

上海市张江集团中学 2024-2025 学年第一学期

八年级期中考·数学试卷

试卷满分：150 分

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 将抛物线 $y = -5x^2 + 1$ 先向左平移 1 个单位，再向下平移 2 个单位，所得的抛物线解析式为（ ）

- A. $y = -5(x-1)^2 - 1$ B. $y = -5(x-1)^2 - 2$ C. $y = -5(x+1)^2 - 1$ D. $y = -5(x+1)^2 + 3$

【答案】C

【解析】

【分析】根据平移规律“左加右减，上加下减”即可得到答案.

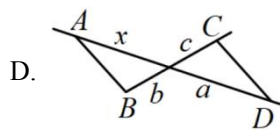
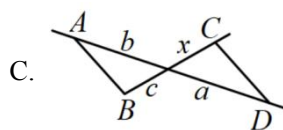
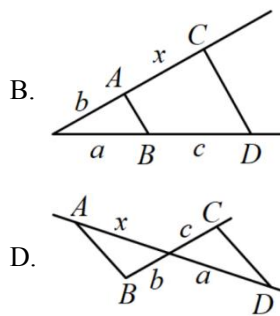
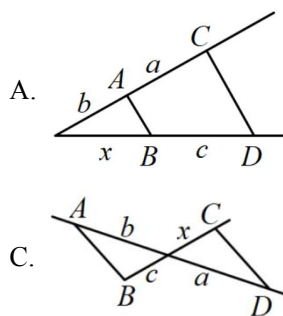
【详解】解：根据平移规律“左加右减，上加下减”得到平移后的抛物线为 $y = -5(x+1)^2 + 1 - 2$,

即 $y = -5(x+1)^2 - 1$,

故选 C.

【点睛】本题主要考查平移规律“左加右减，上加下减”，熟练掌握平移规律“左加右减，上加下减”是解题的关键.

2. 已知线段 a , b , c , 求作线段 x , 使 $ab = cx$, 则下列作图中 ($AB \parallel CD$) 作法正确的是 ()



【答案】D

【解析】【分析】根据平行线分线段成比例定理判断即可.

【详解】选项 A 中，由 $AB \parallel CD$ 可得： $\frac{a}{c} = \frac{b}{x}$, 即有 $ax = bc$, 不合题意;

选项 B 中，由 $AB \parallel CD$ 可得： $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, 即有 $ax = bc$, 不合题意;

选项 C 中，由 $AB \parallel CD$ 可得： $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$, 即有 $ac = bx$, 不合题意;

选项 D 中,

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \frac{a}{c} = \frac{x}{b},$$

$$\therefore ab = cx,$$

故选项 D 符合题意.

故选: D.

【点睛】 本题考查作图 - 复杂作图, 平行线分线段成比例定理, 解题的关键是理解题意, 灵活运用所学知识解决问题.

3. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $CD \perp AB$, 垂足为点 D , 下列式子中正确的是 ()

A. $\sin A = \frac{AC}{AB}$

B. $\cos A = \frac{CD}{AC}$

C. $\tan A = \frac{CD}{BD}$

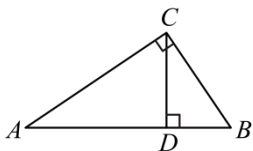
D. $\cot A = \frac{AC}{BC}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 此题考查三角函数的问题, 关键是利用三角函数的定义解答. 利用三角函数的定义解答即可.

【详解】 解: 如图,



A. $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{CD}{AC}$, 故不正确;

B. $\cos A = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$, 故不正确;

C. $\tan A = \frac{CD}{AD} = \frac{BC}{AC}$, 故不正确;

D. $\cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{CD}$, 正确;

故选 D.

4. 下列说法: ①三点确定一个圆; ②相等的圆心角所对的弧相等; ③同圆或等圆中, 等弦所对的弧相等; ④三角形的外心到三角形各顶点距离相等其中, 正确的个数共有 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了确定圆的性质, 圆周角定理和三角形的内心和外心, 熟悉相关性质是解题的关键. 根

据确定圆的条件对①进行判断；根据圆周角定理对②进行判断；根据圆心角、弧、弦的关系对③进行判断；根据三角形内心的定义对④进行判断.

【详解】解：不共线的三点确定一个圆，所以①错误；

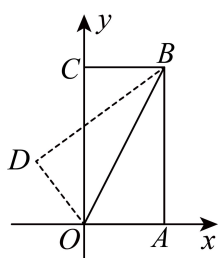
在同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧相等，所以②错误；

同圆或等圆中，等弦所对的优弧或劣弧对应相等，所以③错误；

三角形的外心到三角形各顶点的距离都相等，所以④正确；

故选：A.

5. 如图，平面直角坐标系中，已知矩形 $OABC$ ， O 为原点，点 A 、 C 分别在 x 轴、 y 轴上，点 B 的坐标为 $(1, 2)$ ，连接 OB ，将 $\triangle OAB$ 沿直线 OB 翻折，点 A 落在点 D 的位置，则 $\cos \angle COD$ 的值是 ()



A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{4}$

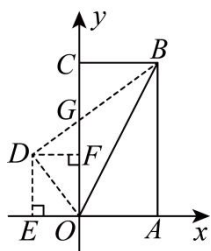
D. $\frac{4}{5}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据翻折不变性及勾股定理求出 GD 、 CG 的长，再根据相似三角形的性质，求出 DF 的长， OF 的长即可解决问题；

【详解】解：作 $DF \perp y$ 轴于 F ， $DE \perp x$ 轴于 E ， BD 交 OC 于 G 。



$\therefore$ 在 $\triangle BCG$ 与 $\triangle ODG$ 中，

$$\begin{cases} \angle BCG = \angle ODF \\ OD = BC \\ \angle DOF = \angle GBC \end{cases},$$

$\therefore \triangle BCG \cong \triangle ODG$,

$\therefore GO = GB$,

∴ 设 $GO = GB = x$,

则 $CG = GD = 2 - x$,

于是在 $\text{Rt}\triangle CGB$ 中, $(2-x)^2 + 1^2 = x^2$;

解得 $x = \frac{5}{4}$.

$$GD = 2 - x = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4};$$

∵ $BC \perp y$ 轴, $DF \perp y$ 轴,

$$\therefore \angle BCG = \angle DFG,$$

$$\therefore \angle BGC = \angle DGF,$$

$$\therefore \triangle CBG \sim \triangle FDG,$$

$$\therefore \frac{DF}{BC} = \frac{DG}{BG},$$

$$\therefore DF = \frac{3}{5};$$

又 ∵ $DO = 1$,

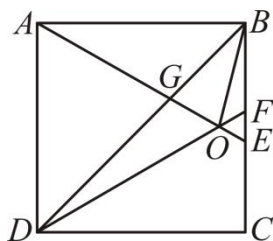
$$\therefore OF = \sqrt{1^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

$$\therefore \cos \angle DOC = \frac{OF}{OD} = \frac{4}{5}.$$

故选: D.

【点睛】本题考查全等三角形的判定与性质、矩形与折叠的性质、相似三角形的判定和性质、勾股定理等知识, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 构造相似三角形解决问题, 属于中考常考题型.

6. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $\triangle AOD$ 是等边三角形, AO 和 DO 的延长线分别交边 BC 于点 E 和点 F , 连结 BD 交线段 AO 于点 G , 连结 BO , 下列结论中错误的是 ().



A. $AE = 2CF$

B. $BO^2 = GO \cdot AO$

C. $\triangle BEO \sim \triangle DOG$

D. $\frac{DO}{BO} = \frac{BO}{EO}$

【答案】D

【解析】

【分析】由正方形和等边三角形的性质可证 $\angle BAE = \angle CDF = 30^\circ$ ，从而 $DF = 2CF$ ，再证明

$\triangle ABE \cong \triangle DCF$ (ASA) 可判断 A；证明 $\triangle BGO \sim \triangle ABO$ 可判断 B；由平行线的性质可证

$\angle CFO = \angle ADO = \angle DOG = 60^\circ$ ，由补角的性质可求 $\angle BOE = \angle DGO = 105^\circ$ ，从而可判断 C；由

$\angle BOD = \angle AOD + \angle AOB = 135^\circ \neq \angle BOE$ 可判断 D.

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $\angle ABC = \angle ADC = \angle BAD = \angle C = 90^\circ$ ， $AD \parallel CB$ ， $\angle ABD = \angle ADB = 45^\circ$ ， $AB = DC$ ，

∵ $\triangle ADO$ 是等边三角形，

∴ $\angle OAD = \angle ODA = \angle AOD = 60^\circ$ ， $AD = DO = AO$ ，

∴ $\angle BAE = \angle CDF = 30^\circ$ ， $AO = AB$ ，

∴ $DF = 2CF$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DCF$ 中，

∴ $\angle BAE = \angle CDF$ ， $AB = DC$ ， $\angle ABE = \angle DCF = 90^\circ$

∴ $\triangle ABE \cong \triangle DCF$ (ASA)，

∴ $AE = DF$ ，

∴ $AE = 2CF$ ，故 A 不符合题意；

∵ $AO = AB$ ， $\angle BAE = 30^\circ$ ， $\angle ABD = 45^\circ$

∴ $\angle ABO = \angle AOB = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$ ， $\angle BGO = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$ ，

∴ $\angle ABO = \angle AOB = \angle BGO$ ，

∴ $\triangle BGO \sim \triangle ABO$ ，

∴ $\frac{GO}{BO} = \frac{BO}{AO}$ ，

∴ $BO^2 = GO \cdot AO$ ，故 B 不符合题意；

∵ $AD \parallel CB$ ，

∴ $\angle CFO = \angle ADO = \angle DOG = 60^\circ$ ，

∴ $\angle AOB = \angle BGO = 75^\circ$ ，

∴ $\angle BOE = \angle DGO = 105^\circ$ ，

∴ $\triangle BEO \sim \triangle DOG$ ，故 C 不符合题意；

∴ $\angle BOD = \angle AOD + \angle AOB = 135^\circ \neq \angle BOE$ ，

∴ $\triangle DBO$ 与 $\triangle BEO$ 不相似，

$\therefore \frac{DO}{BO} = \frac{BO}{EO}$ 不成立，故 D 符合题意；

故选 D.

【点睛】 本题考查相似三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，等边三角形的性质，正方形的性质，直角三角形 30 度角的性质等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

二. 填空题 (本大题共 12 小题，每小题 4 分，满分 48 分)

7. 已知 $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ ，则 $\frac{b}{b-2a} =$ _____.

【答案】 $-\frac{3}{5}$ 或 -0.6

【解析】

【分析】 此题考查了比例的性质，根据比例性质即可求解，解题的关键是正确理解比例的性质.

【详解】 $\because \frac{a}{b} = \frac{4}{3}$,

$\therefore$ 设 $a = 4k$, $b = 3k$ ($k \neq 0$),

$\therefore \frac{b}{b-2a} = \frac{3k}{3k-2 \times 4k} = \frac{3k}{-5k} = -\frac{3}{5}$,

故答案为: $-\frac{3}{5}$.

8. 二次函数 $y = (x-1)^2 + 1$ 的图像与 y 轴的交点坐标是 _____.

【答案】 (0, 2)

【解析】

【分析】 把 $x=0$ 代入 $y = (x-1)^2 + 1$ ，即可求出与 y 轴的交点坐标.

【详解】 把 $x=0$ 代入 $y = (x-1)^2 + 1$ ，得

$y = (0-1)^2 + 1 = 2$,

$\therefore$ 图像与 y 轴的交点坐标是 (0, 2).

故答案为 (0, 2).

【点睛】 本题考查了二次函数与坐标轴的交点坐标，抛物线与 x 的交点纵坐标为 0，与 y 轴的交点横坐标为 0.

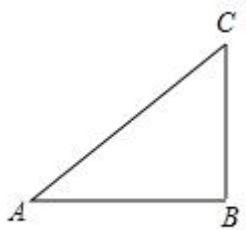
9. 在一个陡坡上前进 5 米，水平高度升高了 3 米，则坡度 $i =$ _____.

【答案】 3:4.

【解析】

【详解】 试题分析: 如图所示: $AC=5$ 米, $BC=3$ 米, 先求出水平方向上前进的距离 $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{16}$,

然后根据山坡的坡度=竖直方向上升的距离：水平方向前进的距离，即可解得坡度 $i=BC:AB=3:4$ 。



10. 已知 $\odot O$ 的半径为 5cm ，A 为线段 OB 的中点，当 $OB=9\text{cm}$ 时，点 A 与 $\odot O$ 的位置关系是_____。

【答案】点 A 在圆 O 内。

【解析】

【分析】根据线段中点的性质，可得 $OA=4.5$ ，根据当 $d>r$ 时，点在圆外；当 $d=r$ 时，点在圆上；当 $d<r$ 时，点在圆内。

【详解】解：A 为线段 OB 的中点，当 $OB=9\text{cm}$ 时，得 $OA=\frac{1}{2}OB=4.5\text{ (cm)}$ ，

$\because r=5\text{cm}$ ，

$\therefore d<r$ ，

$\therefore$ 点 A 与 $\odot O$ 的位置关系是点 A 在圆 O 内，

故答案为：点 A 在圆 O 内。

【点睛】本题考查点与圆的位置关系，解题的关键是记住：当 $d>r$ 时，点在圆外；当 $d=r$ 时，点在圆上；当 $d<r$ 时，点在圆内。

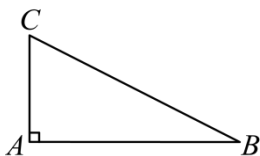
11. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle A=90^\circ$ ，若 $\sin B=\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，则 $\cot C=_____$ 。

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形的相关计算，勾股定理，根据题意可设 $AC=\sqrt{6}x$ ， $BC=3x$ ，利用勾股定理表示出 $AB=\sqrt{3}x$ ，进而求出结果。

【详解】解：如图，



$\because \text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle A=90^\circ$ ，

$$\therefore \sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

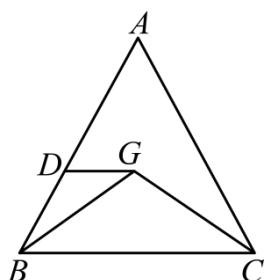
设 $AC = \sqrt{6}x$, $BC = 3x$,

$$\therefore AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{(3x)^2 - (\sqrt{6}x)^2} = \sqrt{3}x,$$

$$\therefore \cot C = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{6}x}{\sqrt{3}x} = \sqrt{2},$$

故答案为: $\sqrt{2}$.

12. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 3$, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 如果 $DG \parallel BC$, 那么 $DG =$ _____.

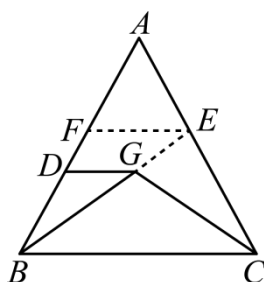


【答案】1

【解析】

【分析】首先延长 BG 交 AC 于点 E , 取 AD 的中点 F , 连接 EF , 由点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 易得 $BG:BE = 2:3$, EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线, 即可求得 EF 的长, 证得 $\triangle BDG \sim \triangle BFE$, 然后由相似三角形的对应边成比例, 求得 DG 的长.

【详解】解: 延长 BG 交 AC 于点 E , 取 AB 的中点 F , 连接 EF ,



$\because$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$\therefore AE = CE$, $BG:BE = 2:3$,

$\therefore EF$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore EF \parallel BC$, $EF = \frac{1}{2}BC = \frac{3}{2}$,

$\therefore DG \parallel BC$,

$\therefore DG \parallel EF$,

$$\therefore \triangle BDG \sim \triangle BFE,$$

$$\therefore DG: EF = BG: BE = 2: 3,$$

$$\therefore DG = \frac{2}{3} EF = 1.$$

故答案为: 1.

【点睛】此题考查了相似三角形的判定与性质、三角形重心的性质以及三角形中位线的性质. 此题难度适中, 注意掌握辅助线的作法, 注意数形结合思想的应用.

13. 已知点 $A(-3, y_1)$ 和 $B(2, y_2)$ 在二次函数 $y = ax^2 + 2ax + c$ ($a < 0$) 图象上, 则 y_1 _____ y_2 . (填 $>$ 、 $<$ 或 $=$)

【答案】 $>$

【解析】

【分析】本题主要考查对二次函数图象上点的坐标特征, 二次函数的性质等知识点的理解和掌握, 能熟练地运用二次函数的性质进行推理是解此题的关键. 根据二次函数的解析式得出图象的开口向下, 对称轴是直线 $x = -1$, 根据 $-1 - (-3) = 2$, $2 - (-1) = 3$, $2 < 3$, 距离对称轴越近, 函数值越大, 即可得出答案.

【详解】解: $\because y = ax^2 + 2ax + c$ ($a < 0$),

$\therefore$ 图象的开口向下, 对称轴是直线 $x = -\frac{2a}{2a} = -1$,

$$\therefore -1 - (-3) = 2, \quad 2 - (-1) = 3,$$

$$\text{又} \because 2 < 3,$$

$$\therefore y_1 > y_2,$$

故答案为: $>$.

14. 抛物线 $y = x^2 - x - 1$ 关于坐标原点对称的抛物线的解析式为_____.

【答案】 $y = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$

【解析】

【分析】利用配方法可得抛物线的顶点坐标为 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$, 先确定点 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$ 关于原点对称的对应点的坐标, 由于关于原点对称的两抛物线开口方向相反, 则可根据顶点式写出对称后的抛物线解析式.

【详解】解: $\because y = x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4},$

∴ 抛物线 $y = x^2 - x - 1$ 的顶点坐标为 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$,

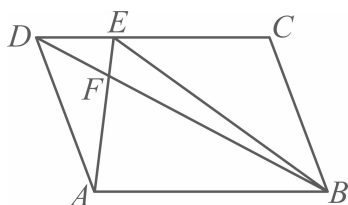
∴ 点 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$ 关于原点对称的对应点的坐标为 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$

∴ 抛物线 $y = x^2 - x - 1$ 关于坐标原点对称的抛物线的解析式为 $y = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$;

故答案为: $y = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$.

【点睛】本题考查了二次函数与几何变换, 正确的理解题意是解题的关键.

15. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 是 CD 边上一点, $DE : EC = 2 : 3$, 连接 AE 、 BE 、 BD , 且 AE 、 BD 交于点 F . 若 $S_{\triangle DEF} = 2$, 则 $S_{\triangle ABE} =$ _____.



【答案】 $\frac{35}{2}$

【解析】

【分析】根据已知可得到相似三角形, 从而可得到其相似比, 再根据相似三角形的面积比等于相似比的平方求出 $\triangle ABE$, $\triangle BEF$ 的面积即可;

【详解】解: ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $DE \parallel AB$,

∴ $\triangle DFE \sim \triangle BFA$,

∵ $DE : EC = 2 : 3$,

∴ $DE : AB = 2 : 5$, $DF : FB = 2 : 5$,

∵ $S_{\triangle DEF} = 2$,

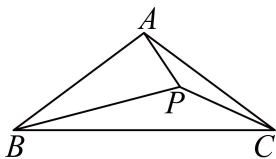
∴ $S_{\triangle ABF} = \frac{25}{2}$, $S_{\triangle BEF} = 5$,

∴ $S_{\triangle ABE} = \frac{25}{2} + 5 = \frac{35}{2}$,

故答案为 $\frac{35}{2}$.

【点睛】本题考查了相似三角形的性质, 相似三角形的面积比等于相似比的平方, 同高的三角形的面积之比等于底的比, 解题的关键是掌握相似三角形的性质.

16. 定义: 如果 $\triangle ABC$ 内有一点 P , 满足 $\angle PAC = \angle PCB = \angle PBA$, 那么称点 P 为 $\triangle ABC$ 的布罗卡尔点, 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5$, $BC = 8$, 点 P 为 $\triangle ABC$ 的布罗卡尔点, 如果 $PA = 2$, 那么 $PC =$ _____.



【答案】 $\frac{16}{5}$

【解析】

【分析】 根据题意先证明出 $\triangle ACP \sim \triangle CBP$, 再根据相似比的关系求出 PC 的值.

【详解】 $\because AB = AC = 5$,

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB,$$

$$\because \angle PBA = \angle PCB,$$

$$\therefore \angle PBC = \angle PCA,$$

$$\text{又} \because \angle PAC = \angle PCB,$$

$$\therefore \triangle ACP \sim \triangle CBP,$$

$$\therefore \frac{PC}{PA} = \frac{CB}{AC} = \frac{8}{5},$$

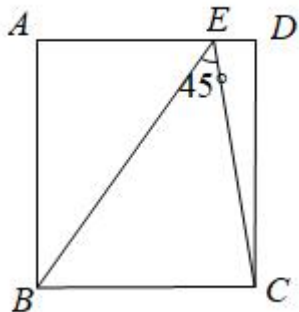
$$\because PA = 2,$$

$$\therefore PC = \frac{16}{5}.$$

故答案为 $\frac{16}{5}$.

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的判定与性质, 掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键.

17. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E 在 AD 上, 若 $\angle BEC = 45^\circ$ 且 $AE = 4$, $ED = 2$, 则 AB 的长为_____.



【答案】 $3 + \sqrt{17}$

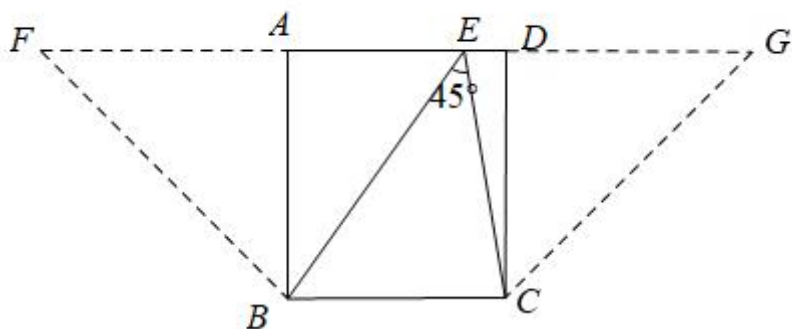
【解析】

【分析】分别以 AB 、 DC 为直角边，以 A 、 D 为直角顶点作等腰直角三角形 ABF 和等腰直角三角形 DCG

构造出一线三等角，此时可以得出 $\triangle BEF \sim \triangle EGC$ ， $\frac{BF}{FE} = \frac{EG}{CG}$ ，设 AB 为 x ，则 $\frac{\sqrt{2}x}{x+4} = \frac{x+2}{\sqrt{2}x}$ ，解得

$x = 3 \pm \sqrt{17}$ ，舍去负数的情况，则 $AB = 3 + \sqrt{17}$ 。

【详解】解：如图所示，分别以 AB 、 DC 为直角边，以 A 、 D 为直角顶点作等腰直角三角形 ABF 和等腰直角三角形 DCG ，



$$\therefore \angle F = \angle FBA = \angle G = \angle GCD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle GEB = \angle F + \angle FBE = 45^\circ + \angle FBE,$$

$$\angle GEB = \angle BEC + \angle GEC = 45^\circ + \angle GEC,$$

$$\therefore \angle FBE = \angle GEC,$$

$$\text{又} \because \angle F = \angle G,$$

$$\therefore \triangle BEF \sim \triangle ECG,$$

$$\therefore \frac{BF}{FE} = \frac{EG}{CG},$$

设 AB 长为 x ， $AB = AF = CD = DG = x$ ，

$$BF = CG = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2}x,$$

$$\therefore \frac{BF}{AF + AE} = \frac{DG + DE}{CG},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}x}{x+4} = \frac{x+2}{\sqrt{2}x},$$

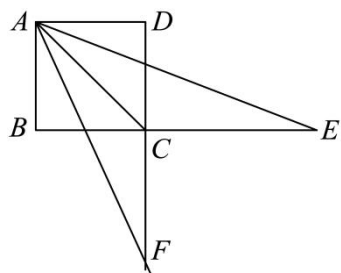
$$\text{解得 } x_1 = 3 + \sqrt{17}, \quad x_2 = 3 - \sqrt{17} \text{ (舍)},$$

$$\therefore AB = 3 + \sqrt{17},$$

故答案为： $3 + \sqrt{17}$ 。

【点睛】本题考查了相似三角形的判定和性质，解题的关键是作出辅助线构建一线三等角模型。

18. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 4, 一个以点 A 为顶点的 45° 角绕点 A 旋转, 角的两边分别与边 BC, DC 的延长线交于点 E, F , 连接 EF . 当 $\triangle AEF$ 是直角三角形时, $\tan \angle AEB = \underline{\hspace{2cm}}$.

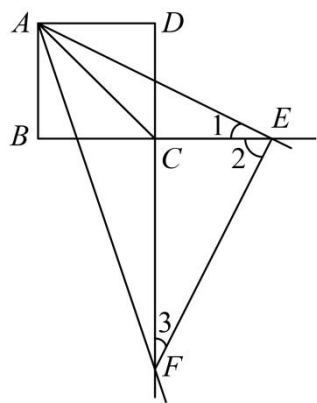


【答案】 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 根据题意分两种情况讨论: ①当 $\angle AEF = 90^\circ$ 时; ②当 $\angle AFE = 90^\circ$ 时; 得出 $\triangle AEF$ 是等腰直角三角形, 利用正方形的性质及全等三角形的判定和性质即可得出结果.

【详解】 ①当 $\angle AEF = 90^\circ$ 时, 如图所示,



即 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$

$\because \angle EAF = 45^\circ$

$\therefore \triangle AEF$ 是等腰直角三角形

$\therefore AE = EF$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形

$\therefore \angle B = \angle BCD = 90^\circ$, $AB = BC = 4$

$\therefore \angle ECF = 90^\circ$

$\therefore \angle 3 + \angle 2 = 90^\circ$

$\therefore \angle 1 = \angle 3$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ECF$ 中,

$$\begin{cases} \angle B = \angle ECF \\ \angle 1 = \angle 3 \\ AE = EF \end{cases}$$

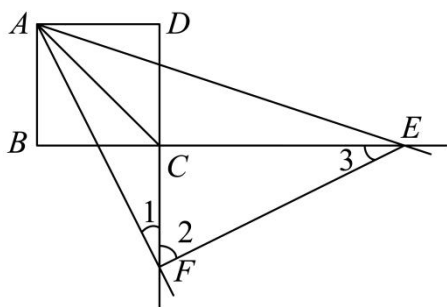
$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ECF \text{ (AAS)}$$

$$\therefore CE = AB = 4$$

$$\therefore BE = BC + CE = 8$$

$$\therefore \tan \angle AEB = \frac{AB}{BE} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2};$$

②当 $\angle AFE = 90^\circ$ 时, 如图所示:



方法如①, 同理可得 $\triangle ADF \cong \triangle FCE$,

$$\therefore CF = AD = 4$$

$$\therefore CE = DF = DC + CF = 8$$

$$\therefore BE = BC + CE = 12$$

$$\therefore \tan \angle AEB = \frac{AB}{BE} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3};$$

综上所述, 当 $\triangle AEF$ 是直角三角形时, $\tan \angle AEB = \frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{3}$.

故答案为: $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{3}$.

【点睛】题目主要考查求角的正切值, 正方形的性质及全等三角形的性质和判定, 等腰直角三角形的性质等, 理解题意, 综合运用这些知识点进行分类讨论是解题关键.

三. 解答题 (本大题共 7 题, 第 19~22 题每题 10 分; 第 23、24 题 12 分, 第 25 题 14 分, 满分 78 分)

19. 计算: $\frac{\sqrt{2}}{4} \sin 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \frac{1}{2 - \tan 60^\circ} + 2 \sin 60^\circ.$

【答案】-1

【解析】

【分析】根据特殊角的三角函数值进行计算即可求解.

【详解】解： $\frac{\sqrt{2}}{4} \sin 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \frac{1}{2 - \tan 60^\circ} + 2 \sin 60^\circ$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \frac{1}{2 - \sqrt{3}} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

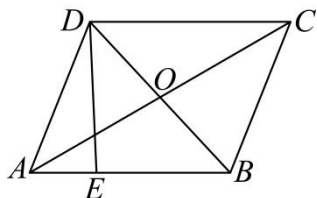
$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - (2 + \sqrt{3}) + \sqrt{3}$$

$$= 1 - 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3}$$

$$= -1.$$

【点睛】本题考查了特殊角的三角函数值的混合运算，掌握特殊角的三角函数值是解题的关键.

20. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， E 为边 AB 上一点，且 $BE = 2AE$. 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.



(1) 填空：用向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的式子表示向量 $\overrightarrow{DE} =$ _____；

(2) 如果点 F 是线段 OC 的中点，那么用向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的线性组合表示向量 $\overrightarrow{EF} =$ _____，并在图中画出向量 $\overrightarrow{EF}$ 在向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 方向上的分向量.

【答案】(1) $-\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}$

(2) $\frac{5}{12}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$ ，图见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了作图—复杂作图，平面向量的三角形法则，平行四边形法则等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识.

(1) 根据三角形法则可得 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}$ ；

(2) 根据三角形法则以及平行四边形法则进行计算与画图即可.

【小问 1 详解】

解： $\because BE = 2AE$,

$$\therefore AE = \frac{1}{3}AB,$$

$$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\vec{a},$$

$$\because \overrightarrow{AD} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a},$$

【小问2详解】

解：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，点 F 是线段 OC 的中点，

$$\therefore AF = AO + OF = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{4}AC = \frac{3}{4}AC,$$

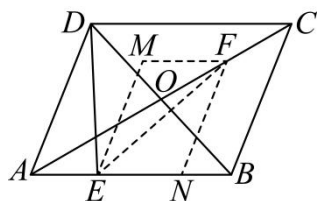
$$\because \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b},$$

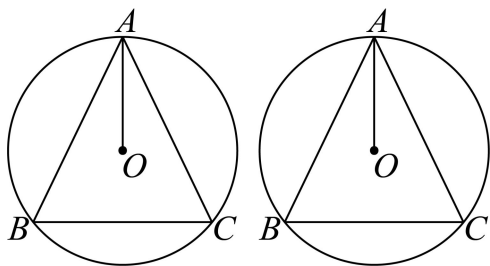
$$\therefore \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} = \frac{5}{12}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b},$$

如图，过 E 作 AD 的平行线，过 F 作 $FM \parallel AB$ 交与过 E 作 AD 的平行线交于点 M ，过 F 作 $FN \parallel EM$ 交 AB 于 N ，

∴ 向量 $\overrightarrow{EF}$ 在向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 方向上的分向量分别为： $\overrightarrow{EM}$ ， $\overrightarrow{EN}$ ，如图所示：



21. 如图， AB 、 AC 是 $\odot O$ 的两条弦，且 $AB = AC$ 。



(1) 求证： AO 平分 $\angle BAC$ ；

(2) 若 $AB = 4\sqrt{5}$ ， $BC = 8$ ，求半径 OA 的长。

【答案】(1) 证明见解析

(2) $OA = 5$

【解析】

【分析】(1) 连接 OB 、 OC ，由弧弦圆心角的关系可得，进而可得 $\triangle AOB \cong \triangle AOC$ (SAS)，得到

$\angle OAB = \angle OAC$ ，即可求证；

(2) 延长 AO 交 BC 于点 D ，由三线合一可得 $AD \perp BC$ ， $BD = \frac{1}{2}BC = 4$ ，利用勾股定理可得

$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 8$ ，设 $\odot O$ 的半径为 x ，则 $OA = OB = x$ ， $OD = 8 - x$ ，在 $\text{Rt}\triangle BOD$ 中再利用勾股定理即可求解.

【小问 1 详解】

证明：连接 OB 、 OC ，

$$\because AB = AC,$$

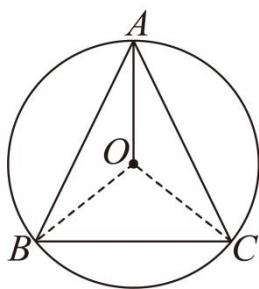
$$\therefore \angle AOB = \angle AOC,$$

$$\because OB = OC, \quad AO = AO,$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle AOC (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OAC,$$

$$\therefore AO \text{ 平分 } \angle BAC;$$



【小问 2 详解】

解：延长 AO 交 BC 于点 D ，

$$\because AB = AC, \quad AO \text{ 平分 } \angle BAC,$$

$$\therefore AD \perp BC,$$

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ, \quad BD = \frac{1}{2}BC = 4,$$

$$\therefore AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - 4^2} = 8,$$

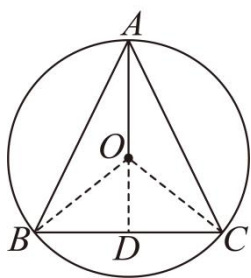
设 $\odot O$ 的半径为 x ，则 $OA = OB = x$ ， $OD = 8 - x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BOD$ 中， $BD^2 + OD^2 = OB^2$ ，

$$\therefore 4^2 + (8 - x)^2 = x^2,$$

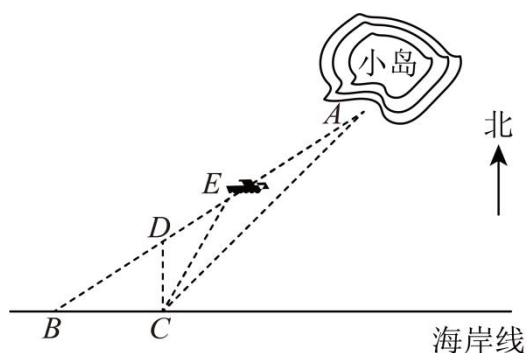
解得 $x = 5$ ，

$$\therefore OA = 5.$$



【点睛】本题考查了弧弦圆心角的关系，全等三角形的判定和性质，等腰三角形的性质，勾股定理，正确作出辅助线是解题的关键.

22. 如图， A 点、 B 点分别表示小岛码头、海岸码头的位置，离 B 点正东方向的 7.00km 处有一海岸瞭望塔 C ，又用经纬仪测出： A 点分别在 B 点的北偏东 57° 处、在 C 点的东北方向。（注： $\tan 33^\circ \approx 0.65, \sin 33^\circ \approx 0.54, \cos 33^\circ \approx 0.84$ ，结果精确到 0.01km ）



- (1) 试求出小岛码头 A 点到海岸线 BC 的距离；
- (2) 有一观光客轮 K 从 B 至 A 方向沿直线航行，某瞭望员在 C 处发现，客轮 K 刚好在正北方向的 D 处，当客轮航行至 E 处时，发现 E 点在 C 的北偏东 27° 处，请求出 E 点到 C 点的距离；

【答案】(1) 小岛码头 A 点到海岸线 BC 的距离约为 13.00km

(2) E 点到 C 点的距离约为 7.56km

【解析】

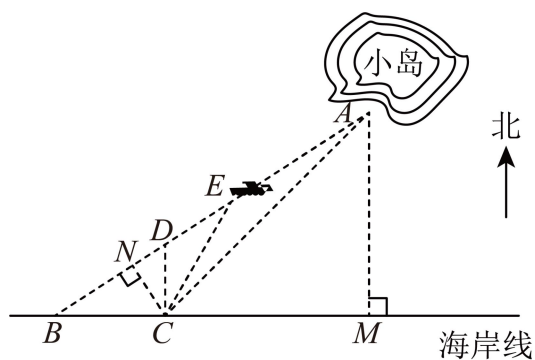
【分析】此题主要考查了解直角三角形的应用；

(1) 根据题意可得 $\angle ACM = 45^\circ$ ， $\angle ABM = 33^\circ$ ， $BC = 7.00\text{km}$ ，然后由 $\tan \angle ABM = \tan 33^\circ = \frac{AM}{BM}$ 列式计算即可；

(2) 过 C 作 $CN \perp AB$ 于 N ，先求出 $\angle BEC = 30^\circ$ ，再解直角三角形求出 NC ，然后根据含 30° 直角三角形的性质得出答案.

【小问 1 详解】

解：过 A 作 $AM \perp BC$ 于 M ，



由题意得: $\angle ACM = 45^\circ$, $\angle ABM = 90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$, $BC = 7.00\text{km}$,

$$\therefore CM = \frac{AM}{\tan \angle ACM} = AM, \quad \tan \angle ABM = \tan 33^\circ = \frac{AM}{BM} \approx 0.65,$$

$$\therefore 0.65 = \frac{AM}{CM + BC} = \frac{AM}{AM + 7},$$

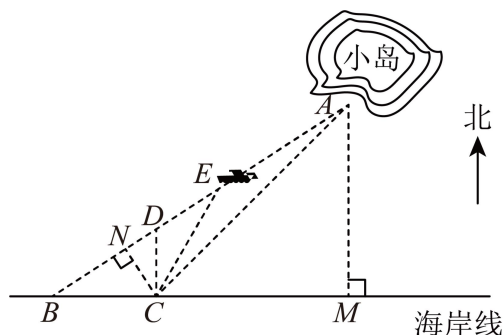
解得: $AM = 13.00\text{km}$,

经经验, $AM = 13.00\text{km}$ 是原方程的解, 且符合题意,

答: 小岛码头 A 点到海岸线 BC 的距离约为 13.00km ;

【小问 2 详解】

解: 如图所示, 过 C 作 $CN \perp AB$ 于 N,



$$\therefore \angle ABC = 33^\circ, \quad \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ - 33^\circ = 57^\circ,$$

$$\text{又} \therefore \angle DCE = 27^\circ,$$

$$\therefore \angle BEC = 57^\circ - 27^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \sin \angle NBC = \sin 33^\circ = \frac{NC}{BC},$$

$$\therefore NC = BC \cdot \sin 33^\circ \approx 7 \times 0.54 = 3.78\text{km},$$

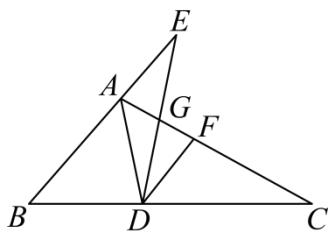
$$\therefore CE = 2NC = 7.56\text{km},$$

答: E 点到 C 点的距离约为 7.56km .

23. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 2\angle B$, AD 平分 $\angle BAC$, $DF \parallel BE$, 点 E 在线段 BA 的延长线上, 联结 DE, 交 AC 于点 G, 且 $\angle E = \angle C$.

(1) 求证: $AD^2 = AF \cdot AB$;

(2) 求证: $AD \cdot BE = DE \cdot AB$.



【答案】 详见解析.

【解析】

【详解】 试题分析: (1) 证明 $\triangle ABD \sim \triangle ADF$, 对应边成比例, 即可证明.

(2) 证明 $\triangle CAD \sim \triangle CBA$, 得出 $\frac{CD}{CA} = \frac{AD}{AB}$. 再证明 $\triangle CAD \cong \triangle EBD$. 得出 $DE = DC, BE = AC$. 即可证明.

试题解析: (1) $\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD,$$

$$\because \angle BAC = 2\angle B,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD = \angle B,$$

$$\because DF \parallel BE,$$

$$\angle ADF = \angle BAD.$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD = \angle B = \angle ADF,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ADF,$$

$$\therefore \frac{AD}{AF} = \frac{AB}{AD},$$

$$AD^2 = AF \cdot AB.$$

$$(2) \because \angle CAD = \angle B, \angle C = \angle C,$$

$$\therefore \triangle CAD \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \frac{CD}{CA} = \frac{AD}{AB}.$$

$$\because \angle BAD = \angle B.$$

$$\therefore AD = AB.$$

$$\text{又} \because \angle CAD = \angle B, \angle E = \angle C,$$

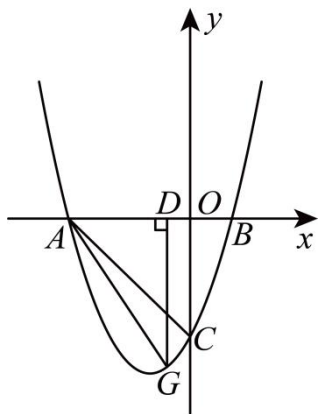
$$\therefore \triangle CAD \cong \triangle EBD.$$

$$\therefore DE = DC, BE = AC.$$

$$\therefore \frac{DE}{BE} = \frac{AD}{AB}.$$

$$\therefore AD \cdot BE = DE \cdot AB.$$

24. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ 的图像与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$ 和点 $B(1, 0)$. 与 y 轴交于点 C , D 是线段 OA 上一点.



(1) 求这条抛物线的表达式和点 C 的坐标;

(2) 如图, 过点 D 作 $DG \perp x$ 轴, 交该抛物线于点 G , 当 $\angle DGA = \angle DGC$ 时, 求 $\triangle GAC$ 的面积;

(3) 点 P 为该抛物线上第三象限内一点, 当 $OD = 1$, 且 $\angle DCB + \angle PBC = 45^\circ$ 时, 求点 P 的坐标.

【答案】(1) $y = x^2 + 2x - 3$, $C(0, -3)$ (2) $\frac{15}{8}$ (3) $P(-1, -4)$

【解析】

【分析】(1) 将 $A(-3, 0)$ 、 $B(1, 0)$ 代入得, $\begin{cases} 9a - 3b - 3 = 0 \\ a + b - 3 = 0 \end{cases}$, 可求 $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$, 则 $y = x^2 + 2x - 3$, 当 $x = 0$

时, $y = -3$, 进而可求 $C(0, -3)$;

(2) 如图 1, 作 $CM \perp DG$ 于 M , 记 AC 与 DG 的交点为 N , 设 $D(m, 0)$, 则 $G(m, m^2 + 2m - 3)$,

$M(m, -3)$, 则 $AD = m + 3$, $DG = -(m^2 + 2m - 3)$, $CM = -m$, $GM = -(m^2 + 2m)$, 由

$\tan \angle DGA = \tan \angle DGC$, 可得 $\frac{m+3}{-(m^2+2m-3)} = \frac{-m}{-(m^2+2m)}$, 计算求出满足要求的解为 $m = -\frac{1}{2}$, 则

$G(-\frac{1}{2}, -\frac{15}{4})$, 待定系数法求直线 AC 的解析式为 $y = -x - 3$, 进而可得 $N(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$, 则 $GN = \frac{5}{4}$, 根

据 $S_{\triangle GAC} = S_{\triangle GAN} + S_{\triangle GCN} = \frac{1}{2}GN \times (x_C - x_A)$, 计算求解即可;

(3) 如图 2, 作 $BH \perp CD$ 于 H , 在 CD 上取 $HN = BH$, 连接 BN 交抛物线于点 P , 由

$\angle BNH = 45^\circ = \angle DCB + \angle PBC$ ，可知点 P 即为所求，由勾股定理得， $CD = BC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ ，由

$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BD \cdot OC = \frac{1}{2}CD \cdot BH$ ，可求 $BH = \frac{3\sqrt{10}}{5}$ ，则 $BN^2 = BH^2 + HN^2 = \frac{36}{5}$ ，待定系数法求直线

CD 的解析式为 $y = -3x - 3$ ，设 $N(n, -3n - 3)$ ，由 $BN^2 = (n - 1)^2 + (-3n - 3)^2 = \frac{36}{5}$ ，可求 $n = -\frac{1}{5}$ ，

$n = -\frac{7}{5}$ (舍去)，则 $N(-\frac{1}{5}, -\frac{12}{5})$ ，待定系数法求直线 BN 的解析式为 $y = 2x - 2$ ，联立得，

$2x - 2 = x^2 + 2x - 3$ ，计算求解，然后作答即可。

【小问 1 详解】

解：将 $A(-3, 0)$ 、 $B(1, 0)$ 代入得，
$$\begin{cases} 9a - 3b - 3 = 0 \\ a + b - 3 = 0 \end{cases}$$
，

解得，
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$
，

$\therefore y = x^2 + 2x - 3$ ，

当 $x = 0$ 时， $y = -3$ ，即 $C(0, -3)$ ；

【小问 2 详解】

解：如图 1，作 $CM \perp DG$ 于 M ，记 AC 与 DG 的交点为 N ，

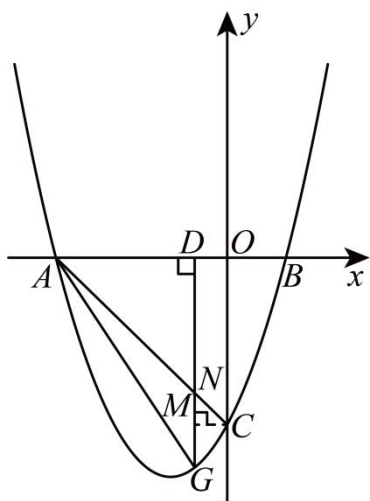


图1

设 $D(m, 0)$ ，则 $G(m, m^2 + 2m - 3)$ ， $M(m, -3)$ ，

$\therefore AD = m + 3$ ， $DG = -(m^2 + 2m - 3)$ ， $CM = -m$ ， $GM = -(m^2 + 2m)$ ，

$\therefore \angle DGA = \angle DGC$ ，

$$\therefore \tan \angle DGA = \tan \angle DGC,$$

$$\therefore \frac{AD}{DG} = \frac{CM}{GM}, \text{ 即 } \frac{m+3}{-(m^2+2m-3)} = \frac{-m}{-(m^2+2m)},$$

$$\text{解得, } m = -\frac{1}{2},$$

经检验, $m = -\frac{1}{2}$ 是原分式方程的解, 且符合要求;

$$\therefore G\left(-\frac{1}{2}, -\frac{15}{4}\right),$$

设直线 AC 的解析式为 $y = kx + c$,

$$\text{将 } A(-3, 0), C(0, -3) \text{ 代入得, } \begin{cases} -3k + c = 0 \\ c = -3 \end{cases},$$

$$\text{解得, } \begin{cases} k = -1 \\ c = -3 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y = -x - 3$,

$$\text{当 } x = -\frac{1}{2} \text{ 时, } y = -\left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = -\frac{5}{2}, \text{ 即 } N\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right),$$

$$\therefore GN = \frac{5}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle GAC} = S_{\triangle GAN} + S_{\triangle GCN} = \frac{1}{2} GN \times (x_C - x_A) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{4} \times 3 = \frac{15}{8},$$

$$\therefore \triangle GAC \text{ 的面积为 } \frac{15}{8};$$

【小问 3 详解】

解: 如图 2, 作 $BH \perp CD$ 于 H , 在 CD 上取 $HN = BH$, 连接 BN 交抛物线于点 P ,

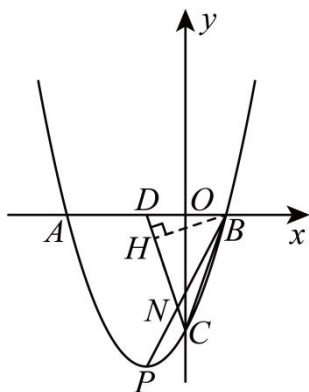


图2

$$\therefore HN = BH, BH \perp CD,$$

$$\therefore \angle BNH = 45^\circ = \angle DCB + \angle PBC,$$

∴ 点 P 即为所求,

由勾股定理得, $CD = BC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$,

$$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BD \cdot OC = \frac{1}{2}CD \cdot BH,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \cdot BH,$$

$$\text{解得, } BH = \frac{3\sqrt{10}}{5},$$

$$\therefore BN^2 = BH^2 + HN^2 = \frac{36}{5},$$

设直线 CD 的解析式为 $y = kx + d$,

$$\text{将 } D(-1, 0), C(0, -3) \text{ 代入得, } \begin{cases} -k + d = 0 \\ d = -3 \end{cases},$$

$$\text{解得, } \begin{cases} k = -3 \\ d = -3 \end{cases},$$

∴ 直线 CD 的解析式为 $y = -3x - 3$,

设 $N(n, -3n - 3)$,

$$\therefore BN^2 = (n - 1)^2 + (-3n - 3)^2 = \frac{36}{5},$$

$$\text{解得, } n = -\frac{1}{5}, n = -\frac{7}{5} \text{ (舍去),}$$

$$\therefore N\left(-\frac{1}{5}, -\frac{12}{5}\right),$$

设直线 BN 的解析式为 $y = kx + e$,

$$\text{将 } B(1, 0), N\left(-\frac{1}{5}, -\frac{12}{5}\right) \text{ 代入得, } \begin{cases} k + e = 0 \\ -\frac{1}{5}k + e = -\frac{12}{5} \end{cases},$$

$$\text{解得, } \begin{cases} k = 2 \\ e = -2 \end{cases},$$

∴ 直线 BN 的解析式为 $y = 2x - 2$,

$$\text{联立得, } 2x - 2 = x^2 + 2x - 3,$$

解得, $x=1$ 舍去或 $x=-1$,

$\therefore P(-1, -4)$.

【点睛】 本题考查了二次函数解析式, 二次函数与角度综合, 正切, 二次函数与面积综合, 一次函数解析式, 勾股定理, 三角形外角的性质等知识. 熟练掌握二次函数解析式, 二次函数与角度综合, 正切, 二次函数与面积综合, 一次函数解析式, 勾股定理, 三角形外角的性质是解题的关键.

25. 已知矩形 $ABCD$ 中, $AB=6$, $BC=8$, P 是边 AD 上一点, 将 $\triangle ABP$ 沿直线 BP 翻折, 使点 A 落在点 E 处, 连接 DE , 直线 DE 与射线 CB 交于点 F .

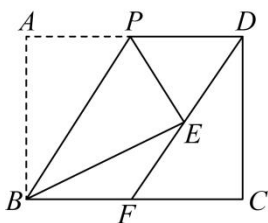


图 1

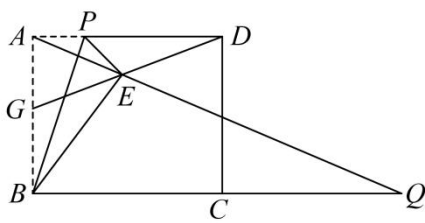


图 2

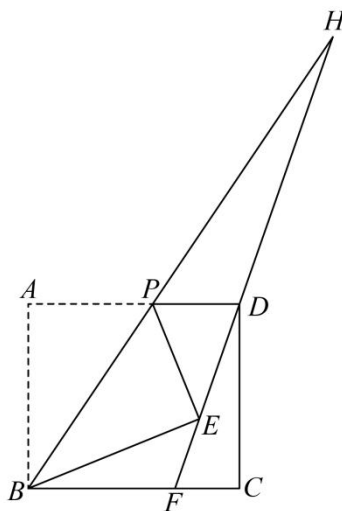


图 3

- (1) 如图1, 当点 F 在边 BC 上, 若 $PD=BF$ 时, 求 AP 的长;
- (2) 若射线 AE 交 BC 的延长线于点 Q , 设 $AP=x$, $QC=y$, 求 y 与 x 的函数解析式, 并写出 x 定义域;
- (3) ①如图2, 直线 DE 与边 AB 交于点 G , 若 $\triangle PDE$ 与 $\triangle BEG$ 相似, 求 $\angle AEG$ 的正切值;
- ②如图3, 当直线 DE 与 BP 的延长线交于点 H , 若 $\triangle BPE$ 和 $\triangle DHP$ 面积相等, 请直接写出 DH 的长.

【答案】 (1) $AP=4$

(2) $y = \frac{36}{x} - 8$, $0 < x < \frac{9}{2}$

(3) ①1; ② $DH=10$

【解析】

【分析】 (1) 根据 $PD=BF$, 结合矩形性质可得四边形 $BFD P$ 为平行四边形, 根据平行线的性质得到 $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$, 再由折叠性质可得 $\angle 1 = \angle 2$, $AP=PE$, 进而得到 $\angle 3 = \angle 4$, 即可得 $PE=PD=AP=\frac{1}{2}AD$, 即可求解;

(2) 根据折叠的性质可得 PB 垂直平分 AE , 从而得到 $\angle Q = \angle ABP$, 可证得 $\triangle ABP \sim \triangle BQA$, 进而由相似三角形的性质即可求解;

(3) ①设 $\angle ADG = \alpha$ ，分 $\triangle PDE \sim \triangle BEG$ 和 $\triangle PDE \sim \triangle EBG$ 两种情况解答即可求解；②连接 AH 、 BD 、 AE ，分别过 A 、 H 作 $AM \perp BD$ 于点 M ， $HN \perp BD$ 交 BD 延长线于点 N ，则 $HN \parallel AM$ ，根据 $S_{\triangle DHP} = S_{\triangle ABP}$ ，可得 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle HBD}$ ，从而得到 $AM = HN$ ，进而得到四边形 $AMNH$ 为矩形，则有 $AH \parallel BD$ ，可得到 $\angle AHB = \angle HBD$ ，再根据垂直平分线的性质可得 $\angle AHB = \angle FHB$ ，即得 $\angle HBD = \angle FHB$ ，从而得到 $DH = BD$ ，利用勾股定理求出 BD 即可求解。

【小问 1 详解】

解：如图， $\because$ 在矩形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，且 $PD = BF$ ，

$\therefore$ 四边形 $BFD P$ 为平行四边形，

$\therefore PB \parallel DF$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 3$ ， $\angle 2 = \angle 4$ ，

由翻折知， $\angle 1 = \angle 2$ ， $AP = PE$ ，

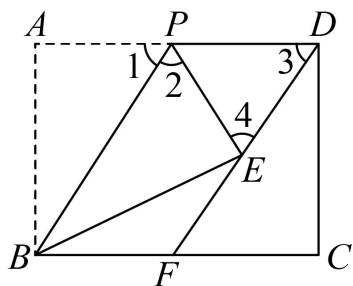
$\therefore \angle 3 = \angle 4$ ，

$\therefore PE = PD$ ，

$\therefore PE = PD = AP = \frac{1}{2}AD$ ，

$\because AD = BC = 8$ ，

$\therefore AP = 4$ ；



【小问 2 详解】

解： $\because$ 在矩形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ABP + \angle QBP = 90^\circ$ ，

由折叠可得， $AP = EP$ ， $AB = EB$ ，

$\therefore PB$ 垂直平分 AE ，

$\therefore \angle QBP + \angle Q = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle Q = \angle ABP$ ，

$$\therefore \triangle ABP \sim \triangle BQA,$$

$$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{AB}{BQ},$$

$$\therefore \frac{x}{6} = \frac{6}{y+8},$$

$$\therefore y = \frac{36}{x} - 8,$$

$$\therefore \frac{36}{x} - 8 > 0,$$

$$\therefore x < \frac{9}{2},$$

$$\therefore x \text{ 的定义域为 } 0 < x < \frac{9}{2};$$

【小问 3 详解】

解：①设 $\angle ADG = \alpha$,

当 $\triangle PDE \sim \triangle BEG$ 时, $\angle GEB = \angle PDE = \alpha$,

$$\therefore \angle BGE = 90^\circ + \alpha,$$

$$\therefore \angle GBE = 90^\circ - 2\alpha,$$

由折叠可知, $\angle ABP = \angle PBE = 45^\circ - \alpha$,

$$\because PB \perp AE,$$

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ - \angle PBE = 45^\circ + \alpha,$$

$$\therefore \angle AEG = \angle AEB - \angle GEB = 45^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle AEG = \tan 45^\circ = 1;$$

当 $\triangle PDE \sim \triangle EBG$ 时, $\angle PDE = \angle GBE = \alpha$,

$$\therefore \angle ABP = \angle PBE = \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\therefore \angle APB = \angle BPE = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\therefore \angle DPE = \alpha,$$

$$\therefore \angle GEB = \angle DPE = \alpha,$$

$$\therefore \angle BGE = 90^\circ + \angle ADE = 90^\circ + \alpha,$$

在 $\triangle PDE$ 中, $90^\circ + 3\alpha = 180^\circ$,

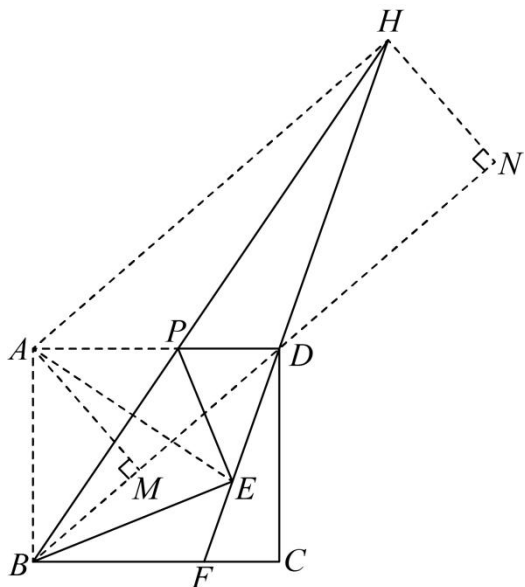
$$\therefore \alpha = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AEG = \angle AEB - \angle GEB = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha - \alpha = 90^\circ - 15^\circ - 30^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle AEG = \tan 45^\circ = 1;$$

综上, $\tan \angle AEG = 1$;

②如图, 连接 AH 、 BD 、 AE , 分别过 A 、 H 作 $AM \perp BD$ 于点 M , $HN \perp BD$ 交 BD 延长线于点 N , 则 $HN \parallel AM$,



由折叠知, $S_{\triangle BPE} = S_{\triangle ABP}$,

$$\therefore S_{\triangle BPE} = S_{\triangle DHP},$$

$$\therefore S_{\triangle DHP} = S_{\triangle ABP},$$

$$\therefore S_{\triangle DHP} + S_{\triangle DBP} = S_{\triangle ABP} + S_{\triangle DBP},$$

$$\text{即 } S_{\triangle ABD} = S_{\triangle HBD},$$

$$\therefore \frac{1}{2} AM \cdot BD = \frac{1}{2} HN \cdot BD,$$

$$\therefore AM = HN,$$

$\therefore$ 四边形 $AMNH$ 为矩形,

$$\therefore AH \parallel BD,$$

$$\therefore \angle AHB = \angle HBD,$$

由(2)知 PB 垂直平分 AE ,

$$\therefore AH = EH,$$

$$\therefore \angle AHB = \angle FHB,$$

$$\therefore \angle HBD = \angle FHB,$$

$$\therefore DH = BD,$$

$$\therefore AB = 6, \quad AD = BC = 8,$$

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

$$\therefore DH = 10.$$

【点睛】 本题考查了矩形的判定和性质，平行四边形的判定和性质，折叠性质，平行线的性质，等腰三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，线段垂直平分线的判定和性质，勾股定理，三角函数，正确作出辅助线是解题的关键.