

张江集团学校 2021 学年第二学期初二数学期末试卷

一、填空题 (每空 2 分, 共 36 分)

1. 如果关于 x 的方程 $(a-4)x=2022$ 有解, 那么实数 a 的取值范围是__.

【答案】 $a \neq 4$

【解析】

【分析】 根据一元一次方程有意义的条件得 $a-4 \neq 0$, 进行计算即可得.

【详解】 解: $\because (a-4)x=2022$ 有解

$$\therefore a-4 \neq 0$$

$$a \neq 4$$

故答案为: $a \neq 4$.

【点睛】 本题考查了一元一次方程有意义的条件, 解题的关键是掌握一元一次方程有意义的条件.

2. 用换元法解方程 $\frac{x^2+1}{2x} - \frac{3x}{x^2+1} = 5$, 设 $\frac{x^2+1}{x} = y$, 则得到关于 y 的整式方程为__.

【答案】 $y^2 - 10y - 6 = 0$

【解析】

【分析】 把 $\frac{x^2+1}{2x} - \frac{3x}{x^2+1} = 5$ 用 y 代入后, 整理即可得整式方程.

【详解】 原方程可化为: $\frac{y}{2} - \frac{3}{y} = 5$,

方程两边乘 $2y$, 并整理得: $y^2 - 10y - 6 = 0$,

故答案为: $y^2 - 10y - 6 = 0$.

【点睛】 本题考查了分式方程的特殊解法: 换元法, 根据题目特点合理引入新的未知数是换元法的特点, 从而把复杂的算式或方程转化为简单的算式或方程, 利用问题的解决.

3. 方程 $\frac{1}{4}(x-1)^4 - 64 = 0$ 的根是__.

【答案】 5 或 -3

【解析】

【分析】 首相将方程移项, 并系数化为 1, 得 $(x-1)^4 = 256 = 2^8$, 据此两边开方即可, 注意正负.

【详解】 解: 由题意得 $(x-1)^4 = 256 = 2^8$,

$$\therefore x-1=\pm 4,$$

$$\text{解得: } x_1=5, \quad x_2=-3,$$

故方程的根为: 5 或-3.

【点睛】 本题考查的是高次方程的求解, 掌握开方方法是解题的关键.

4. 若关于 x 的方程 $\sqrt{x^2-4x+8}=m$ 无实根, 则 m 的取值范围是____.

【答案】 $m < 2$

【解析】

【分析】 将 x^2-4x+8 配方可得 $(x-2)^2+4$, 于是 $\sqrt{x^2-4x+8} \geq 2$, 则当 $m < 2$ 时方程无实数解;

【详解】 解: $\because x^2-4x+8 = x^2-4x+4+4 = (x-2)^2+4 \geq 4$

$$\therefore \sqrt{x^2-4x+8} \geq 2$$

$\therefore$ 当 $m < 2$ 时, 方程 $\sqrt{x^2-4x+8}=m$ 无实根,

故答案为: $m < 2$;

【点睛】 本题考查了完全平方公式, 二次根式, 不等式的性质, 掌握平方的非负性是解题关键.

5. 从 3 至 8 的 6 个整数中随机抽取 2 个不同的数, 则这 2 个数互素的概率是____.

【答案】 $\frac{11}{15}$

【解析】

【分析】 利用列表法, 求得所有可能的结果数及 2 个数互素的结果数, 则由概率公式即可求得概率.

【详解】 列表如下:

	3	4	5	6	7	8
3		34	35	36	37	38
4	34		45	46	47	48
5	35	45		56	57	58
6	36	46	56		67	68
7	37	47	57	67		78
8	38	48	58	68	78	

所有可能结果数是 30 种，其中这 2 个数互素的结果数是 22 种，则所求的概率为 $\frac{22}{30} = \frac{11}{15}$ ，

故答案为： $\frac{11}{15}$ 。

【点睛】 本题考查了用树状图或列表法求概率，关键是知道互素的含义，会用树状图或列表法来解决。

6. 已知点 C 是线段 AB 的中点，则 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

【答案】 $\vec{0}$

【解析】

【分析】 由点 C 是线段 AB 的中点，可知 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 是相反向量，然后根据相反向量相加得零向量即可得到答案。

【详解】 解： $\because$ 点 C 是线段 AB 的中点，

$$\therefore AC = -BC,$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}.$$

故答案为： $\vec{0}$ 。

【点睛】 本题主要考查了向量的运算，掌握相反向量的定义是解题的关键。

7. 如果抛物线 $y = 2x^2 - 4x + m$ 的顶点关于原点对称点的坐标是 $(-1, -3)$ ，那么 m 的值是 $\underline{\hspace{1cm}}$ 。

【答案】 5

【解析】

【分析】 根据已知条件“抛物线 $y = 2x^2 - 4x + m$ 的顶点关于原点对称点的坐标是 $(-1, -3)$ ”求得顶点坐标是 $(1, 3)$ ；然后由顶点坐标公式，列出关于 m 的方程，解方程即可求得 m 的值。

【详解】 $\because$ 抛物线 $y = 2x^2 - 4x + m$ 的顶点关于原点对称点的坐标是 $(-1, -3)$ ，

$\therefore$ 抛物线 $y = 2x^2 - 4x + m$ 的顶点坐标是 $(1, 3)$ ，

$$\therefore 3 = \frac{4 \times 2m - (-4)^2}{4 \times 2},$$

解得， $m = 5$ ；

故答案为： 5。

【点睛】 本题考查了二次函数的性质、关于原点对称的点的坐标。在求二次函数图象的顶点坐标时，要熟练掌握顶点坐标公式。

8. 点 $A(2, y_1)$ 、 $B(3, y_2)$ 是二次函数 $y = x^2 - 2x + 1$ 的图象上两点，则 y_1 与 y_2 的大小关系为 y_1 $\underline{\hspace{1cm}}$ y_2 (填“ $>$ ”、“ $<$ ”、“ $=$ ”)。

【答案】 <

【解析】

【分析】 本题需先根据已知条件求出二次函数的图象的对称轴，再根据点 A、B 的横坐标的大小即可判断出 y_1 与 y_2 的大小关系.

【详解】 $\because$ 二次函数 $y=x^2-2x+1$ 的图象的对称轴是：直线 $x=1$ ，开口向上

$\therefore$ 当 $x > 1$ 时， y 随 x 的增大而增大，

$\because$ 点 A (2, y_1)、B (3, y_2) 是二次函数 $y=x^2-2x+1$ 的图象上两点， $2 < 3$ ，

$\therefore y_1 < y_2$.

故答案为 <.

【点睛】 本题主要考查了二次函数图象上点的坐标特征，在解题时要能灵活应用二次函数的图象和性质以及点的坐标特征是本题的关键.

9. 若二次函数 $y = mx^2 - 2x - 1$ 的图像与 x 轴只有一个交点，则 m 的值为__.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 二次函数 $y = mx^2 - 2x - 1$ 与 x 轴只有一个交点，即关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - 2x - 1 = 0$ 有两个相等的实数根，利用根的判别式计算求值即可；

【详解】 解：令 $y=0$ 可得 $mx^2 - 2x - 1 = 0$ ，

当二次函数 $y = mx^2 - 2x - 1$ 与 x 轴只有一个交点时，一元二次方程 $mx^2 - 2x - 1 = 0$ 有两个相等的实数根，

$\therefore \Delta = 4 + 4m = 0$ ， $m = -1$ ，

故答案为：-1；

【点睛】 本题考查了二次函数与 x 轴的交点，掌握二次函数与一元二次方程的关系是解题关键.

10. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中，函数 y 与自变量 x 的部分对应值如下表：

x	...	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	...
y	...	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{23}{4}$	...

则该二次函数解析的一般式为__.

【答案】 $y = 2x^2 + 2x - \frac{7}{4}$

【解析】

【分析】将点 $(-1, -\frac{7}{4})$, $(0, -\frac{7}{4})$, $(1, \frac{9}{4})$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ 中, 进行计算即可得.

【详解】解: 将点 $(-1, -\frac{7}{4})$, $(0, -\frac{7}{4})$, $(1, \frac{9}{4})$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ 中, 得

$$\begin{cases} a - b + c = -\frac{7}{4} \\ c = -\frac{7}{4} \\ a + b + c = \frac{9}{4} \end{cases}$$

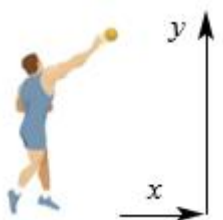
$$\text{解得, } \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = -\frac{7}{4} \end{cases},$$

则二次函数的解析式为: $y = 2x^2 + 2x - \frac{7}{4}$,

故答案为: $y = 2x^2 + 2x - \frac{7}{4}$.

【点睛】本题考查了二次函数的性质, 解题的关键是掌握待定系数法.

11. 如图, 以地面为 x 轴, 一名男生推铅球, 铅球行进高度 y (单位: 米) 与水平距离 x (单位: 米) 之间的关系是 $y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$. 则他将铅球推出的距离是____米.



【答案】10

【解析】

【分析】成绩就是当高度 $y=0$ 时 x 的值, 所以解方程可求解.

【详解】解: 当 $y=0$ 时, $-\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = 0$,

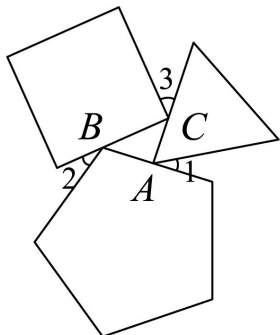
解得: $x_1 = 10, x_2 = -2$ (不合题意, 舍去),

所以推铅球的距离是 10 米；

故答案为：10.

【点睛】 本题考查了把函数问题转化为方程问题，渗透了函数与方程相结合的解题思想方法.

12. 如图，将等边三角形、正方形和正五边形按如图所示的位置摆放. $\angle 1 = \angle 2 = 30^\circ$ ，则 $\angle 3 = \underline{\hspace{1cm}}$.



【答案】 42° ## 42 度

【解析】

【分析】 利用多边形的外角和定理，即 360° 减去等边三角形的一个内角的度数，减去正五边形的一个内角的度数，减去正方形的一个内角的度数，再减去 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 的度数，最后得出答案.

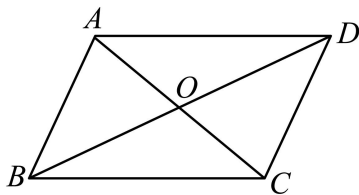
【详解】 等边三角形的内角的度数是 60° ，正方形的内角的度数为 90° ，正五边形的内角的度数是 $\frac{(5-2) \times 180^\circ}{5} = 108^\circ$ ，

则 $\angle 3 = 360^\circ - 60^\circ - 90^\circ - 108^\circ - \angle 1 - \angle 2 = 42^\circ$.

故答案为： 42°

【点睛】 此题考查了多边形外角和定理，正多边形内角和公式，熟练掌握相关知识及正确运算是解题关键.

13. 如图，在 $\square ABCD$ 中， AC 与 BD 交于点 O ， $\angle ADO = 30^\circ$ ， $AC = 10, BD = 16$ ，则 $\square ABCD$ 的面积为 $\underline{\hspace{1cm}}$.



【答案】 $32\sqrt{3} + 24$

【解析】

【分析】 作 $OE \perp AD$ 交 AD 于点 E ，利用勾股定理求出 AD ，即可求出

$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} AD \cdot OE = \frac{1}{2} \times 4 \times (4\sqrt{3} + 3) = 8\sqrt{3} + 6$ ，由此即可求得 $\square ABCD$ 的面积.

【详解】 解： 作 $OE \perp AD$ 交 AD 于点 E ，如图，

$$\because \angle ADO = 30^\circ, OD = \frac{1}{2}BD = 8,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2}OD = 4,$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle ODE \text{ 中, 由勾股定理得: } DE = \sqrt{OD^2 - OE^2} = \sqrt{64 - 16} = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore AO = \frac{1}{2}AC = 5, OE = 4, \angle AEO = 90^\circ,$$

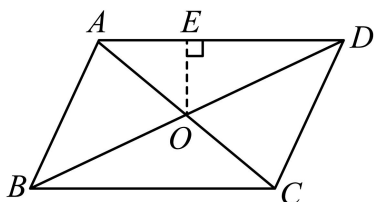
$$\therefore \text{在 } Rt\triangle OAE \text{ 中, 由勾股定理得: } AE = \sqrt{OA^2 - OE^2} = \sqrt{25 - 16} = 3,$$

$$\therefore AD = 4\sqrt{3} + 3,$$

$$\therefore S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2}AD \cdot OE = \frac{1}{2} \times 4 \times (4\sqrt{3} + 3) = 8\sqrt{3} + 6,$$

$$\therefore S_{\square ABCD} = 4S_{\triangle AOD} = 4(8\sqrt{3} + 6) = 32\sqrt{3} + 24,$$

故答案为: $32\sqrt{3} + 24$.



【点睛】 本题主要考查平行四边形面积的求法，勾股定理的应用，准确做出辅助线是解题的关键.

14. 已知直线 $y = \frac{2}{3}x + 2$ 与 x 轴、 y 轴分别相交于点 A 、点 B ，点 C 的坐标为 $(2, 0)$ ，点 D 在 y 轴上，联结 A 、 B 、 C 、 D 四点构成一个梯形，则点 D 的坐标为_____.

【答案】 $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ 或 $(0, -3)$

【解析】

【分析】 画出图形，分两种情况： $AB \parallel CD$ ； $BC \parallel AD$ ，即可求得点 D 的坐标.

【详解】 在 $y = \frac{2}{3}x + 2$ 中，令 $y=0$ ，得 $x=-3$ ；令 $x=0$ ，得 $y=2$ ，

即 $A(-3, 0)$ ， $B(0, 2)$ ，

如图所示，则 $OA=3$ ， $OB=2$ ，

$\therefore C(2, 0)$ ，

$\therefore OC=2=OB$.

当 $AB \parallel CD_1$ 时，设直线 CD_1 解析式为 $y = \frac{2}{3}x + b$ ，

直线 CD_1 过点 C , 则有 $\frac{2}{3} \times 2 + b = 0$,

$$\therefore b = -\frac{4}{3},$$

即直线 CD_1 的解析式为 $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$,

上式中令 $x=0$, $y = -\frac{4}{3}$,

$$\therefore \text{点 } D_1 \text{ 的坐标为 } \left(0, -\frac{4}{3}\right);$$

当 $BC \parallel AD$ 时,

$$\because OB=OC, \angle BOC=90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCO=45^\circ,$$

$$\because BC \parallel AD,$$

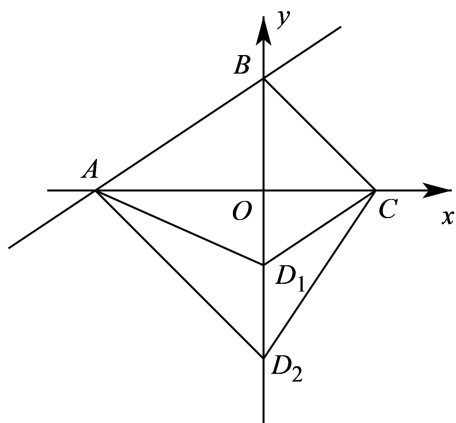
$$\therefore \angle BCO = \angle D_2AO = 45^\circ,$$

$$\because \angle AOD_2 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AD_2O = \angle D_2AO = 45^\circ,$$

$$\therefore OA = OD_2 = 3,$$

$$\therefore \text{点 } D_2 \text{ 的坐标为 } (0, -3),$$



综上, 满足条件的点 D 的坐标为 $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ 或 $(0, -3)$.

故答案为: $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ 或 $(0, -3)$.

【点睛】 本题是一次函数的综合, 考查了梯形的性质, 待定系数法求函数解析式, 等腰三角形的判定与性质, 涉及分类讨论, 结合题目正确画出图形, 熟悉一次函数的图形与性质是解题的关键.

15. 梯形的四条边长分别为 4、5、6、7，这样不同形状的梯形可以画出___个.

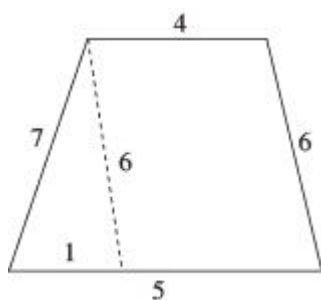
【答案】 1

【解析】

【分析】 假设存在上下底边长分别 4，5；4，6；4，7；5，6；5，7；6，7 分类讨论，再根据三角形三边关系判段即可得出结果.

【详解】 所示，

假设存在上下底边长分别为 4，5 的梯形，则将梯形分割为一个邻边长分别为 4，6 的平行四边形和一个三角形，



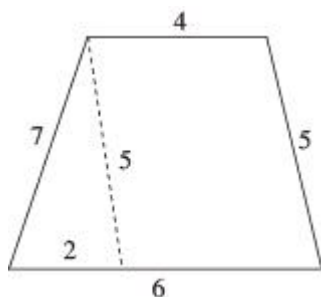
则这个三角形三边长分别为 7，6，1，

$$\because 6+1=7,$$

$\therefore$ 这个三角形不存在，

$\therefore$ 假设不成立，这个梯形不存在.

假设存在上下底边长分别为 4，6 的梯形，则将梯形分割为一个邻边长分别为 4，5 的平行四边形和一个三角形，



则这个三角形三边长分别为 7，4，1，

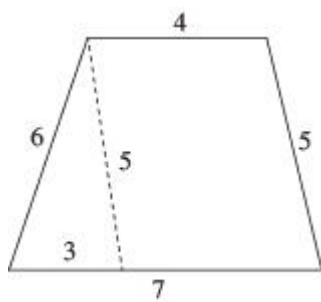
$$\because 5+2=7,$$

$\therefore$ 这个三角形不存在，

$\therefore$ 假设不成立，这个梯形不存在.

假设存在上下底边长分别为 4，7 的梯形，则将梯形分割为一个邻边长分别为 4，5 的平行四边形和一个三

角形,



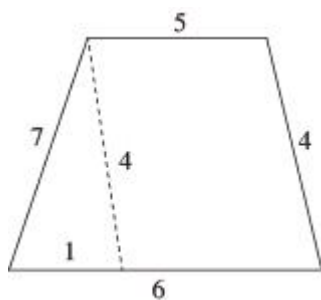
则这个三角形三边长分别为 7, 4, 1,

$\because 5+3>7$,

$\therefore$ 这个三角形存在,

$\therefore$ 假设成立, 这个梯形存在.

假设存在上下底边长分别为 5, 6 的梯形, 则将梯形分割为一个邻边长分别为 4, 5 的平行四边形和一个三角形,



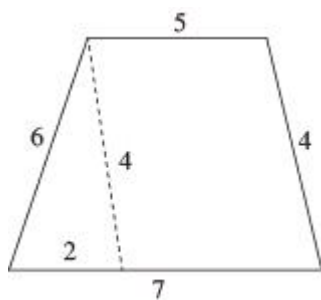
则这个三角形三边长分别为 7, 4, 1,

$\because 4+1<7$,

$\therefore$ 这个三角形不存在,

$\therefore$ 假设不成立, 这个梯形不存在.

假设存在上下底边长分别为 5, 7 的梯形, 则将梯形分割为一个邻边长分别为 4, 5 的平行四边形和一个三角形,



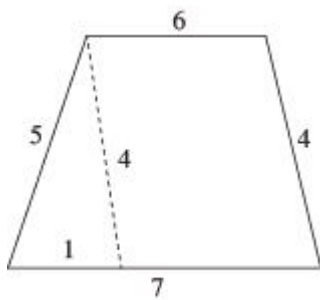
则这个三角形三边长分别为 7, 4, 1,

$$\because 4+2=6,$$

$\therefore$ 这个三角形不存在,

$\therefore$ 假设不成立, 这个梯形不存在.

假设存在上下底边长分别为 6, 7 的梯形, 则将梯形分割为一个邻边长分别为 4, 6 的平行四边形和一个三角形,



则这个三角形三边长分别为 7, 4, 1,

$$\because 4+1=5,$$

$\therefore$ 这个三角形不存在,

$\therefore$ 假设不成立, 这个梯形不存在.

综上所述, 这样不同形状的梯形可以画 1 个,

故答案为: 1.

【点睛】 本题主要考查了三角形三边的三边关系, 应用分类讨论的思想是解决此题的关键.

16. 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle A = 90^\circ$, $AB = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $CD = 3$, 那么 $\angle C =$ ____.

【答案】 60° 或 120°

【解析】

【分析】 画出图形, 过点 D 作 $DE \perp BC$ 于 E , 由勾股定理求得 CE 的长, 则可得 $CD=2DE$, 则可得 $\angle CDE$ 的度数, 从而可得 $\angle C$ 的度数.

【详解】 如图, 过点 D 作 $DE \perp BC$ 于 E , 则 $\angle DEB = \angle DEC = 90^\circ$.

$$\because \angle A = 90^\circ, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 是矩形,

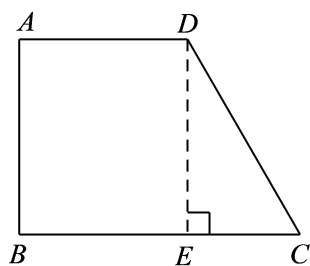
$$\therefore DE = AB = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

$$\text{在 } Rt\triangle DEC \text{ 中, } CD=3, \text{ 由勾股定理得: } CE = \sqrt{CD^2 - DE^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore CD=2DE,$$

$$\therefore \angle CDE=30^\circ,$$

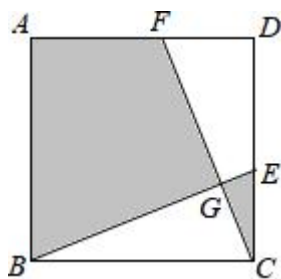
$$\therefore \angle C=90^\circ-\angle CDE=90^\circ-30^\circ=60^\circ,$$



故答案为： 60° .

【点睛】 本题考查了矩形的判定与性质，勾股定理等知识，构造梯形的高是问题的关键.

17. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AB=3$ ，点 E, F 分别在 CD, AD 上， $CE=DF$ ， BE, CF 相交于点 G ，若图中阴影部分的面积与正方形 $ABCD$ 的面积之比为 $2:3$ ，则 $\triangle BCG$ 的周长为_____.



【答案】 $\sqrt{15}+3$.

【解析】

【详解】 分析： 根据面积之比得出 $\triangle BGC$ 的面积等于正方形面积的 $\frac{1}{6}$ ，进而依据 $\triangle BCG$ 的面积以及勾股定理，得出 $BG+CG$ 的长，进而得出其周长.

详解： $\because$ 阴影部分的面积与正方形 $ABCD$ 的面积之比为 $2:3$ ，

$$\therefore \text{阴影部分的面积为 } \frac{2}{3} \times 9 = 6,$$

$$\therefore \text{空白部分的面积为 } 9 - 6 = 3,$$

由 $CE=DF$ ， $BC=CD$ ， $\angle BCE=\angle CDF=90^\circ$ ，可得 $\triangle BCE \cong \triangle CDF$ ，

$$\therefore \triangle BCG \text{ 的面积与四边形 } DEGF \text{ 的面积相等，均为 } \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2},$$

$$\text{设 } BG=a, CG=b, \text{ 则 } \frac{1}{2}ab = \frac{3}{2},$$

$$\text{又 } \because a^2+b^2=3^2,$$

$$\therefore a^2+2ab+b^2=9+6=15,$$

即 $(a+b)^2=15$,

$\therefore a+b=\sqrt{15}$, 即 $BG+CG=\sqrt{15}$,

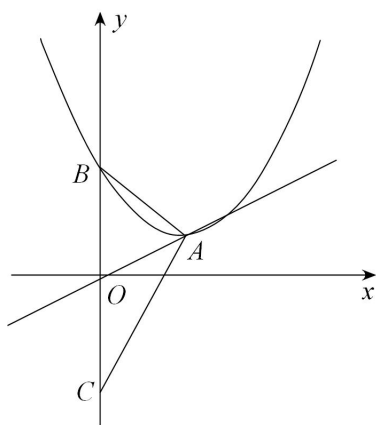
$\therefore \triangle BCG$ 的周长 $=\sqrt{15}+3$,

故答案为 $\sqrt{15}+3$.

点睛: 此题考查了全等三角形的判定与性质、正方形的性质以及三角形面积问题. 解题时注意数形结合思想与方程思想的应用.

18. 已知点 A 是直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上一动点, 以点 A 为顶点的抛物线 $y=(x-m)^2+h$ 交 y 轴于点 B , 作点 B

关于 x 轴的对称点 C , 连接 AB 、 AC . 若 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 则点 A 的坐标为_____.



【答案】 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 或 $(-\sqrt{3}, -1)$ 或 $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

【解析】

【分析】 分两种情况: $\angle BAC=90^\circ$, 则由题意得 $OA=OB$, 从而得到关于 m 的方程, 解方程即可; $\angle ACB=90^\circ$, 则点 A 、 C 的纵坐标相同, 可得关于 m 的方程, 解方程即可.

【详解】 由题意得: $A(m, h)$, 且 $y=(x-m)^2+h=x^2-2mx+m^2+h$,

上式中令 $x=0$, 得 $y=m^2+h$,

$\therefore B(0, m^2+h)$.

$\because$ 点 A 在直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上,

$\therefore h=\frac{\sqrt{3}}{3}m$,

$$\text{即 } A\left(m, \frac{\sqrt{3}}{3}m\right), B\left(0, m^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}m\right),$$

$\because$ 点 B 、点 C 关于 x 轴的对称,

$$\text{则 } C\left(0, -m^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}m\right).$$

①当 $\angle BAC=90^\circ$, 则 OA 是 $Rt\triangle ABC$ 的斜边 BC 上的中线,

$$\therefore OA=OB,$$

$$\therefore OA^2 = m^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}m\right)^2 = \frac{4}{3}m^2, \quad OB^2 = \left(m^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}m\right)^2 = m^2\left(m + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2,$$

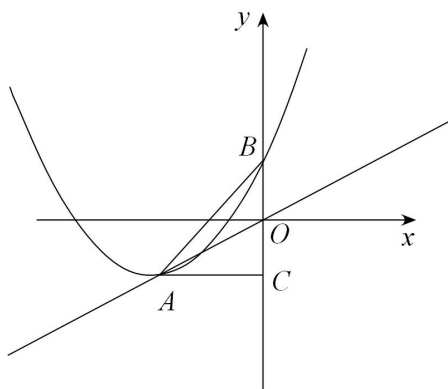
$$\text{则 } \frac{4}{3}m^2 = m^2\left(m + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2,$$

由于 $m \neq 0$,

$$\text{解得: } m = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 或 } m = -\sqrt{3},$$

所以点 A 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 或 $(-\sqrt{3}, -1)$;

②当 $\angle ACB=90^\circ$ 时, 如图, 则 $AC \perp BC$, 此时点 A 、 C 的纵坐标相同,



$$\text{即 } \frac{\sqrt{3}}{3}m = -m^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}m,$$

$$\therefore m = -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad m=0 \text{ (舍去)},$$

所以点 A 的坐标为 $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$;

综上所述，点 A 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 或 $(-\sqrt{3}, -1)$ 或 $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

【点睛】本题是二次函数的综合，考查了二次函数的图象与性质，一次函数的图象，直角三角形的性质等知识，注意分类讨论，避免遗漏.

二、选择题（每题 3 分，共 15 分）

19. 下列方程中，没有实数解的是（ ）

A. $\begin{cases} x+y=-5 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=7 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x+y=-5 \\ x^2+y^2=17 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=-6 \end{cases}$

【答案】B

【解析】

【分析】将 $y=-x-5$ 代入二元二次方程化为一元二次方程，再利用根的判别式计算求值即可；

【详解】解：由题意得： $y=-x-5$,

A. 化简得： $x^2+(x+5)^2=13$, $x^2+5x+6=0$, $\Delta=1>0$, 有实数解不符合题意；

B. 化简得： $-x(x+5)=7$, $x^2+5x+7=0$, $\Delta=-3<0$, 没有实数解符合题意；

C. 化简得： $x^2+(x+5)^2=17$, $x^2+5x+4=0$, $\Delta=9>0$, 有实数解不符合题意；

D. 化简得： $-x(x+5)=-6$, $x^2+5x-6=0$, $\Delta=49>0$, 有实数解不符合题意；

故选： B.

【点睛】本题考查了二元二次方程组的解，掌握一元二次方程根的判别式是解题关键.

20. 在下列事件中，确定事件共有（ ）

①买一张体育彩票，中大奖；

②抛掷一枚硬币，落地后正面朝上；

③在共装有 2 只红球、3 只黄球的袋子里，摸出一只白球；

④初二（3）班共有 49 名学生，至少有 5 名学生的生日在同一个月.

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】B

【解析】

【分析】根据确定事件的定义“在一定条件下，有些事情必然会发生，这样的事件称为必然事件”去判断，

即可得.

【详解】解：A、买一张体育彩票，中大奖，为随机事件，选项说法错误，不符合题意；

B、抛掷一枚硬币，落地后正面朝上，为随机事件，选项说法错误，不符合题意；

C、在共装有 2 只红球、3 只黄球的袋子里，摸出一只白球，为不可能事件，是确定事件，选项说法正确，不符合题意；

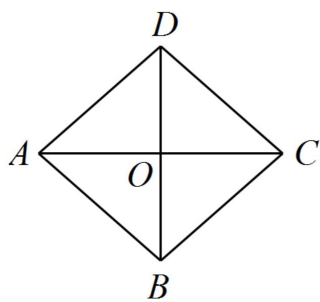
D、初二（3）班共有 49 名学生，至少有 5 名学生的生日在同一个月，为确定事件，选项说法正确，符合题意；

综上，确定事件有 2 个，

故选：B.

【点睛】本题考查了确定事件，解题的关键是掌握确定事件的定义.

21. 如图，已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，下列结论中错误的是（ ）



A. 当 $AB = BC$ 时，平行四边形 $ABCD$ 是菱形

B. 当 $AC \perp BD$ 时，平行四边形 $ABCD$ 是菱形

C. 当 $AC = BD$ 时，平行四边形 $ABCD$ 是正方形

D. 当 $\angle ABC = 90^\circ$ 时，平行四边形 $ABCD$ 是矩形

【答案】C

【解析】

【分析】根据矩形、菱形、正方形的判定定理逐个判断即可.

【详解】解：A、 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

又 $\because AB = BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，故本选项不符合题意；

B、 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

又 $\because AC \perp BD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，故本选项不符合题意；

C、 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

又 $\because AC=BD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, 不一定是正方形, 故本选项符合题意;

D、 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

又 $\because \angle ABC=90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, 故本选项不符合题意;

故选: C.

【点睛】 本题考查了对矩形的判定、菱形的判定, 正方形的判定的应用, 能正确运用判定定理进行判断是解此题的关键.

22. 在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 和 BD 相交于点 O , $AB=CD$, 添加下列条件后能判定这个四边形是平行四边形的是 ()

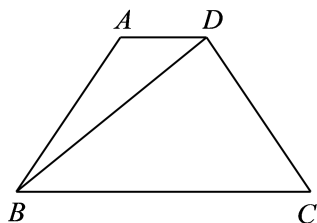
A. $\angle ADB = \angle CBD$ B. $AO = CO$ C. $\angle ABC = \angle ADC$ D. $AD = BC$

【答案】 D

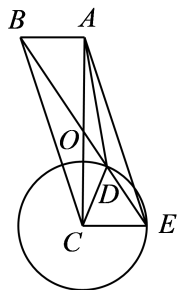
【解析】

【分析】 根据平行四边形的判定, 逐项分析即可.

【详解】 A、由 $\angle ADB = \angle CBD$ 可得 $AD \parallel BC$, 此时只能得到这四边形一组对边平行, 另一组对边相等, 显然无法得到四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 如下图的等腰梯形 $ABCD$ 满足 $AB=CD$, $\angle ADB = \angle CBD$, 但它不是平行四边形;

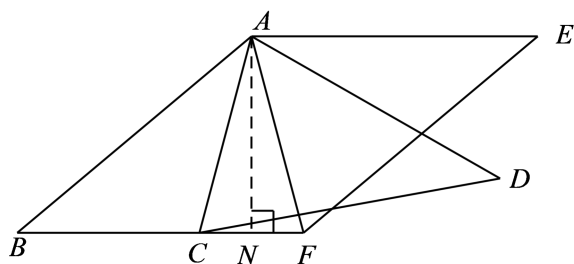


B、由 $AO = CO$, 无法判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 如下图所示, 作平行四边形 $ABCE$, AC 、 BE 交于点 O , 则 $OA=OC$, $AB=CE$, 以点 C 为圆心 CE 长为半径画圆交 OE 于点 D , 则 $AB=CE=CD$, 且 $AO=CO$, 但此时四边形 $ABCD$ 不是平行四边形;



C、当 $\angle ABC = \angle ADC$ 时, 如下图所示, 作平行四边形 $ABFE$, 过 A 作 $AN \perp BF$ 于 N , 在 BF 上取 $FN=CN$,

连接 AC ，把 $\triangle AEF$ 绕点 A 逆时针旋转，旋转角度等于 $\angle FAC$ ，此时 AE 旋转到 AD ， $\angle ABC = \angle E = \angle ADC$ ，且 $AB = CD$ ，但四边形 $ABCD$ 不是平行四边形，故不符合题意；



D、当 $AD = BC$ 时，则根据两组对边分别相等的四边形是平行四边形的判定即可得到四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故符合题意。

故选：D。

【点睛】本题考查了平行四边形的判定，熟练掌握平行四边形的判定是关键。注意说明一个命题是假命题时，只要举出一个反例即可。

23. 已知梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， E 、 F 、 G 、 H 分别是 AB 、 BC 、 CD 、 DA 的中点，如果添加一个条件，使得四边形 $EFGH$ 成为矩形，那么所添加的这个条件可以是（ ）

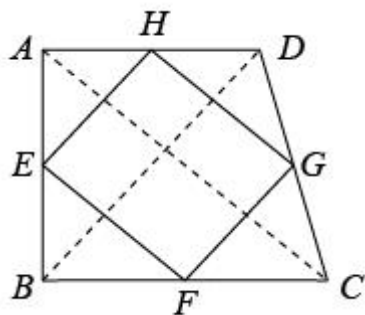
- A. $BD \perp AC$ B. $BD = AC$ C. $\angle ABC = 90^\circ$ D. $AB = CD$

【答案】A

【解析】

【分析】由三角形中位线的性质可得四边形 $EFGH$ 是平行四边形，再根据有一个角是直角的平行四边形是矩形或对角线相等的平行四边形是矩形判断即可；

【详解】解：由题意作图如下，连接 AC 、 BD ，



$\therefore E$ 、 F 、 G 、 H 分别是 AB 、 BC 、 CD 、 DA 的中点，

$\therefore EF$ 是 $\triangle BAC$ 的中位线， GH 是 $\triangle DCA$ 的中位线，

$\therefore EF \parallel AC$ ， $EF = \frac{1}{2} AC$ ， $GH \parallel AC$ ， $GH = \frac{1}{2} AC$ ，

$\therefore EF \parallel GH$ ， $EF = GH$ ，

∴ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形,

同理可得 $EH \parallel BD$, $EH = \frac{1}{2}BD$, $GF \parallel BD$, $GF = \frac{1}{2}BD$,

若 $BD \perp AC$,

∴ $EF \parallel AC$,

∴ $BD \perp EF$,

∴ $BD \parallel EH$,

∴ $EF \perp EH$,

∴ $\angle HEF = 90^\circ$,

∴ 平行四边形 $EFGH$ 是矩形,

若 $BD = AC$, 无法求得平行四边形 $EFGH$ 的一个内角为直角或对角线相等, 不能证明是矩形,

若 $\angle ABC = 90^\circ$, 无法求得平行四边形 $EFGH$ 的一个内角为直角或对角线相等, 不能证明是矩形,

若 $AB = CD$, 无法求得平行四边形 $EFGH$ 的一个内角为直角或对角线相等, 不能证明是矩形,

故选: A.

【点睛】 本题考查了梯形, 三角形中位线的性质, 平行四边形的判定, 矩形的判定, 掌握矩形的判定方法是解题关键.

三、计算题 (每题 4 分, 共 8 分)

24. 解方程: $\sqrt{x-5} + \sqrt{1-x} = 1$

【答案】 无解

【解析】

【分析】 首先两个二次根式要有意义, 则可得满足条件的 x 不存在, 因而方程无解.

【详解】 由题意知: $\begin{cases} x-5 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq 1 \end{cases}$, 此不等式组无解,

所以原方程无解.

【点睛】 本题考查了解无理方程, 解含二次根式的无理方程时, 先考虑被开方数非负, 确定 x 的取值范围, 再通过两边平方, 化无理方程为有理方程.

25. 解方程组: $\begin{cases} 2x^2 + 2xy + 4y^2 + x = 19 \\ x^2 + xy + 2y^2 - y = 9 \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = -1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 2 \end{cases}$

【解析】

【分析】①-② $\times 2$ 得关于 x 与 y 的二元一次方程，再用代入法求解即可.

【详解】解:
$$\begin{cases} 2x^2 + 2xy + 4y^2 + x = 19 & \text{①} \\ x^2 + xy + 2y^2 - y = 9 & \text{②} \end{cases}$$

①-② $\times 2$ 得: $x + 2y = 1$ ③

由③得: $x = 1 - 2y$, 代入②整理得: $y^2 - y - 2 = 0$,

解得: $y_1 = -1$, $y_2 = 2$,

把 y 的值分别代入 $x = 1 - 2y$ 得: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$,

所以方程组的解为:
$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = -1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 2 \end{cases}.$$

【点睛】本题考查了解二元二次方程组，与解一元二次方程组相同，有代入消元法与加减消元法两种方法，只是消元后得到的是一元二次方程而已.

四、简答题（第 26—28 题每题 6 分，第 29 题 9 分，第 30 题 14 分，共 41 分）

26. 已知二次函数 $y = (m^2 - 2)x^2 - 4mx + n$ 的图象的对称轴是直线 $x = 2$ ，且最高点在直线 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 上，求这个二次函数的表达式.

【答案】 $y = -x^2 + 4x - 2$.

【解析】

【分析】根据函数的对称轴 $x = 2$ ，此图象顶点的横坐标为 2，此点在直线 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 上，可求得 $y = (m^2 - 2)x^2 - 4mx + n$ 的图象顶点坐标为 $(2, 2)$. 从而求得 $m = -1$ 或 $m = 2$ ，利用最高点在直线上可得 $a < 0$ ，所以 $m = -1$, $n = -2$ ，从而求得二次函数的表达式.

【详解】解: $\because$ 二次函数的对称轴 $x = 2$ ，此图象顶点的横坐标为 2，此点在直线 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 上，

$$\therefore y = \frac{1}{2} \times 2 + 1 = 2,$$

$$\therefore y = (m^2 - 2)x^2 - 4mx + n \text{ 的图象顶点坐标为 } (2, 2),$$

$$\therefore -\frac{b}{2a} = 2,$$

$$\therefore -\frac{-4m}{2(m^2 - 2)} = 2,$$

解得: $m = -1$ 或 $m = 2$,

$\because$ 最高点在直线 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 上，

$$\therefore a = m^2 - 2 < 0,$$

$$\therefore m = -1,$$

$$\therefore y = -x^2 + 4x + n,$$

又 $\because$ 顶点为 $(2, 2)$,

$$\therefore 2 = -4 + 8 + n,$$

$$\therefore n = -2,$$

则二次函数的表达式为 $y = -x^2 + 4x - 2$.

【点睛】主要考查了用待定系数法求二次函数解析式的方法，要掌握对称轴公式的运用以及最值与函数之间的关系.

27. 已知方程 $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{4x+a}{(x+1)(x+2)}$ 只有一个根，求 a 的值.

【答案】5 或 9 或 $\frac{9}{2}$;

【解析】

【分析】去分母化为一元二次方程，分别讨论一元二次方程有一根为 $x=-1$ 、有一根为 $x=-2$ 、有两个相同根时，求得 a 的值再代入验证即可；

【详解】解： $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{4x+a}{(x+1)(x+2)}$

去分母得： $(x+1)^2 + (x+2)^2 = 4x+a$

去括号得： $2x^2 + 2x + 5 - a = 0$

① $2x^2 + 2x + 5 - a = 0$ 有一根为 $x=-1$ 时，代入得 $a=5$,

$2x^2 + 2x = 0$ ，则另一个根为 $x=0$,

此时分式方程只有一个根 $x=0$ ，且分母不等于零，符合题意；

② $2x^2 + 2x + 5 - a = 0$ 有一根为 $x=-2$ 时，代入得 $a=9$,

$2x^2 + 2x - 4 = 0$ ，则另一个根为 $x=1$,

此时分式方程只有一个根 $x=1$ ，且分母不等于零，符合题意；

③ $2x^2 + 2x + 5 - a = 0$ 有两个相同根时， $4-8(5-a)=0$ ， $a=\frac{9}{2}$,

$$2x^2 + 2x + \frac{1}{2} = 0, \quad x_1 = x_2 = -\frac{1}{2},$$

此时分式方程只有一个根 $x = -\frac{1}{2}$ ，且分母不等于零，符合题意；

$\therefore a$ 的值为 5 或 9 或 $\frac{9}{2}$ ；

【点睛】 本题考查了分式方程的增根，掌握分式方程的分母不能为零是解题关键.

28. 将抛物线 $y = 2x^2$ 先向下平移 3 个单位，再向右平移 $m(m > 0)$ 个单位，所得新抛物线经过点 $(1, 5)$.

(1) 求新抛物线的表达式；

(2) 新抛物线关于 y 轴对称后的图象解析式.

【答案】 (1) $y = 2x^2 - 12x + 15$

(2) $y = 2x^2 + 12x + 15$

【解析】

【分析】 (1) 根据“将抛物线 $y = 2x^2$ 先向下平移 3 个单位，再向右平移 $m(m > 0)$ 个单位，”可得新抛物线的表达式为 $y = 2(x - m)^2 - 3$ ，再把点 $(1, 5)$ 代入，即可求解；

(2) 先求出新抛物线的顶点坐标为 $(3, -3)$ ，可得关于 y 轴对称后的图象的顶点坐标为 $(-3, -3)$ ，即可求解.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 将抛物线 $y = 2x^2$ 先向下平移 3 个单位，再向右平移 $m(m > 0)$ 个单位，

$\therefore$ 新抛物线的表达式为 $y = 2(x - m)^2 - 3$ ，

$\therefore$ 所得新抛物线经过点 $(1, 5)$ ，

$\therefore 2(1 - m)^2 - 3 = 5$ ，

解得： $m = 3$ 或 -1 (舍去)，

$\therefore$ 新抛物线的表达式为 $y = 2(x - 3)^2 - 3 = 2x^2 - 12x + 15$ ；

【小问 2 详解】

解： $\because$ 新抛物线的表达式为 $y = 2(x - 3)^2 - 3$ ，

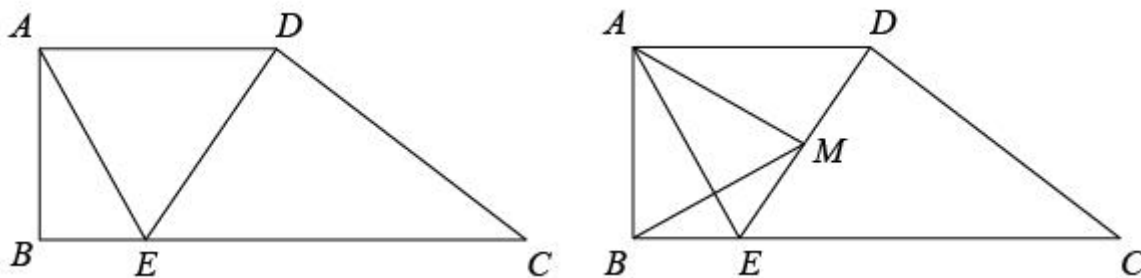
$\therefore$ 新抛物线的顶点坐标为 $(3, -3)$ ，

$\therefore$ 关于 y 轴对称后的图象的顶点坐标为 $(-3, -3)$ ，

∴ 新抛物线关于 y 轴对称后的图象解析式为 $y = 2(x+3)^2 - 3 = 2x^2 + 12x + 15$.

【点睛】 本题主要考查了求二次函数的解析式，抛物线的平移，熟练掌握二次函数的图象和性质是解题的关键.

29. 已知梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 4$, $BC = 9$, $AD = 5$, E 是 BC 边上任意一点 (不与 B 、 C 重合), 联结 DE 和 AE .



(1) 若 AE 平分 $\angle BED$, 求 BE .

(2) 若 M 是 DE 中点, 联结 AM 和 BM ,

① 设 $BE = x$, $BM = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式;

② 若 $AM \perp DE$, 求 BE 的长.

【答案】 (1) 2 或 8

(2) ① $y = \frac{\sqrt{x^2 + 10x + 41}}{2}$ ($0 < x < 4$); ② 3

【解析】

【分析】 (1) 如图, 作 $DH \perp BC$ 于 H , 则四边形 $ABHD$ 是矩形, $BH = AD = 5$, $DH = AB = 4$, 分两种情况求解即可;

(2) ① 如图, 过点 M 作 $MG \perp AD$ 于 G , 延长 GM 交 BC 于 F , 四边形 $ABFG$ 是矩形, $AG = BF$,

$FG = AB = 4$, 再证明 $\triangle DGM \cong \triangle EFM$ (AAS), 可得出 $BF = \frac{x+5}{2}$, 最后在在 $Rt\triangle BMF$ 中, 利用勾

股定理构建函数关系式即可;

② 根据点 M 是 DE 中点, $AM \perp DE$, 可知 AM 垂直平分 DE , 由垂直平分线的性质可得 $AE = AD = 5$, 然后在在 $Rt\triangle BMF$ 中, 利用勾股定理计算即可.

【小问 1 详解】

解: 如图, 作 $DH \perp BC$ 于 H ,

∴ $\angle DHB = \angle DHC = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是梯形, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 4$, $AD = 5$,

$\therefore \angle BAD = 180^\circ - \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle DHB = \angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABHD$ 是矩形,

$\therefore BH = AD = 5$, $DH = AB = 4$,

分两种情况:

第一种情况: 当 AE 平分 $\angle BED$ 时,

$\therefore \angle AEB = \angle AED$,

又 $\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle AEB = \angle EAD$,

$\therefore \angle DAE = \angle DEA$,

$\therefore DE = AD = 5$,

在 $Rt\triangle DEH$ 中, $EH = \sqrt{DE^2 - DH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

$\therefore BE = BH - EH = 5 - 3 = 2$;

第二种情况: 当 AE' 平分 $\angle BE'D$ 时,

$\therefore \angle AE'B = \angle AE'D$,

又 $\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle AE'B = \angle E'AD$,

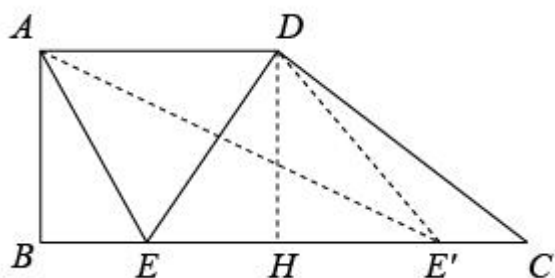
$\therefore \angle DAE' = \angle DE'A$,

$\therefore DE' = AD = 5$,

在 $Rt\triangle DE'H$ 中, $E'H = \sqrt{DE'^2 - DH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

$\therefore BE' = BH + E'H = 5 + 3 = 8$.

综上所述, BE 的长为 2 或 8.



【小问 2 详解】

①如图, 过点 M 作 $MG \perp AD$ 于 G , 延长 GM 交 BC 于 F ,

$$\therefore \angle DGM = 90^\circ,$$

$$\because AD \parallel BC, \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EFM = \angle DGM = 90^\circ, \angle BAD = 180^\circ - \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BAD = \angle BFG = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABFG$ 是矩形,

$$\therefore AG = BF, FG = AB = 4,$$

$\because$ 点 M 是 DE 中点,

$$\therefore DM = EM,$$

在 $\triangle DGM$ 和 $\triangle EFM$ 中,

$$\begin{cases} \angle DGM = \angle EFM \\ \angle DMG = \angle EMF \\ DM = EM \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DGM \cong \triangle EFM (AAS),$$

$$\therefore DG = EF, GM = FM,$$

$$\because BE = x, BM = y, AD = 5$$

$$\therefore 2BF = BF + AG = BE + EF + AD - DG = BE + AD$$

$$\therefore BF = \frac{BE + AD}{2} = \frac{x + 5}{2},$$

$$\text{在 } Rt\triangle BMF \text{ 中, } BM = y, BF = \frac{x+5}{2}, FM = \frac{1}{2}GF = 2,$$

$$\therefore BM = \sqrt{BF^2 + MF^2} = \sqrt{\left(\frac{x+5}{2}\right)^2 + 2^2}$$

$$\text{即: } y = \frac{\sqrt{x^2 + 10x + 41}}{2},$$

当 N 与 C 重合时, $BE=4$,

$$\therefore x \text{ 取值范围为 } 0 < x < 4,$$

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的函数解析式为: } y = \frac{\sqrt{x^2 + 10x + 41}}{2} (0 < x < 4);$$

② $\because M$ 是 DE 中点, $AM \perp DE$,

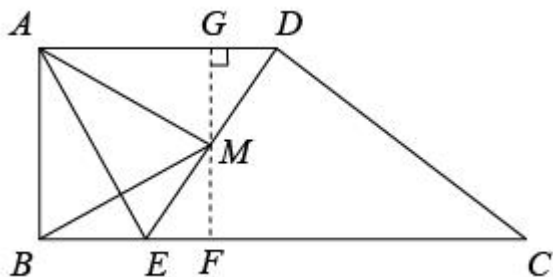
$\therefore AM$ 垂直平分 DE ,

$$\therefore AE = AD = 5,$$

在 $Rt\triangle BMF$ 中, $AB = 4$, $AE = 5$,

$$\therefore BE = \sqrt{AE^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

$\therefore BE$ 的长为 3.



【点睛】本题考查四边形综合题, 考查了矩形判定和性质, 全等三角形的判定和性质, 等腰三角形的判定和性质, 勾股定理, 垂直平分线的判定和性质等知识. 解题的关键是学会添加常用辅助线构造直角三角形和全等三角形解决问题.

30. 【探究与应用】我们把平行四边形沿着它的一条对角线翻折, 会发现有很多结论. 例如: 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB \neq BC$, 将 $\triangle ABC$ 沿直线 AC 翻折至 $\triangle AEC$, 连结 DE , 则 $AC \parallel ED$.

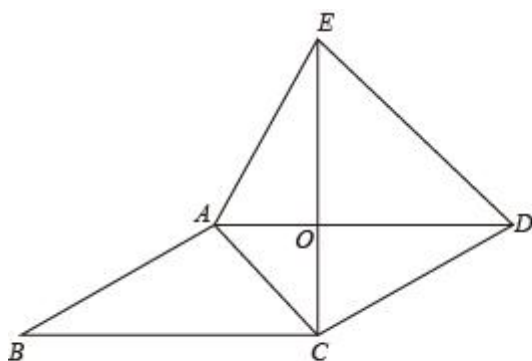


图1

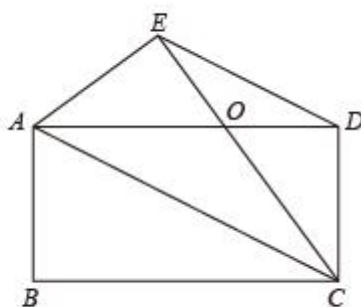


图2

- (1) 如图 1, 若 AD 与 CE 相交于点 O , 证明以上个结论;
- (2) 如图 2, AD 与 CE 相交于点 O , 若 $\angle B = 90^\circ$, $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$, 求 $\triangle AOC$ 的面积;
- (3) 如果 $\angle B = 45^\circ$, $BC = 2$, 当 A 、 C 、 D 、 E 为顶点的四边形是正方形时, 请画图并求出 AC 的长;
- (4) 如果 $\angle B = 30^\circ$, $AB = 3$, 当 $\triangle AED$ 是直角三角形时, 直接写出 BC 的长.

【答案】(1) 证明见解析;

$$(2) \frac{3\sqrt{2}}{4};$$

(3) $\sqrt{2}$ 或 2; 图形见解析;

(4) $2\sqrt{3}$ 或 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 或 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 由平行四边形的定义可得 $AD \parallel BC$, $AD=BC$, 由折叠的性质可得 $\angle ACB=\angle ACE$, $BC=CE$, 于是可得 $\triangle OAC$ 、 $\triangle ODE$ 是等腰三角形, 利用对顶角相等求得 $\angle OCA$ 和 $\angle OED$ 即可证明;

(2) 设 $OD=x$, 由 (1) 解答可得 $OD=OE=x$, 由折叠的性质可得 $OC=2-x$, 由 $\angle B=90^\circ$ 可得 $ABCD$ 是矩形, $Rt\triangle ODC$ 中由勾股定理建立方程求得 x , 进而求得 OA 即可解答;

(3) 分 $\angle ACB=45^\circ$ 和 $\angle ACB=90^\circ$ 两种情况作出图形, 再根据正方形的性质计算求值即可;

(4) 分 $\angle ACB=60^\circ$, $\angle ACB=90^\circ$ 和 $\angle ACB=30^\circ$, 三种情况, 根据 30° 直角三角形的边长关系和勾股定理计算求值即可;

【小问 1 详解】

证明: $\because ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC, AB=CD, AD=BC,$$

$$\therefore \angle OAC=\angle ACB,$$

$$\because \angle ACB=\angle ACE,$$

$$\therefore \angle OAC=\angle OCA,$$

$$\therefore OA=OC, \angle OCA=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle AOC),$$

$$\because BC=CE, BC=AD,$$

$$\therefore AD=CE,$$

$$\therefore AD-OA=CE-OC,$$

$$\therefore OE=OD,$$

$$\therefore \angle OED=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle EOD),$$

$$\because \angle AOC=\angle EOD,$$

$$\therefore \angle OCA=\angle OED,$$

$$\therefore AC \parallel DE;$$

【小问 2 详解】

解: 设 $OD=x$,

由 (1) 解答可得 $OD=OE=x$,

$$\therefore CE=CB=2,$$

$$\therefore OC=2-x,$$

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\angle B=90^\circ$,

∴ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

∴ $CD=AB=\sqrt{2}$, $AD=BC=2$, $\angle ADC=90^\circ$,

$Rt\triangle ODC$ 中, $OC^2=OD^2+CD^2$,

∴ $(2-x)^2=x^2+2$,

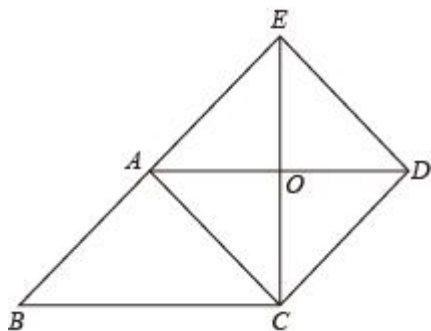
∴ $x=\frac{1}{2}$,

∴ $OA=AD-OD=\frac{3}{2}$,

∴ $\triangle OAC$ 面积 $=\frac{1}{2}OA\cdot CD=\frac{3\sqrt{2}}{4}$;

【小问 3 详解】

解: ①如图, $\angle ACB=45^\circ$ 时, $\angle B=45^\circ$, $AB=AC$,



∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\angle B=45^\circ$, 则 $\angle BCD=135^\circ$,

∴ $\angle ACD=90^\circ$,

∵ $\angle BAC=180^\circ-\angle B-\angle ACB=90^\circ$, $AC\parallel ED$,

∴ $\angle AED=90^\circ$, $\angle CDE=90^\circ$,

∴ 四边形 $ACDE$ 是矩形,

∵ $AB=AC=AE$,

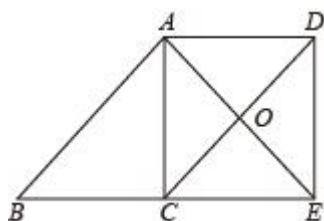
∴ 四边形 $ACDE$ 是正方形,

∵ $CE=CB=2$,

∴ $AC^2+AE^2=CE^2$,

∴ $AC=\sqrt{2}$;

②如图, $\angle ACB=90^\circ$ 时, $\angle B=\angle BAC=45^\circ$, $CA=CB$,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\angle B=45^\circ$, 则 $\angle BAD=135^\circ$,

$\therefore \angle CAD=90^\circ$,

$\because AC \parallel ED$, $\therefore \angle ADE=90^\circ$, $\angle CED=90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ACDE$ 是矩形,

$\because BC=CE=CA$,

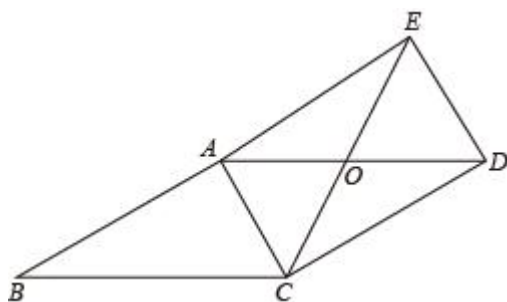
$\therefore$ 四边形 $ACDE$ 是正方形,

$\therefore AC=2$;

$\therefore AC=\sqrt{2}$ 或 2 ;

【小问 4 详解】

解: ①如图, $\angle ACB=60^\circ$ 时,



$\angle B=30^\circ$, 则 $\angle BAC=90^\circ$,

$\therefore \angle CAE=90^\circ$,

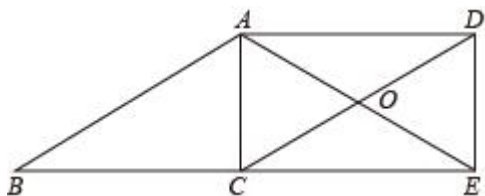
$\because AC \parallel DE$, $\therefore \angle AED=90^\circ$, 则 $\triangle AED$ 是直角三角形,

$Rt\triangle ABC$ 中, $AB=3$, $BC=2AC$,

$$\therefore BC^2=AB^2+AC^2=9+\frac{1}{4}BC^2,$$

$$BC=2\sqrt{3};$$

②如图, $\angle ACB=90^\circ$ 时,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\angle B=30^\circ$, 则 $\angle BAD=150^\circ$,

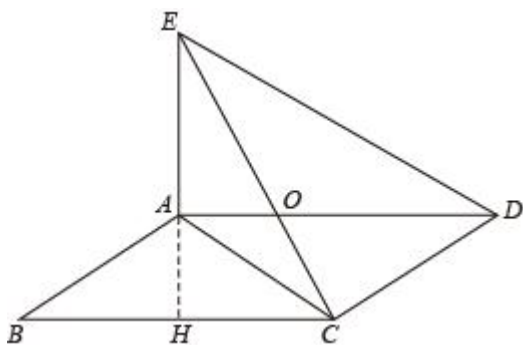
$\therefore \angle BAC=90^\circ-\angle B=60^\circ$, $\therefore \angle CAD=90^\circ$,

$\because AC \parallel DE$, $\therefore \angle ADE=90^\circ$, 则 $\triangle AED$ 是直角三角形,

$Rt\triangle ABC$ 中, $AB=3$, $AC=\frac{3}{2}$,

$$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

③如图, $\angle ACB=30^\circ$ 时, 作 $AH \perp BC$ 于点 H ,



由四边形 $ABCD$ 是平行四边形得 $AD \parallel BC$,

$\therefore \angle DAC=\angle ACB=30^\circ$,

$\therefore \angle BAC=180^\circ-\angle B-\angle ACB=120^\circ$,

由折叠的性质可得 $\angle EAC=\angle BAC=120^\circ$,

$\therefore \angle EAD=\angle EAC-\angle DAC=90^\circ$, 则 $\triangle AED$ 是直角三角形,

$Rt\triangle ABH$ 中, $AB=3$, $AH=\frac{3}{2}$,

$$\therefore BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$\angle B=\angle ACB=30^\circ$, $AH \perp BC$, 则 $BH=HC=\frac{1}{2}BC$,

$$\therefore BC=2BH=\sqrt{3},$$

综上所述 BC 的长为: $2\sqrt{3}$ 或 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 或 $\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查了特殊平行四边形的判定和性质, 折叠的性质, 等腰三角形的判定和性质, 含 30° 直角三

角形，勾股定理等知识；正确作出图形并分类讨论是解题关键.

