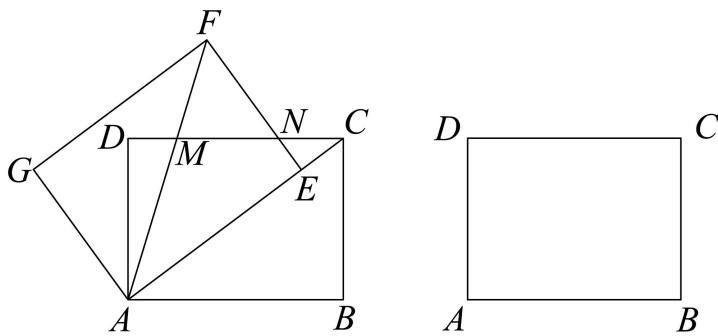
$\therefore \left(\sqrt{x^2 - 6x + 45} - 3\right)^2 + 4^2 = \left(\sqrt{x^2 + 4}\right)^2$ ,

解得  $x = \frac{19}{4}$ .

$\therefore PC$  的长度为  $\frac{19}{4}$ .

【点睛】 本题考查了正方形的性质, 等腰三角形的性质, 全等三角形的判定和性质, 勾股定理, 解一元二次方程等, 解决本题的关键是分类讨论思想的灵活运用.

32. 如图, 在矩形  $ABCD$  中,  $AB = 8$ ,  $AD = 6$ , 将矩形  $ABCD$  绕点  $A$  逆时针旋转得到矩形  $AEFG$ .



(备用图)

(1) 当点  $E$  落在对角线  $AC$  上时,  $AF$ 、 $EF$  分别交  $DC$  于点  $M$ 、 $N$ .

①求证:  $MA = MC$ ;

②求  $MN$  的长;

(2) 在旋转过程中, 若直线  $AE$  经过线段  $BG$  的中点  $P$ , 请直接写出线段  $PE$  的长度.

【答案】(1) ①证明见解析; ②  $\frac{15}{4}$

(2)  $8 - \sqrt{7}$  或  $8 + \sqrt{7}$

【解析】

【分析】(1) ①利用矩形性质和旋转性质证明  $\angle MAC = \angle MCA$ , 再根据等腰三角形的等角对等边即可证得结论; ②先利用勾股定理求得  $AM$ 、 $AC$ , 进而求得  $MF$ , 再证明  $\angle MFN = \angle MNF$  得到  $MN = MF$  即可求解;

(2) 先利用勾股定理求得  $AP$ , 分情况画图, 由  $PE = AP + AE$  和  $PE = AE - AP$  进行求解即可.

【小问 1 详解】

①证明:  $\because$  四边形  $ABCD$  是矩形,

$$\therefore AB \parallel CD, CD = AB = 8, BC = AD = 6,$$

$$\therefore \angle MCA = \angle CAB,$$

由旋转性质得  $\angle CAB = \angle MAC$ ,

$$\therefore \angle MAC = \angle MCA, \therefore MA = MC;$$

②解: 设  $MA = MC = x$ , 则  $DM = 8 - x$ ,

在  $\text{Rt}\triangle ADM$  中, 由勾股定理得:  $6^2 + (8 - x)^2 = x^2$ ,

$$\text{解得: } x = \frac{25}{4},$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ABC \text{ 中, } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10,$$

旋转性质得:  $AF = AC = 10$ ,  $\angle AEF = \angle B = 90^\circ$ ,

$$\therefore FM = AF - AM = \frac{15}{4}, \angle MAC + \angle AFE = 90^\circ, \angle CNE + \angle MCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MAC = \angle MCE, \angle MNF = \angle CNE,$$

$\therefore \angle AFE = \angle MNF$ , 即  $\angle MFN = \angle MNF$ ,

$$\therefore MN = MF = \frac{15}{4}.$$

【小问 2 详解】

解: 分情况讨论,

①如图 1, 过点  $B$  作  $BH \perp AC$  于  $H$ , 则  $\angle GAP = \angle BHP = 90^\circ$ ,

$\therefore$  点  $P$  为  $GB$  的中点,

$\therefore GP = BP$ , 又  $\angle APG = \angle HPB$ ,

$\therefore \triangle APG \cong \triangle HPB$  (AAS),

$\therefore AP = HP$ ,  $AG = BH = 6$ ,

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle AHB$  中,  $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7}$ ,

$\therefore AP = PH = \frac{1}{2}AH = \sqrt{7}$ ,

$\therefore PE = AE - AP = 8 - \sqrt{7}$ ;

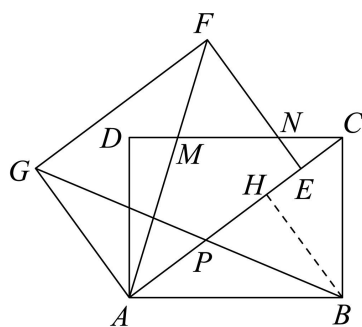


图1

②如图 2, 过点  $B$  作  $BK \perp EA$  交  $EA$  延长线于  $K$ , 则  $\angle GAP = \angle BKP = 90^\circ$ ,

$\therefore$  点  $P$  为  $GB$  的中点,

$\therefore GP = BP$ , 又  $\angle APG = \angle KPB$ ,

$\therefore \triangle APG \cong \triangle KPB$  (AAS),

$\therefore AP = KP$ ,  $AG = BK = 6$ ,

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle AKB$  中,  $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7}$ ,

$\therefore AP = KP = \frac{1}{2}AK = \sqrt{7}$ ,

$\therefore PE = AE + AP = 8 + \sqrt{7}$ ,

综上, 线段  $PE$  的长度为  $8 - \sqrt{7}$  或  $8 + \sqrt{7}$

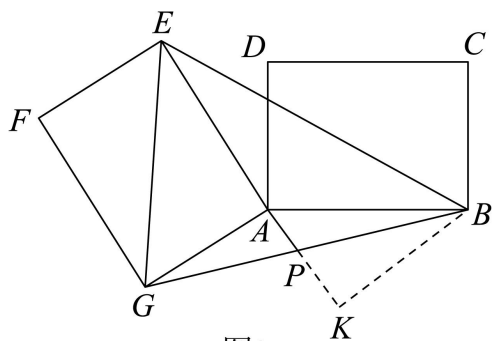


图2

【点睛】 本题考查矩形的性质、旋转的性质、等腰三角形的判定、全等三角形的判定与性质、勾股定理等知识，熟练掌握相关知识的联系与运用是解答的关键，注意分类讨论思想的运用.

