

上海市张江集团中学 2025-2026 学年第一学期

九年级 9 月阶段练习 · 数学试卷-1

完卷时间：100 分钟，满分：150 分。

一、选择题（每小题 4 分）：

1. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ，如果 $\angle B = \alpha$ ， $AC = m$ ，那么 AB 等于（ ）

A. $\frac{m}{\sin \alpha}$

B. $\frac{m}{\cos \alpha}$

C. $m \cdot \tan \alpha$

D. $m \cdot \cot \alpha$

【答案】D

【解析】

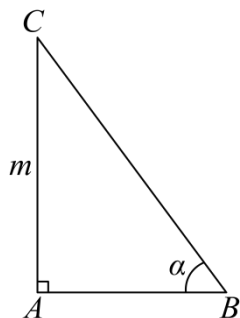
【分析】本题主要考查了三角函数的定义，掌握余切函数的定义即可解答。

根据余切的定义求解即可。

【详解】解：如图：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $\angle B = \alpha$ ， $AC = m$ ，

$$\therefore \cot \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{m}, \text{ 即 } AB = m \cdot \cot \alpha.$$

故选 D.



2. 下列说法中，错误的是（ ）

A. 设 $\vec{e}$ 为单位向量，那么 $|\vec{e}| = 1$ ；

B. 如果 $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$ ，那么 $\vec{a} = 3\vec{b}$ 或 $\vec{a} = -3\vec{b}$ ；

C. 如果 $\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{c}$ ， $\vec{a} - \vec{b} = 3\vec{c}$ ，其中 $\vec{c} \neq \vec{0}$ ，那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ；

D. 平面内任意一个非零向量都可以在给定的两个不平行向量的方向上分解。

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查平面向量，根据平面向量的运算法则和向量的模的定义逐一判断即可。

【详解】解：A. 设 $\vec{e}$ 为单位向量，那么 $|\vec{e}| = 1$ ，说法正确；

B. 如果 $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$ ，只能说明向量 $\vec{a}$ 的模是向量 $\vec{b}$ 的模的 3 倍，方向不一定是相同或相反，所以不能说明

$\vec{a} = 3\vec{b}$ 或 $\vec{a} = -3\vec{b}$ ，故说法错误；

C. $\because \vec{a} + \vec{b} = 2\vec{c}$ ， $\vec{a} - \vec{b} = 3\vec{c}$ ($\vec{c}$ 为非零向量)，

$$\therefore 3(\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} - \vec{b}),$$

$$\text{即 } 3\vec{a} + 3\vec{b} = 2\vec{a} - 2\vec{b},$$

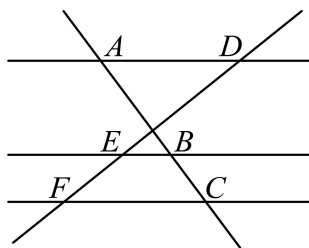
$$\therefore \vec{a} = -5\vec{b},$$

$\therefore \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行，故说法正确；

D. 平面内任意一个非零向量都可以在给定的两个不平行向量的方向上分解，说法正确.

故选：B.

3. 如图，已知 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ， $DE = 6, DF = 9$ ，那么下列结论正确的是 ()



A. $BC : EF = 1 : 1$

B. $BC : AB = 1 : 2$

C. $AD : CF = 2 : 3$

D. $BE : CF = 2 : 3$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了平行线分线段成比例，理解并掌握平行线分线段成比例的计算方法是解题的关键.

根据平行线分线段成比例的计算方法得到 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = \frac{6}{3} = 2$ ，即可求解.

【详解】解： $\because DE = 6, DF = 9$ ，

$$\therefore EF = DF - DE = 9 - 6 = 3,$$

A、 $\because BC$ 的值不确定，无法比较，故原选项不正确，不符合题意；

B、 $\because l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ，

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = \frac{6}{3} = 2,$$

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}, \text{ 故该选项正确，符合题意；}$$

C、 $\because AD, CF$ 的值不确定，故原选项错误，不符合题意；

D、 $\because BE, CF$ 的值不确定，故原选项错误，不符合题意；

故选：B.

4. 已知一个单位向量 $\vec{e}$ ，设 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 是非零向量，那么下列等式中正确的是（ ）

- A. $|\vec{a}|\vec{e} = \vec{a}$ B. $|\vec{e}|\vec{b} = \vec{b}$ C. $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \vec{e}$ D. $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查平面向量，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型. 根据平面向量的性质一一判断即可.

【详解】解：A、 $|\vec{a}|\vec{e}$ 与 $\vec{a}$ 的模相等，方向不一定相同，故本选项不符合题意.

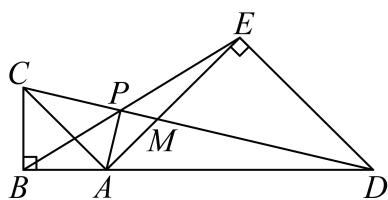
B、 $|\vec{e}|\vec{b} = \vec{b}$ ，计算正确，故本选项符合题意.

C、 $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ 和 $\vec{e}$ 的模相等，方向不一定相同，故本选项不符合题意.

D、 $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ 和 $\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$ 的模相等，方向不一定相同，故本选项不符合题意.

故选：B.

5. 如图，点 A 在线段 BD 上，在 BD 的同侧作等腰直角三角形 ABC 和等腰直角三角形 ADE ， CD 与 BE 、 AE 分别交于点 P 、 M . 对于下列结论：① $\triangle BAE \sim \triangle CAD$ ；② $MP \cdot MD = MA \cdot ME$ ；③ $\angle CPB = 45^\circ$. 其中正确的结论是（ ）



- A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ①②③

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了相似三角形的判定和性质，等腰直角三角形的性质，理解等腰直角三角形的性质和相似三角形的判定和性质是解答关键.

①由等腰直角 ABC 和等腰直角 ADE 三边比，根据相似三角形的判定 2 证明；②通过等积式倒推可知，证明 $\triangle PME \sim \triangle AMD$ 即可；③根据相似三角形的性质即可得到结论.

【详解】解：∵ $\triangle ABC$ ， $\triangle ADE$ 是等腰直角三角形， $\angle ABC = \angle AED = 90^\circ$ ， $BA = BC$ ， $EA = ED$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2}AB, \quad AD = \sqrt{EA^2 + ED^2} = \sqrt{2}AE,$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE}.$$

$$\therefore \angle BAC = \angle EAD,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle CAD,$$

$$\therefore \triangle BAE \sim \triangle CAD,$$

所以①正确；

$$\therefore \triangle BAE \sim \triangle CAD,$$

$$\therefore \angle BEA = \angle CDA.$$

$$\therefore \angle PME = \angle AMD,$$

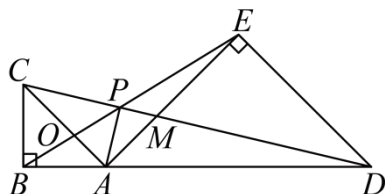
$$\therefore \triangle PME \sim \triangle AMD,$$

$$\therefore \frac{MP}{MA} = \frac{ME}{MD},$$

$$\therefore MP \cdot MD = MA \cdot ME,$$

所以②正确；

设 BE 与 AC 相交于 O ，



则 $\angle AOB = \angle POC$.

$$\therefore \triangle BAE \sim \triangle CAD,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ACD,$$

$$\therefore \angle CPB = \angle BAC.$$

∵ $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore \angle ACB = \angle BAC = 45^\circ,$$

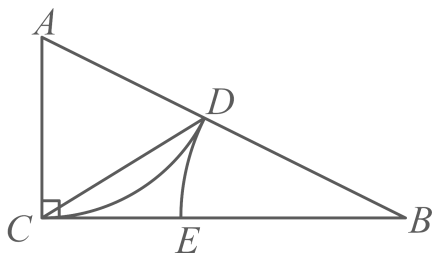
$$\therefore \angle CPB = 45^\circ,$$

∴ 正确的有①②③，

故选：D.

6. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 1$ ， $BC = 2AC$ ，某同学进行了如下的操作：以点 A 为圆心，以 AC 长为半径画弧，交 AB 于点 D ；再以点 B 为圆心， BD 长为半径画弧，交 BC 于点 E ，连接

CD 、 DE ．他有两个猜想：①点 E 是线段 BC 的黄金分割点；② $\angle CDE = 45^\circ$ ．你的判断是（ ）



A. ①②都正确

B. ①正确，②错误

C. ①错误，②正确

D. ①②都错误

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了黄金分割点，勾股定理，等腰三角形的性质等，利用勾股定理求出 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{5}$ ，

进而得到 $BE = BD = \sqrt{5} - 1$ ，即得 $\frac{BE}{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，根据黄金分割的定义可判断①；由等腰三角形的性质和

三角形内角和定理可得 $\angle ADC = \angle ACD = \frac{180^\circ - \angle A}{2}$ ， $\angle BDE = \angle BED = \frac{180^\circ - \angle B}{2}$ ，即得

$\angle ADC + \angle BDE = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 135^\circ$ ，得到 $\angle CDE = 180^\circ - (\angle ADC + \angle BDE) = 45^\circ$ ，即可

判断②，综上即可求解，掌握以上知识点是解题的关键．

【详解】解：① $\because AC = 1$ ， $BC = 2AC$ ，

$\therefore BC = 2$ ，

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ，

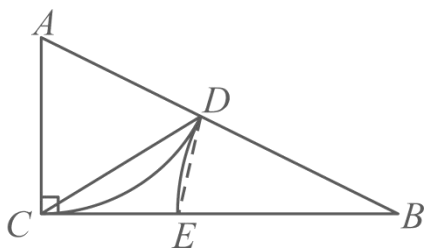
由作图可知， $AD = AC = 1$ ， $BE = BD$ ，

$\therefore BE = BD = \sqrt{5} - 1$ ，

$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，

$\therefore$ 点 E 是线段 BC 的黄金分割点，故①正确；

②连接 DE ，如图，



$$\because AD = AC, BE = BD,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ACD = \frac{180^\circ - \angle A}{2}, \quad \angle BDE = \angle BED = \frac{180^\circ - \angle B}{2},$$

$$\therefore \angle ADC + \angle BDE = \frac{180^\circ - \angle A}{2} + \frac{180^\circ - \angle B}{2} = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B),$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC + \angle BDE = 180^\circ - \frac{1}{2} \times 90^\circ = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = 180^\circ - (\angle ADC + \angle BDE) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ, \text{ 故②正确;}$$

$\therefore$ ①②都正确,

故选: A.

二、填空题 (每小题 4 分)

7. 一斜坡的坡度是 $1:\sqrt{3}$, 则此斜坡的坡角为 _____ $^\circ$.

【答案】 30

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形的应用--坡度坡比问题. 根据坡角的正切=坡度, 列式可得结果.

【详解】 设这个斜坡的坡角为 α ,

$$\text{由题意得: } \tan \alpha = 1:\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \alpha = 30^\circ.$$

故答案为: 30.

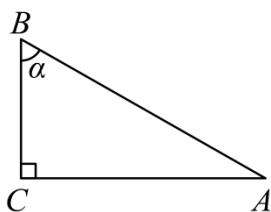
8. 已知锐角 α , 如果 $\tan \alpha = 3$, 那么 $\cos \alpha =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

【解析】

【分析】 本题考查的是锐角三角函数的应用, 根据 $\tan \alpha = 3$, 画图设 $AC = 3m$, 则 $BC = m$, 再求解 $AB = \sqrt{(3m)^2 + m^2} = \sqrt{10}m$, 从而可得答案.

【详解】 解: 如图, $\angle B = \alpha$, $\angle C = 90^\circ$,



$$\therefore \tan \alpha = 3,$$

$$\therefore \frac{AC}{BC} = 3,$$

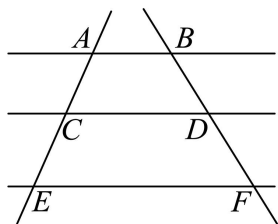
设 $AC = 3m$ ，则 $BC = m$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{(3m)^2 + m^2} = \sqrt{10}m,$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{m}{\sqrt{10}m} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

故答案为: $\frac{\sqrt{10}}{10}$

9. 如图，直线 $AB \parallel CD \parallel EF$ ， $AC:CE = 2:3$ ， $BD = 3$ ，则 BF 的长是_____.



【答案】 $\frac{15}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了平行线分线段成比例定理，熟练掌握该定理是解题的关键.

利用平行线分线段成比例定理，结合已知的线段比例和线段长度，求出未知线段长度.

【详解】 解: $\because AB \parallel CD \parallel EF$

$$\therefore \frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$$

$$\because AC:CE = 2:3, \quad BD = 3$$

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{3}{DF}$$

$$\therefore 2DF = 9$$

$$\therefore DF = \frac{9}{2}$$

$$\therefore BF = BD + DF = 3 + \frac{9}{2} = \frac{15}{2}$$

故答案为: $\frac{15}{2}$.

10. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\tan A = \frac{3}{4}$, $BC = 4$, 那么 AB 长为_____.

【答案】 $\frac{20}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了锐角三角函数的定义以及勾股定理, 熟练掌握正切函数的定义和勾股定理是解题的关键.

先根据正切函数的定义求出 AC 的长度, 再利用勾股定理求出 AB 的长度.

【详解】 解: $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}$, $BC = 4$,

$$\therefore \frac{4}{AC} = \frac{3}{4},$$

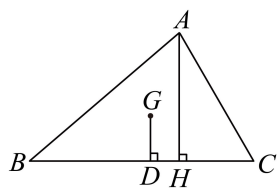
$$\text{解得 } AC = \frac{16}{3},$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

$$\therefore AB = \sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{\frac{256}{9} + 16} = \sqrt{\frac{256 + 144}{9}} = \sqrt{\frac{400}{9}} = \frac{20}{3}$$

故答案为: $\frac{20}{3}$.

11. 如图, $\triangle ABC$ 中, G 是重心, $GD \perp BC$, $AH \perp BC$, 那么 $\frac{GD}{AH} =$ _____



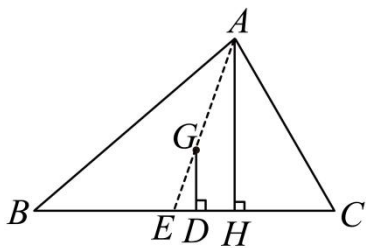
【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查的是三角形的重心的概念和性质, 三角形的重心是三角形三条中线的交点, 且重心到顶点的距离是它到对边中点的距离的 2 倍. 连接 AG 并延长交 BC 于 E , 根据重心的概念和性质得到 $\frac{EG}{GA} = \frac{1}{2}$,

进而可得 $\frac{EG}{EA} = \frac{1}{3}$, 由题意可得 $GD \parallel AH$, 进而可得 $\triangle DEG \sim \triangle HEA$, 根据相似三角形对应边长的比例相等即可求出 $\frac{GD}{AH}$.

【详解】 解: 如图, 连接 AG 并延长交 BC 于 E ,



$\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore \frac{EG}{GA} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{EG}{EA} = \frac{1}{3},$$

$\because GD \perp BC, AH \perp BC,$

$$\therefore \angle EDG = \angle EHA = 90^\circ,$$

$$\therefore GD \parallel AH,$$

$$\therefore \angle EGD = \angle EAH$$

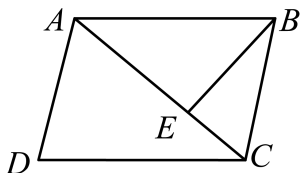
$$\therefore \triangle DEG \sim \triangle HEA,$$

$$\therefore \frac{GD}{AH} = \frac{EG}{EA} = \frac{1}{3},$$

故答案为: $\frac{1}{3}$.

12. 如图, 已知平行四边形 $ABCD$ 中, E 是对角线 AC 上一点, 且 $AE = 2EC$. 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 那

么向量 $\overrightarrow{BE} =$ _____ (结果用含 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示).



【答案】 $\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$

【解析】

【分析】 本题考查了平面向量, 平行四边形的性质, 熟练掌握以上知识点是解题的关键. 根据题意可知

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, 求得 $\overrightarrow{AC}$, 再由 $AE = 2EC$, 求得 $\overrightarrow{AE}$, 最后利用 $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}$ 即可求得答案.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\because AE = 2EC, AC = AE + EC$$

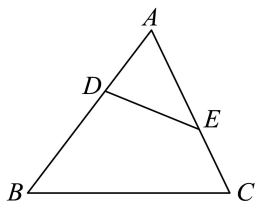
$$\therefore AE = \frac{2}{3} AC$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3} (\vec{a} + \vec{b})$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3} (\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} = \frac{2}{3} \vec{b} - \frac{1}{3} \vec{a}$$

故答案为: $\frac{2}{3} \vec{b} - \frac{1}{3} \vec{a}$.

13. 已知如图, D, E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 上的点, $\angle AED = \angle B$, $AD = 3$, $AB = 8$, $AE = 4$. 求 AC 的长度.



【答案】6

【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的判定与性质, 根据题意得到 $\angle AED = \angle B$, $\angle A = \angle A$, 可得 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$, 然后利用相似三角形的性质即可求解.

【详解】 $\because \angle AED = \angle B$, $\angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB$.

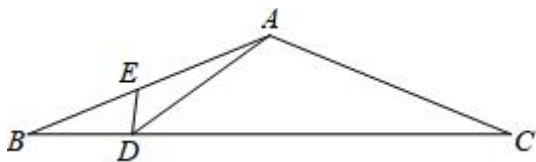
$\therefore AD : AC = AE : AB$,

$\because AD = 3$, $AB = 8$, $AE = 4$,

$\therefore 3 : AC = 4 : 8$,

$\therefore AC = 6$.

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 D, E 分别在边 BC, AB 上, 且 $\angle ADE = \angle B$, 如果 $DE : AD = 2 : 5$, $BD = 3$, 那么 $AC =$ _____.



【答案】 $\frac{15}{2}$

【解析】

【分析】根据 $\angle ADE = \angle B$, $\angle EAD = \angle DAB$, 得出 $\triangle AED \sim \triangle ABD$, 利用相似三角形的性质解答即可.

【详解】 $\because \angle ADE = \angle B$, $\angle EAD = \angle DAB$,

$\therefore \triangle AED \sim \triangle ABD$,

$$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{BD}{AB}, \text{ 即 } \frac{3}{AB} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore AB = \frac{15}{2},$$

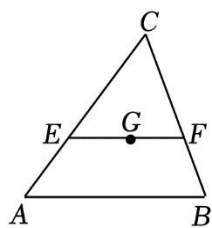
$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore AC = \frac{15}{2},$$

$$\text{故答案为 } \frac{15}{2}$$

【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质. 关键是要懂得找相似三角形, 利用相似三角形的性质求解.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知线段 EF 经过三角形的重心 G , $EF \parallel AB$, 四边形 $ABFE$ 的面积为 15cm^2 , 那么 $\triangle ABC$ 的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}\text{cm}^2$.

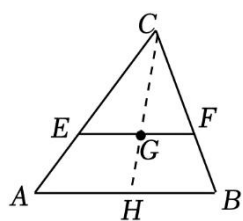


【答案】27

【解析】

【分析】连接 CG 并延长交 AB 于 H , 由 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 可得 $\frac{CG}{CH} = \frac{2}{3}$, 而 $EF \parallel AB$, 有 $\triangle CEF \sim \triangle CAB$, $\frac{CE}{CA} = \frac{CG}{CH} = \frac{2}{3}$, 故 $\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CAB}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$, 设 $S_{\triangle ABC} = x \text{ cm}^2$, 有 $\frac{x-15}{x} = \frac{4}{9}$, 即可解得答案.

【详解】解: 连接 CG 并延长交 AB 于 H , 如图:



$\because G$ 为 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore CG = 2GH,$$

$$\therefore \frac{CG}{CH} = \frac{2}{3},$$

$\because EF \parallel AB,$

$$\therefore \triangle CEF \sim \triangle CAB, \quad \frac{CE}{CA} = \frac{CG}{CH} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{EF}{AB} = \frac{CE}{CA} = \frac{CG}{CH} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CAB}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

设 $S_{\triangle ABC} = x \text{ cm}^2$, 则 $S_{\triangle CEF} = (x-15)\text{cm}^2$,

$$\therefore \frac{x-15}{x} = \frac{4}{9},$$

解得 $x = 27$,

故答案为: 27.

【点睛】 本题考查三角形的重心, 涉及相似三角形的判定与性质, 解题的关键是掌握三角形重心的性质.

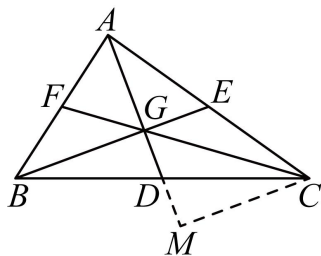
16. 已知 $\triangle ABC$ 的三条中线 AD 、 BE 、 CF 相交于点 G , $AD=9, BE=12, CF=15$, 那么 $\triangle ABC$ 的面积等于_____.

【答案】 72

【解析】

【分析】 如图, 首先把 $\triangle BDG$ 绕点 D 作中心对称变换得到 $\triangle CDM$, 然后根据重心的性质可以分别得到 $CG = \frac{2}{3}CF = 10, CM = BG = \frac{2}{3}BE = 8, GM = 2GD = \frac{1}{3}AD = 6$, 由此利用勾股定理的逆定理可以证明 $\triangle GCM$ 是直角三角形, 即 $\angle GMC = 90^\circ$, 再利用三角形的面积公式求出 $S_{\triangle GCM}$, 最后可以得到 $S_{\triangle BGC} = S_{\triangle GCM} = 24$, 而 $S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle BGC}$, 由此即可求解.

【详解】 解: 如图, 把 $\triangle BDG$ 绕点 D 作中心对称变换得到 $\triangle CDM$,



$$\therefore CG = \frac{2}{3}CF = 10, CM = BG = \frac{2}{3}BE = 8, GM = 2GD = \frac{2}{3}AD = 6,$$

$$\therefore GM^2 + CM^2 = 100 = CG^2,$$

$\therefore \triangle GCM$ 是直角三角形, 即 $\angle GMC = 90^\circ$,

$$\therefore S_{\triangle GCM} = \frac{1}{2}CM \cdot GM = 24$$

$$\therefore S_{\triangle BGC} = S_{\triangle GCM} = 24,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle BGC} = 72,$$

故答案为: 72.

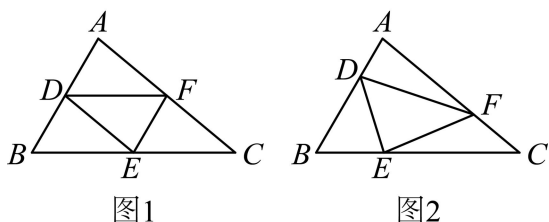
【点睛】此题分别考查了旋转的性质、直角三角形的性质、勾股定理的逆定理及三角形的面积公式，其中对于中线问题一般可以尝试中心变换，此题把三条中线的有关线段集中在一起，构造出一个规则图形--直角三角形.

17. 如图 1，在学习三角形的中位线时，我们知道 D, E, F 分别是 ABC 三边的中点，且

$\frac{AD}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{CF}{AC} = \frac{1}{2}$ ，则三条中位线在三角形内部构成的新三角形，其面积与原三角形面积的比值是 $\frac{1}{4}$ ；

如图 2，已知 D, E, F 分别是 ABC 三边的三等分点，且 $\frac{AD}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{CF}{AC} = \frac{1}{3}$ ，依次连接 DE, EF, FD ，

则 $\triangle DEF$ 与 ABC 面积的比值是_____.

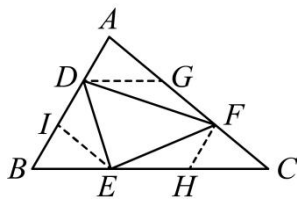


【答案】 $\frac{1}{9}$

【解析】

【分析】本题考查三角形中位线定理，相似三角形的判定和性质. 取 AF 中点 G ， CE 中点 H ， BD 中点 I ，连接 DG, FH, EI ，先证 $\triangle DAG \sim \triangle BAC$ ，推出 $\frac{S_{\triangle DAG}}{S_{\triangle BAC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{1}{9}$ ，根据等高三角形面积比等于底边长度之比，可得 $S_{\triangle DAF} = 2S_{\triangle DAG} = \frac{2}{9}S_{\triangle BAC}$ ，同理推出 $S_{\triangle BDE} = \frac{2}{9}S_{\triangle BAC}$ ， $S_{\triangle CEF} = \frac{2}{9}S_{\triangle BAC}$ ，即可求解.

【详解】解：如图，取 AF 中点 G ， CE 中点 H ， BD 中点 I ，连接 DG, FH, EI ，



$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CA} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore AG = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{3}AC, \quad BI = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{3}BA, \quad CH = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{3}BC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AG}{AC} = \frac{1}{3},$$

$$\text{又} \because \angle DAG = \angle BAC,$$

$$\therefore \triangle DAG \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle DAG}}{S_{\triangle BAC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{1}{9}, \text{ 即 } S_{\triangle DAG} = \frac{1}{9}S_{\triangle BAC},$$

$$\therefore AG = \frac{1}{2}AF,$$

$$\therefore S_{\triangle DAF} = 2S_{\triangle DAG} = \frac{2}{9}S_{\triangle BAC},$$

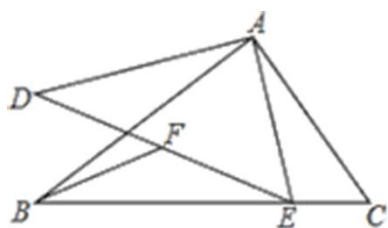
$$\text{同理可证 } S_{\triangle BDE} = \frac{2}{9}S_{\triangle BAC}, \quad S_{\triangle CEF} = \frac{2}{9}S_{\triangle BAC},$$

$$\therefore S_{\triangle DEF} = S_{\triangle BAC} - S_{\triangle ADF} - S_{\triangle BDE} - S_{\triangle CEF} = \left(1 - 3 \times \frac{2}{9}\right)S_{\triangle BAC} = \frac{1}{3}S_{\triangle BAC},$$

综上所述, $\triangle DEF$ 与 ABC 的面积比值为 $\frac{1}{3}$.

故答案为: $\frac{1}{3}$.

18. 如图, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$, $AB = 16$, $AC = 12$, F 是 DE 的中点, 若点 E 是直线 BC 上的动点, 连接 BF , 则 BF 的最小值是_____.

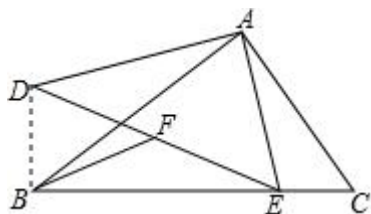


【答案】8

【解析】

【分析】根据相似三角形的性质得到 $\angle ADE = \angle ABE$, 推出点 A, D, B, E 四点共圆, 得到 $\angle DBE = 90^\circ$, 根据直角三角形的性质得到 $BF = \frac{1}{2}DE$, 当 DE 最小时, BF 的值最小, DE 最小, 根据相似三角形的性质即可得到结论.

【详解】解: 如图,



$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ABE,$$

$\therefore$ 点 A, D, B, E 四点共圆,

$$\therefore \angle DAE=90^{\circ},$$

$$\therefore \angle DBE=90^{\circ},$$

$\therefore$ F 是 DE 的中点,

$$\therefore BF = \frac{1}{2}DE,$$

$\therefore$ 当 DE 最小时, BF 的值最小,

$\therefore$ 若点 E 是直线 BC 上的动点,

$\therefore$ 当 $AE \perp BC$ 时, AE 最小, 此时, DE 最小,

$$\therefore \angle BAC=90^{\circ}, AB=16, AC=12,$$

$$\therefore BC=20,$$

$$\therefore AE = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{48}{5},$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE,$$

$$\therefore \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE},$$

$$\therefore \frac{12}{\frac{48}{5}} = \frac{20}{DE},$$

$$\therefore DE=16,$$

$$\therefore BF=8,$$

故答案为 8.

【点睛】本题考查了相似三角形的性质, 三角形的面积公式, 四点共圆, 圆周角定理, 直角三角形的性质, 确定出当 DE 最小时, BF 的值最小是解题的关键.

三、解答题

$$19. \text{ 计算: } 3\tan 30^{\circ} - \tan 45^{\circ} + 2\sin 60^{\circ} + 2\cos^2 60^{\circ} - \frac{2}{1 + \tan 60^{\circ}}.$$

【答案】 $\sqrt{3} + \frac{1}{2}.$

【解析】

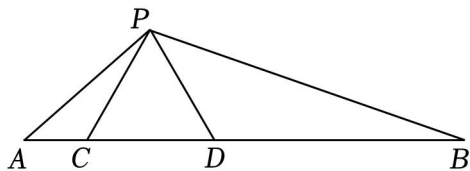
【分析】本题主要考查了特殊三角函数值的运算以及分母有理化, 还有四则运算的顺序. 熟练掌握特殊三角函数值、分母有理化的方法以及四则运算规则是解题的关键.

本题是一个包含特殊三角函数值的混合运算题, 解题思路是先分别将各个特殊三角函数值代入原式, 然后按照四则运算的顺序进行计算.

【详解】解: $3\tan 30^{\circ} - \tan 45^{\circ} + 2\sin 60^{\circ} + 2\cos^2 60^{\circ} - \frac{2}{1 + \tan 60^{\circ}}$

$$\begin{aligned}
&= 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2}{1+\sqrt{3}} \\
&= \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 2 \times \frac{1}{4} - \frac{2}{1+\sqrt{3}} \\
&= 2\sqrt{3} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{1+\sqrt{3}} \\
&= 2\sqrt{3} - 1 + \frac{1}{2} - (\sqrt{3} - 1) \\
&= 2\sqrt{3} - 1 + \frac{1}{2} - \sqrt{3} + 1 \\
&= (2\sqrt{3} - \sqrt{3}) + (1 - 1) + \frac{1}{2} \\
&= \sqrt{3} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

20. 如图, 点 C , D 在线段 AB 上, $\triangle PCD$ 是等边三角形, $\angle APB = 120^\circ$.



(1) 求证: $\triangle ACP \sim \triangle PDB$;

(2) 若 $AC = 1$, $DB = 4$, 求 CD 的长度.

【答案】(1) 见解析 (2) 2

【解析】

【分析】此题考查的是相似三角形的判定与性质, 掌握其性质定理是解决此题的关键.

(1) 根据等边三角形的性质可得 $\angle ACP = \angle PDB = 120^\circ$, 由三角形的内角定理证明 $\angle A = \angle DPB$, 即可证明结论;

(2) 根据相似三角形的性质及等边三角形的性质可得答案.

【小问 1 详解】

证明: $\because \triangle PCD$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle PCD = \angle PDC = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle ACP = \angle PDB = 120^\circ,$$

$$\because \angle APB = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle B = 60^\circ.$$

$$\because \angle PDB = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle DPB + \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle DPB,$$

$$\therefore \triangle ACP \sim \triangle PDB.$$

【小问 2 详解】

解: $\because \triangle ACP \sim \triangle PDB,$

$$\therefore \frac{AC}{PD} = \frac{PC}{BD},$$

$\because PCD$ 为等边三角形,

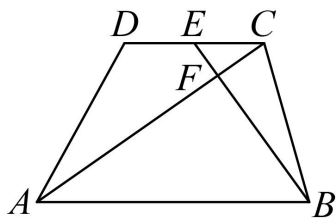
$$\therefore \text{设 } PC = PD = CD = x,$$

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{x}{4},$$

解得 $x = 2$ (负值舍去),

$$\therefore CD = 2.$$

21. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, E 是 CD 的中点, 且 $EC = \frac{2}{5}AB$, AC 与 BE 交于点 F .



(1) 若 $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{n}$, 请用 m, n 来表示 $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AF}$;

(2) 请直接画出 AC 在 $\vec{m}, \vec{n}$ 方向上的分向量 (不要求写作法, 但要保留作图痕迹, 并写明结论).

【答案】(1) $DC = \frac{4}{5}m$, $\overrightarrow{AF} = \frac{5}{7}\vec{n} + \frac{4}{7}\vec{m}$

(2) 见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了向量的线性运算, 相似三角形的性质与判定:

(1) 根据题意先求出 $CD = \frac{4}{5}AB$, 再由 $AB \parallel CD$ 可得 $DC = \frac{4}{5}AB = \frac{4}{5}m$; 证明 $\triangle CEF \sim \triangle ABF$, 推出 $AF = \frac{5}{7}AC$, 根据 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{n} + \frac{4}{5}\vec{m}$, 可得 $\overrightarrow{AF} = \frac{5}{7}\vec{n} + \frac{4}{7}\vec{m}$;

(2) 如图所示, 过点 C 作 $CT \parallel AD$ 交 AB 于 T , 则 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AT}$ 即为所求.

【小问 1 详解】

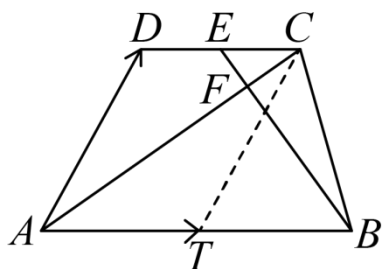
解: $\because E$ 是 CD 的中点,

$$\therefore CD = 2CE,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore EC = \frac{2}{5} AB, \\
&\therefore CD = \frac{4}{5} AB, \\
&\therefore AB \parallel CD, \\
&\therefore DC = \frac{4}{5} AB = \frac{4}{5} m, \\
&\therefore AB \parallel CD, \\
&\therefore \triangle CEF \sim \triangle ABF, \\
&\therefore \frac{CF}{AF} = \frac{CE}{AB} = \frac{2}{5}, \\
&\therefore AF = \frac{5}{7} AC, \\
&\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{n} + \frac{4}{5} \vec{m}, \\
&\therefore \overrightarrow{AF} = \frac{5}{7} \vec{n} + \frac{4}{7} \vec{m};
\end{aligned}$$

【小问 2 详解】

解：如图所示，过点 C 作 $CT \parallel AD$ 交 AB 于 T ，则 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AT}$ 即为所求。

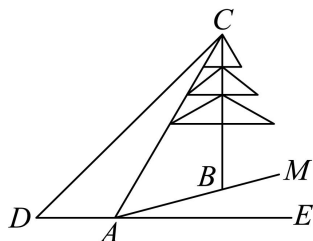


22. 某数学兴趣小组开展一项综合实践活动，记录如下：

【活动项目】测量山坡 AM 上一棵垂直于水平地面的大树 BC 的高度。

【测量方案】示意图如图所示：

1. 在水平地面上正对大树的方向上选取点 D ，在点 D 处测量大树顶端 C 的仰角；
2. 沿 DE 方向前进到达坡脚点 A 处，在点 A 处测量大树顶端 C 的仰角；
3. 测量 AD 之间的距离；
4. 测量斜坡 AM 的坡角。



【测量数据】

1. 在点 D 处测得 C 的仰角为 45° ;
2. 在点 A 处测得 C 的仰角为 60° ;
3. $AD = 10\text{m}$;
4. 斜坡 AM 的坡角为 15° .

请根据以上方案, 计算大树 BC 的高度. (结果保留精确值. 参考数据: $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,

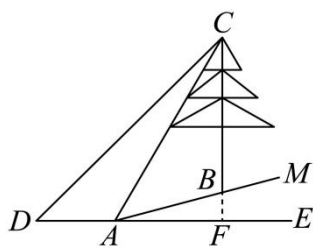
$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad \tan 15^\circ = 2-\sqrt{3})$$

【答案】 大树 BC 的高度为 20m

【解析】

【分析】 本题主要考查了解直角三角形的应用——仰角俯角问题, 熟练掌握三角函数的定义是解题的关键. 通过作辅助线构造直角三角形, 利用三角函数关系分别表示出相关线段长度, 再根据线段之间的关系列方程求解大树高度.

【详解】 解: 延长 CB 交 DE 于 F , 则 $CF \perp DE$,



$\because$ 斜坡 AM 的坡角为 15° ,

$\therefore \angle BAF = 15^\circ$,

$\because \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$, $AD = 10\text{m}$,

在 $\text{Rt}\triangle AFC$ 中, $\angle CAF = 60^\circ$,

$$\therefore AF = \frac{CF}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}CF}{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle BAF$ 中, $\angle BAF = 15^\circ$,

$$\therefore BF = AF \tan \angle BAF = (2 - \sqrt{3})AF = \frac{\sqrt{3}CF}{3} \times (2 - \sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}CF,$$

在 $\text{Rt}\triangle CDF$ 中, $\angle D = 45^\circ$,

$$\therefore DF = AD + AF = 10 + \frac{\sqrt{3}CF}{3} = CF,$$

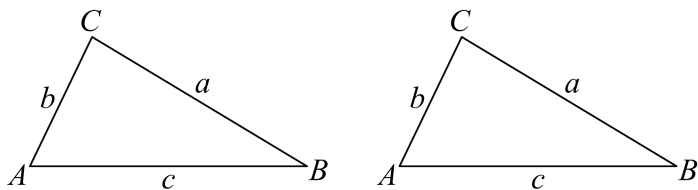
$$\therefore DF = CF = 15 + 5\sqrt{3},$$

$$\therefore BF = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}CF = \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \times (15 + 5\sqrt{3}) = 5\sqrt{3} - 5,$$

$$\therefore BC = CF - BF = (15 + 5\sqrt{3}) - (5\sqrt{3} - 5) = 20,$$

即大树 BC 的高度为 20m.

23. 如图所示, 已知 ABC 的三边分别为 a, b, c ,



(1) 如果 $\angle A = 2\angle B$, 求证: $a^2 = b^2 + bc$;

(2) 如果 $a^2 = b^2 + bc$, 求证: $\angle A = 2\angle B$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了相似三角形的判定与性质、等腰三角形的性质、三角形外角的定义与性质等知识, 正确作出辅助线, 构造相似三角形是解题关键.

(1) 延长 CA 至 D , 使得 $AD = AB$, 连接 BD , 利用“两角对应相等, 两个三角形相似”证明 $\triangle CAB \sim \triangle CBD$, 结合相似三角形的性质即可证明结论;

(2) 延长 CA 至 D , 使得 $AD = AB$, 连接 BD , 利用“两边对应成比例且夹角相等, 两个三角形相似”证明 $\triangle CAB \sim \triangle CBD$, 进而可得 $\angle ABC = \angle D$, 再证明 $\angle D = \angle ABD$, 结合三角形外角的性质即可证明结论.

【小问 1 详解】

证明: 如图 1, 延长 CA 至 D , 使得 $AD = AB$, 连接 BD ,

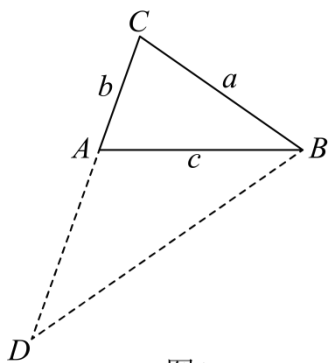


图1

则有 $\angle D = \angle ABD$,

$$\therefore \angle CAB = \angle D + \angle ABD = 2\angle D,$$

$$\therefore \angle CAB = 2\angle ABC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle D,$$

$$\text{又} \because \angle C = \angle C,$$

$$\therefore \triangle CAB \sim \triangle CBD,$$

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{BC}{DC} = \frac{BC}{AC+AD}, \text{ 即 } \frac{b}{a} = \frac{a}{b+c},$$

$$\therefore a^2 = b^2 + bc;$$

【小问2详解】

证明：如图1，延长CA至D，使得AD=AB，连接BD，

$$\therefore a^2 = b^2 + bc,$$

$$\therefore a^2 = b(b+c), \text{ 即 } \frac{b}{a} = \frac{a}{b+c},$$

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{BC}{DC},$$

$$\text{又} \because \angle C = \angle C,$$

$$\therefore \triangle CAB \sim \triangle CBD,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle D,$$

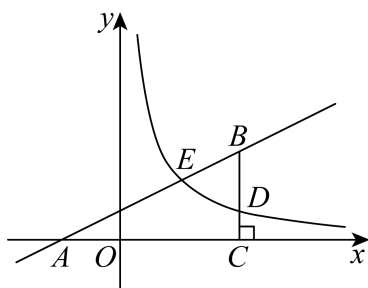
$$\text{又} \because AD = AB,$$

$$\therefore \angle D = \angle ABD,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle D + \angle ABD = 2\angle D = 2\angle ABC,$$

$$\text{即 } \angle A = 2\angle B.$$

24. 已知Rt△ABC在直角坐标系内的位置如图所示， $\angle ACB = 90^\circ$ ，双曲线 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 与边BC交于点D(4,1)，与边AB交于点E(2, n)， $\angle BAC$ 的正切值为 $\frac{1}{2}$ 。



(1) 求n的值;

(2) 连接DE，求直线AB的表达式与△BDE的面积;

(3) 设直线AB与y轴交于点F，点P在射线FD上，连接EO，如果△AEO与△EFP相似，试求点P

的坐标.

【答案】(1) 2;

(2) 2;

(3) $P\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

【解析】

【分析】(1) 先利用点 D 在双曲线上求出 k 的值, 再将点 E 代入双曲线解析式求出 n .

(2) 先设出点 A 、 C 的坐标, 根据 $\tan\angle BAC$ 的值和点 B 、 E 在直线 AB 上, 求出直线 AB 的解析式, 进而得到点 B 坐标, 最后计算 $\triangle BDE$ 的面积.

(3) 先求出点 F 坐标, 得到直线 FD 的解析式, 设出点 P 坐标, 根据相似三角形的性质分情况讨论求出点 P 坐标.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 双曲线 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 过点 $D(4, 1)$,

$$\therefore k = 4 \times 1 = 4,$$

$$\therefore \text{双曲线解析式为 } y = \frac{4}{x},$$

$\because$ 点 $E(2, n)$ 在双曲线上,

$$\therefore n = \frac{4}{2} = 2;$$

【小问 2 详解】

解: 设 $A(a, 0)$,

$$\therefore D(4, 1),$$

$$\therefore C(4, 0), \text{ 则 } AC = 4 - a,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \tan\angle BAC = \frac{1}{2}, B(4, b),$$

$$\therefore \frac{b}{4-a} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } b = \frac{4-a}{2},$$

设直线 AB 的解析式为 $y = mx + c$,

$$\because \text{直线 } AB \text{ 过 } E(2, 2), A(a, 0), B\left(4, \frac{4-a}{2}\right),$$

$$\therefore \begin{cases} 2m+c=2 \\ am+c=0 \\ 4m+c=\frac{4-a}{2} \end{cases},$$

由 $2m+c=2$ 和 $am+c=0$, 可得 $m=\frac{2}{2-a}$, $c=\frac{-2a}{2-a}$,

代入 $4m+c=\frac{4-a}{2}$, 解得 $a=-2$,

$\therefore A(-2,0)$, $m=\frac{1}{2}$, $c=1$,

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x+1$,

当 $x=4$ 时, $y=\frac{1}{2}\times 4+1=3$,

$\therefore B(4,3)$,

$\therefore D(4,1)$, $E(2,2)$,

$\therefore BD=3-1=2$, 点 E 到 BD ($x=4$) 的距离为 $4-2=2$,

$\therefore S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$;

【小问 3 详解】

解: 在 $y=\frac{1}{2}x+1$ 中, 令 $x=0$, 则 $y=1$,

$\therefore F(0,1)$,

$\therefore D(4,1)$,

$\therefore$ 直线 FD 的解析式为 $y=1$,

设 $P(t,1)$,

$\therefore A(-2,0)$, $E(2,2)$, $O(0,0)$, $F(0,1)$,

$\therefore AE=\sqrt{(2+2)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{5}$, $EO=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$, $EF=\sqrt{(2-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$,

$FP=|t-0|=|t|$,

分两种情况:

① 当 $\triangle AEO \sim \triangle EFP$ 时, $\frac{AE}{EF}=\frac{EO}{FP}$,

$$\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2}}{|t|},$$

$$2 = \frac{2\sqrt{2}}{|t|},$$

$$|t| = \sqrt{2},$$

∵ 点 P 在射线 FD 上,

$$\therefore t > 0,$$

$$\therefore t = \sqrt{2},$$

$$\therefore P(\sqrt{2}, 1);$$

② 当 $\triangle AEO \sim \triangle PFE$ 时,

$$\therefore \frac{AE}{FP} = \frac{EO}{EF},$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{|t|} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}},$$

$$2\sqrt{2}|t| = 10,$$

$$|t| = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

∵ 点 P 在射线 FD 上,

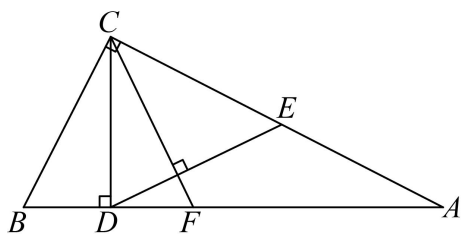
$$\therefore t > 0,$$

$$\therefore t = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

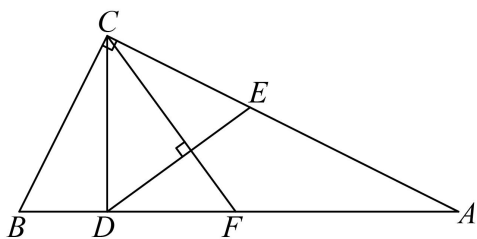
$$\therefore P\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, 1\right).$$

【点睛】 本题主要考查了反比例函数、一次函数的性质，相似三角形的判定与性质，熟练掌握函数图象上点的坐标特征以及相似三角形的性质是解题的关键.

25. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$, 垂足为 D , 且 $AD > BD$, 点 E 是边 AC 上一动点 (点 E 不与点 A 、点 C 重合), 连接 DE , 过点 C 作 $CF \perp DE$, 交线段 ED 于点 G , 交线段 AD 于点 F .



图①



图②

(1) 如图①, 求证: $CD \cdot BC = BF \cdot CE$.

(2) 如图②, 若 $FC = FB$, $BD = 2$, $CD = 3$, 求 $\triangle DCE$ 的面积.

(3) 若 $BD = 3$, $CD = 4$, 连接 EF , 且 $\triangle EFG$ 与 $\triangle CDG$ 相似, 请直接写出 CE 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{54}{13}$

(3) CE 的长为 $\frac{-15+5\sqrt{73}}{8}$ 或 4.

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle DCE \sim \triangle FBC$, 对应边成比例即可解决问题;

(2) 由 $\triangle DCE \sim \triangle FBC$; $BF = CF$, 可得 $CD = DE = 2$, 设 $BF = CF = m$, 则 $DF = BF - BD = m - 2$, 可得 $(m - 2)^2 + 2^2 = m^2$, 即可解得 $BF = CF$, $DF = m - 2$, 求出 DG , CG ; 由三角形面积公式即可解决问题;

(3) $\triangle EFG$ 与 $\triangle CDG$ 相似, 只需 $\angle CDG = \angle FEG$ 或 $\angle CDG = \angle EFG$, 分两种情况讨论: ①当 $\angle CDG = \angle FEG$ 时, ②当 $\angle CDG = \angle EFG$ 时, 根据相似三角形的判定与性质即可解决问题.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$,

$$\therefore \angle B = 90^\circ - \angle BCD = \angle DCE,$$

$\because CD \perp AB$, $CF \perp DE$,

$$\therefore \angle BFC = 90^\circ - \angle FDE = \angle CDE,$$

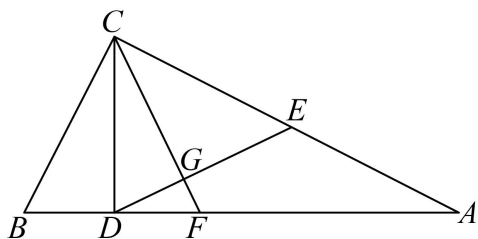
$$\therefore \triangle DCE \sim \triangle FBC,$$

$$\therefore \frac{CE}{BC} = \frac{CD}{BF}$$

$$\therefore CD \cdot BC = BF \cdot CE$$

【小问 2 详解】

解: 如图:



由 (1) 知 $\triangle DCE \sim \triangle FBC$,

$$\therefore \frac{DE}{CF} = \frac{CD}{BF}$$

$$\because BF = CF,$$

$$\therefore CD = DE = 3,$$

设 $BF = CF = m$, 则 $DF = BF - BD = m - 2$,

在 $Rt\triangle CDF$ 中, $DF^2 + CD^2 = CF^2$,

$$\therefore (m-2)^2 + 3^2 = m^2,$$

$$\text{解得 } m = \frac{13}{4}$$

$$\therefore BF = CF = \frac{13}{4}, \quad DF = m - 2 = \frac{5}{4}$$

$$\because 2S_{\triangle CDF} = CD \cdot DF = CF \cdot DG,$$

$$\therefore 3 \times \frac{5}{4} = \frac{13}{4} DG,$$

$$\therefore DG = \frac{15}{13}$$

$$\therefore CG = \sqrt{CD^2 - DG^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{15}{13}\right)^2} = \frac{36}{13}$$

$$\therefore S_{\triangle DCE} = \frac{1}{2} DE \cdot CG = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{36}{13} = \frac{54}{13}$$

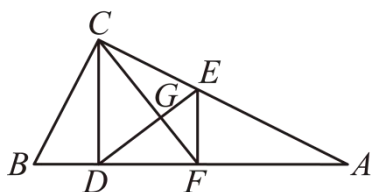
$$\therefore \triangle DCE \text{ 的面积为 } \frac{54}{13};$$

【小问 3 详解】

解: $\because \angle CGD = \angle EGF$,

$\therefore \triangle EFG$ 与 $\triangle CDG$ 相似, 只需 $\angle CDG = \angle FEG$ 或 $\angle CDG = \angle EFG$,

①当 $\angle CDG = \angle FEG$ 时, 此时如图: $EF \parallel CD$,



$$\because BD=3, \quad CD=4, \quad CD \perp AB,$$

$$\therefore BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\because \angle B = 90^\circ - \angle BCD = \angle ACD, \quad \angle BDC = 90^\circ = \angle DCA,$$

$$\therefore \triangle BDC \sim \triangle CDA,$$

$$\therefore \frac{BD}{CD} = \frac{CD}{AD} = \frac{BC}{AC}$$

$$\therefore \frac{3}{4} = \frac{4}{AD} = \frac{5}{AC}$$

$$\therefore AD = \frac{16}{3}, \quad AC = \frac{20}{3}$$

$$\because EF \parallel CD$$

$$\therefore \frac{DF}{AD} = \frac{CE}{AC}$$

$$\therefore \frac{DF}{\frac{16}{3}} = \frac{CE}{\frac{20}{3}}$$

$$\therefore DF = \frac{4}{5}CE$$

$$\text{设 } CE = x, \text{ 则 } DF = \frac{4}{5}x$$

$$\text{由 (1) 知: } \triangle DCE \sim \triangle FBC,$$

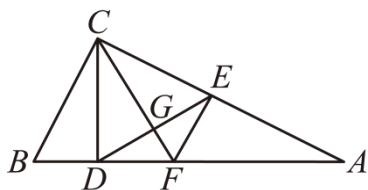
$$\therefore \frac{CE}{BC} = \frac{CD}{BF}$$

$$\therefore \frac{x}{5} = \frac{4}{3 + \frac{4}{5}x}$$

$$\text{解得: } x = \frac{-15 + 5\sqrt{73}}{8} \text{ (负值舍去)}$$

$$\therefore CE = \frac{-15 + 5\sqrt{73}}{8};$$

②当 $\angle CDG = \angle EFG$ 时, 如图:



$$\because CF \perp DE, \quad CD \perp AB,$$

$$\therefore \angle CDG = 90^\circ - \angle GDF = \angle DFG,$$

$$\therefore \angle EFG = \angle DFG,$$

$$\because \angle DGF = 90^\circ = \angle EGF, \quad GF = GF,$$

$$\therefore \triangle DGF \cong \triangle EGF \text{ (ASA)},$$

$$\therefore DG = EG,$$

$$\therefore CF \text{ 是 } DE \text{ 的垂直平分线},$$

$$\therefore CE = CD = 4,$$

综上所述, CE 的长为 $\frac{-15+5\sqrt{73}}{8}$ 或 4.

【点睛】 本题考查相似三角形的综合应用、勾股定理、全等三角形的判定及性质以及直角三角形的性质, 掌握相似三角形判定定理和分类讨论思想的应用是解题的关键.