

上海市张江集团中学 2025-2026 学年第一学期

九年级 12 月考·数学试卷

(时间: 100 分钟, 满分: 150 分) 阶段练习二

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列各组图形中, 一定相似的是 ()

- A. 两个菱形 B. 两个正方形 C. 两个三角形 D. 两个等腰三角形

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查的是相似图形, 根据相似图形的定义解答即可.

【详解】 解: A、两个菱形的对应角不一定相等, 故两个菱形不一定相似, 不符合题意;

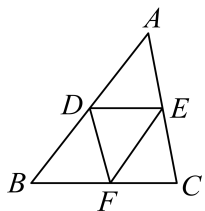
B、两个正方形一定相似, 符合题意;

C、两个三角形不一定相似, 不符合题意;

D、两个等腰三角形不一定相似, 不符合题意,

故选: B.

2. 已知: 如图, $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 、 F 分别在边 AB 、 AC 和 BC 上, 下列条件能判定 $DE \parallel AB$ 的是 ()



- A. $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$ B. $\frac{CE}{EA} = \frac{CF}{FB}$ C. $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$ D. $\frac{BD}{DA} = \frac{BF}{FC}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查平行线分线段成比例定理. 利用平行线分线段成比例定理判断即可.

【详解】 解: A、 $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$, 不能判断 $DE \parallel BC$, 本选项不符合题意;

B、 $\frac{CE}{EA} = \frac{CF}{FB}$, 可以判断 $EF \parallel AB$, 不能判断 $DE \parallel BC$, 本选项不符合题意;

C、 $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$, 即 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, 能判断 $DE \parallel BC$, 本选项符合题意;

D、 $\frac{BD}{DA} = \frac{BF}{FC}$ ，可以判断 $DF \parallel AC$ ，不能判断 $DE \parallel BC$ ，本选项不符合题意；

故选：C.

3. 二次函数 $y = ax^2 - 2$ ($a \neq 0$) 图象的顶点坐标是 ()

A. (2,0)

B. (-2,0)

C. (0,2)

D. (0,-2)

【答案】D

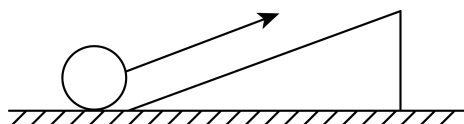
【解析】

【分析】本题主要考查二次函数的性质，在 $y = a(x-h)^2 + k$ 中，顶点坐标为 (h, k) 。据二次函数的性质可得抛物线开口方向、对称轴方程和顶点坐标，从而得出答案。

【详解】解：二次函数 $y = ax^2 - 2$ ($a \neq 0$) 的图象的顶点坐标是 $(0, -2)$ ，

故选：D.

4. 如图，一个小球由地面沿着坡度 $i = 1:2$ 的坡面向上前进 $2\sqrt{5}$ m，此时小球距离地面的高度为 ()



A. 5m

B. $2\sqrt{5}$ m

C. 2m

D. $\frac{10}{3}$ m

【答案】C

【解析】

【分析】可利用勾股定理及所给的比值得到所求的线段长。

【详解】解： $\because AB = 2\sqrt{5}$ m, $\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$.

$\therefore$ 设 $BC = x$, $AC = 2x$,

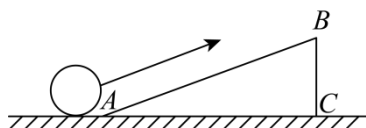
由勾股定理得, $AB^2 = AC^2 + BC^2$,

即 $(2\sqrt{5})^2 = x^2 + 4x^2$,

解得: $x = 2$,

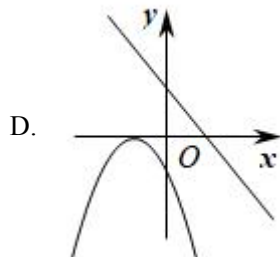
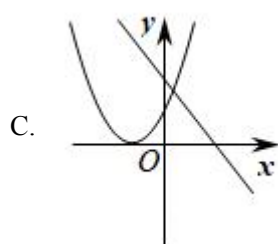
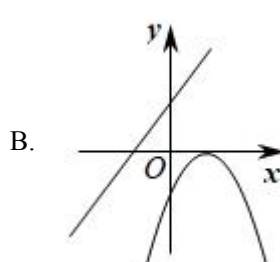
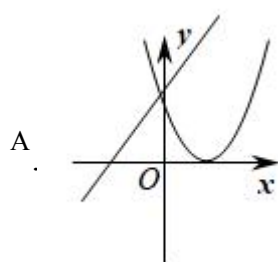
故小球距离地面的高度为 2m.

故选 C.



【点睛】本题主要考查了解直角三角形的应用，能从实际问题中整理出直角三角形是解答本题的关键。

5. 在同一直角坐标系中，一次函数 $y = kx + b$ 和二次函数 $y = k(x + b)^2$ 的图象大致可能为 ()



【答案】D

【解析】

本卷由「公众号：指尖上海」整理制作，小编微信：Leier19941118

【分析】先判断二次函数与 x 轴交于 $(-b, 0)$ ，再根据一次函数的经过的象限判断 k 和 b 的正负，通过 k 和 b 的正负判断二次函数的开口方向和与 x 轴的交点位置即可求解.

【详解】解：由 $y = k(x + b)^2$ 可知二次函数图象与 x 轴交于 $(-b, 0)$

观察选项 A 和选项 B 的一次函数经过一二三象限，可得 $k > 0$ ， $b > 0$

若 $k > 0$ ， $b > 0$ ，则二次函数 $y = k(x + b)^2$ 开口方向向上，与 x 轴的交点在负半轴，故选项 A 和选项 B 错误；

观察选项 C 和选项 D 的一次函数经过一二四象限，可得 $k < 0$ ， $b > 0$

若 $k < 0$ ， $b > 0$ ，则二次函数 $y = k(x + b)^2$ 开口方向向下，与 x 轴的交点在负半轴，故选项 C 错误，选项 D 正确.

故选：D.

【点睛】本题主要考查一次函数与反比例函数的图象的综合题，熟知一次函数图象与系数的关系，和二次函数图象与系数的关系是解题的关键.

6. 对于命题：①一个圆上所有的点都在另一个圆的外部，那么这两个圆外离；②一个圆上所有的点都在另一个圆的内部，那么这两个圆内含. 下列说法正确的是 ()

A. ①正确②错误

B. ①错误②正确

C. ①和②都正确

D. ①和②都错误

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了命题的判断，圆与圆的位置关系，掌握命题的定义及分类并能运用所学知识判断命题的真假是解题的关键．根据圆与圆的位置关系判断即可．

【详解】 解：①一个圆上所有的点都在另一个圆的外部，那么这两个圆外离或内含，①错误；

②一个圆上所有的点都在另一个圆的内部，那么这两个圆内含，②正确．

故选： B．

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ ，那么 $\frac{2a}{a-b}$ 的值为_____．

【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了比例的性质，由已知比例设参数，代入所求表达式化简计算即可．

【详解】 解： $\because \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ ，

$\therefore$ 设 $a = 3k$ ， $b = 2k$ ($k \neq 0$)，

$\therefore \frac{2a}{a-b} = \frac{2 \times 3k}{3k-2k} = \frac{6k}{k} = 6$ ．

故答案为 6．

8. 已知 ABC 与 $\triangle DEF$ 的相似比为 $3:2$ ， ABC 的周长为 24，则 $\triangle DEF$ 的周长为_____．

【答案】 16

【解析】

【分析】 本题主要考查了相似三角形的性质，相似三角形的周长之比等于相似比，据此求解即可．

【详解】 解： $\because ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的相似比为 $3:2$ ，

$\therefore ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的周长比为 $3:2$ ，

$\therefore ABC$ 的周长为 24，

$\therefore \triangle DEF$ 的周长为 16，

故答案为： 16．

9. 已知抛物线 $y = (m-2)x^2 - 3x - 1$ 的开口向上，那么 m 的取值范围是_____．

【答案】 $m > 2$

【解析】

【分析】 本题考查了抛物线的性质；根据抛物线 $y = (m-2)x^2 - 3x - 1$ 的开口向上，得到 $m-2 > 0$ ，计算即可.

【详解】 $\because$ 抛物线 $y = (m-2)x^2 - 3x - 1$ 的开口向上，

$$\therefore m-2 > 0,$$

解得 $m > 2$,

故答案为: $m > 2$.

10. 在等腰 ABC 中, $AB = AC$, 如果 $AB:BC = 3:2$, 那么 $\cos \angle ABC$ 的值是_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 利用等腰三角形的性质, 设 $AB = AC = 3k$, $BC = 2k$, 作底边上的高, 构造直角三角形, 利用余弦定义求解.

本题考查了等腰三角形的性质, 余弦函数, 熟练掌握性质和定义是解题的关键.

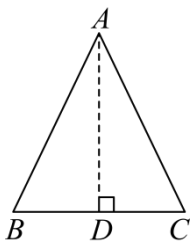
【详解】 解: 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D , 如图,

由 $AB:BC = 3:2$,

设 $AB = AC = 3k$, $BC = 2k$

$\because AB = AC$, $AD \perp BC$,

$$\therefore BD = DC = \frac{1}{2}BC = k,$$



在 $\text{Rt} \triangle ABD$ 中, $\cos \angle ABC = \frac{BD}{AB} = \frac{k}{3k} = \frac{1}{3}$,

故答案为: $\frac{1}{3}$.

11. 将抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 向左平移 3 个单位长度, 再向下平移 2 个单位长度后, 得到抛物线解析式为_____.

【答案】 $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$

【解析】

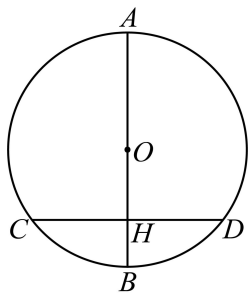
【分析】 此题主要考查了二次函数图象与几何变换, 根据“左加右减、上加下减”的原则进行解答即可. 熟

练掌握平移的规律是解题的关键.

【详解】解: 将抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 向左平移 3 个单位长度得到 $y = \frac{1}{2}(x+3)^2$, 再向下平移 2 个单位长度得到 $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$,

故答案为: $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$.

12. 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, C 、 D 是 $\odot O$ 上的两点, 且 $AB \perp CD$, 垂足为点 H , 如果 $AH = CD = 8$, 那么 AO 的长为_____.



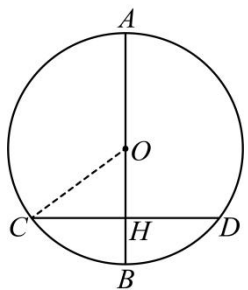
【答案】5

【解析】

【分析】本题考查垂径定理, 勾股定理. 利用垂径定理求出 $CH = \frac{1}{2}CD = 4$ 是解题的关键.

连接 OC , 根据 $AB \perp CD$, $AH = CD = 8$, 得到 $\angle OHC = 90^\circ$, $CH = \frac{1}{2}CD = 4$, 设 $AO = OC = x$, 则 $OH = AH - AO = 8 - x$, 再根据勾股定理求解即可.

【详解】解: 如图, 连接 OC ,



$\because AB \perp CD$, $AH = CD = 8$,

$\therefore \angle OHC = 90^\circ$, $CH = \frac{1}{2}CD = 4$,

设 $AO = OC = x$, 则 $OH = AH - AO = 8 - x$,

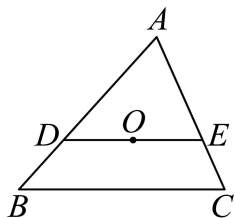
由勾股定理, 得 $x^2 = 4^2 + (8 - x)^2$,

解得: $x = 5$,

$$\therefore AO = 5$$

故答案为：5.

13. 如图，已知点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，过点 O 作 $DE \parallel BC$ ，分别交 AB 、 AC 于点 D 、 E ，如果设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ 那么用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{DE} =$ _____.

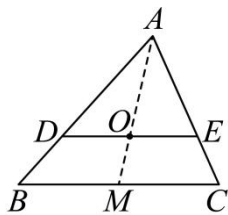


【答案】 $\frac{2}{3}(\vec{a} - \vec{b})$

【解析】

【分析】 本题考查三角形重心的性质，相似三角形的判定与性质，向量的线性运算. 熟练掌握三角形重心的性质和相似三角形的性质是解题的关键. 连接 CO 并延长交 AB 于点 M ，根据重心的性质可得 $\frac{AO}{AM} = \frac{2}{3}$ ，根据相似三角形的性质可得 $DE = \frac{2}{3}AB$ ，进而根据向量的计算可得 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ ，即可求解.

【详解】 解：如图，连接 CO 并延长交 AB 于点 M ，



$\because$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore \frac{AO}{AM} = \frac{2}{3}$$

又 $\because DE \parallel BC$ ，

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{CO}{AM} = \frac{2}{3}, \text{ 即 } DE = \frac{2}{3}AB$$

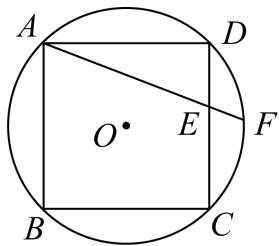
$$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b},$$

$$\text{则 } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}.$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{2}{3}(\vec{a} - \vec{b}).$$

$$\text{故答案为: } \frac{2}{3}(\vec{a} - \vec{b}).$$

14. 如图, 已知 $\odot O$ 的内接正方形 $ABCD$, 点 F 是 $\widehat{CD}$ 的中点, AF 与边 DC 交于点 E , 那么 $\frac{EF}{AE} = \underline{\hspace{2cm}}$.

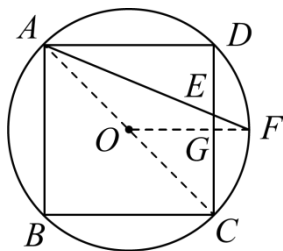


【答案】 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

【解析】

【分析】连接 OF , 交 CD 于点 G , 连接 AC , 根据题意得出 $GF \parallel AD$, 设 $AD = a$, 则 $AC = \sqrt{2}AD = \sqrt{2}a$, 证明 $\triangle ADE \sim \triangle FGE$, 根据相似三角形的性质即可求解.

【详解】解: 如图所示, 连接 OF , 交 CD 于点 G , 连接 AC ,



$\because \odot O$ 的内接正方形 $ABCD$,

$\therefore AC$ 经过点 O ,

$\because$ 点 F 是 $\widehat{CD}$ 的中点,

$\therefore OF \perp CD$, $GD = GC$

$\therefore GF \parallel AD$

设 $AD = a$, 则 $AC = \sqrt{2}AD = \sqrt{2}a$

$\therefore OF = OC = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

$\because OG = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}a$,

$\therefore FG = OF - OG = \frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{1}{2}a$

$\because GF \parallel AD$,

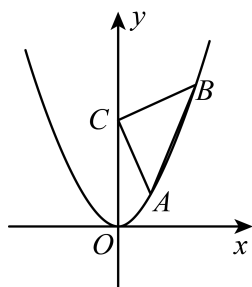
$\therefore \triangle ADE \sim \triangle FGE$

$$\therefore \frac{EF}{AE} = \frac{GF}{AD} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)a}{a} = \frac{\sqrt{2}-1}{2},$$

故答案为： $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

【点睛】 本题考查了正多边形与圆，垂径定理，正方形的性质，相似三角形的性质，证明 $\triangle ADE \sim \triangle FGE$ 是解题的关键.

15. 如图，在等腰直角三角形 ABC 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 A 、 B 在抛物线 $y = x^2$ 上，点 C 在 y 轴上， A 、 B 两点的横坐标分别为 1 和 b ($b > 1$)， b 的值为_____.

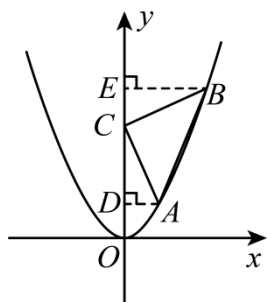


【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数图象上点的坐标特征，等腰直角三角形的性质，坐标与图形，全等三角形的判定与性质，利用“ k 型全等”求得 B 点的坐标，代入 $y = x^2$ 即可求解，构造全等三角形解题是关键.

【详解】 解：过 B 作 $BE \perp y$ 轴于 E ，过 A 作 $AD \perp y$ 轴于 D ，



在等腰直角三角形 ABC 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，则 $AC = BC$ ，

$\therefore A$ 、 B 两点的横坐标分别为 1 和 b ($b > 1$)，

$\therefore AD = 1$ ， $BE = b$ ，

$\therefore$ 点 A 、 B 在抛物线 $y = x^2$ 上，

$\therefore A(1,1)$ ， $B(b, b^2)$ ，

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle BCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle CAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle CAD,$$

$$\therefore \triangle BEC \cong \triangle CDA(\text{AAS}),$$

$$\therefore CE = AD = 1, \quad CD = BE = b,$$

$$\therefore OE = OD + CD + CE = 1 + b + 1 = 2 + b,$$

$$\therefore b^2 = 2 + b,$$

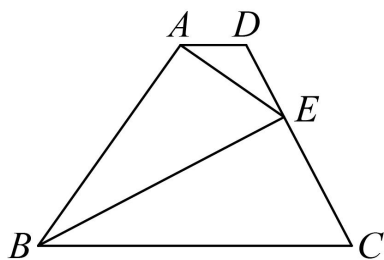
$$\text{整理 } b^2 - b - 2 = 0,$$

$$\text{解得: } b = 2 \text{ 或 } -1 \text{ (舍去),}$$

$$\therefore b \text{ 的值为 } 2,$$

故答案为: 2.

16. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 过点 A 作 AB 的垂线, 与边 CD 相交于点 E , 联结 BE . 如果 $\tan C = \tan \angle AEB = 2$, 且 $AD = \sqrt{5}$, 那么 CE 的长是_____.

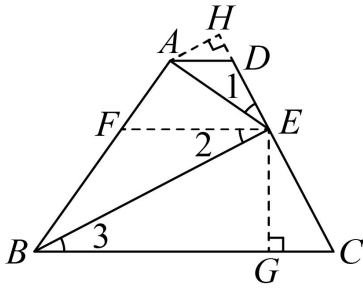


【答案】 5

【解析】

【分析】过点 E 作 $EF \parallel BC$ 交 AB 于点 F , 作 $EG \perp BC$ 于点 G , 过点 A 作 $AH \perp CD$ 交 CD 的延长线于点 H , 根据 $AD \parallel BC$ 可得 $\angle ADH = \angle C$, 则 $\tan \angle ADH = 2$, 在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中解直角三角形可得 $DH = 1$, $AH = 2$, 在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, 根据 $\tan \angle AEB = \frac{AB}{AE} = 2$, 设 $AE = a$, 则 $AB = 2a$, $BE = \sqrt{5}a$, 根据 $\tan C = \tan \angle AEB = 2$ 可得 $\angle C = \angle AEB$, 根据 $EF \parallel BC$ 可得 $\angle DEF = \angle C = \angle AEB$, $\angle 2 = \angle 3$, 据此可得 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$, 由此可判定 $\triangle AEH \sim \triangle EBG$, 利用相似三角形的性质可得 $EG = 2\sqrt{5}$, 然后在 $\text{Rt}\triangle ECG$ 中解直角三角形即可得出 CE 的长.

【详解】解: 如图, 过点 E 作 $EF \parallel BC$ 交 AB 于点 F , 作 $EG \perp BC$ 于点 G , 过点 A 作 $AH \perp CD$ 交 CD 的延长线于点 H ,



$$\therefore \angle H = \angle EGB = \angle EGC = 90^\circ,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADH = \angle C,$$

$$\because \tan C = \tan \angle AEB = 2,$$

$$\therefore \tan \angle ADH = 2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADH \text{ 中, } \tan \angle ADH = \frac{AH}{DH} = 2,$$

$$\therefore AH = 2DH,$$

$$\because AD = \sqrt{5},$$

由勾股定理可得:

$$AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = \sqrt{(2DH)^2 + DH^2} = \sqrt{5}DH = \sqrt{5},$$

$$\therefore DH = 1,$$

$$\therefore AH = 2DH = 2,$$

$$\because AE \perp AB,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABE \text{ 中, } \tan \angle AEB = \frac{AB}{AE} = 2,$$

$$\text{设 } AE = a, \text{ 则 } AB = 2a,$$

由勾股定理可得:

$$BE = \sqrt{AE^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}a,$$

$$\because \tan C = \tan \angle AEB = 2,$$

$$\therefore \angle C = \angle AEB,$$

$$\because EF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle C = \angle AEB, \quad \angle 2 = \angle 3,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle AEF = \angle AEF + \angle 2,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3,$$

又 $\because \angle H = \angle EGB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle AEH \sim \triangle EBG$,

$$\therefore \frac{AH}{EG} = \frac{AE}{BE},$$

$$\therefore \frac{2}{EG} = \frac{a}{\sqrt{5}a},$$

$$\therefore EG = 2\sqrt{5},$$

在 $\text{Rt}\triangle ECG$ 中, $\tan C = \frac{EG}{CG} = 2$,

$$\therefore CG = \frac{EG}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5},$$

由勾股定理可得:

$$CE = \sqrt{EG^2 + CG^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2} = 5,$$

故答案为: 5.

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的判定与性质, 解直角三角形的相关计算, 平行线的性质, 勾股定理, 锐角三角函数的定义等知识点, 熟练掌握相关知识点并能加以综合运用是解题的关键.

17. 对于一个二次函数 $y = a(x-m)^2 + k$ ($a \neq 0$) 中存在一点 $P(x', y')$, 使得 $x' - m = y' - k \neq 0$, 则称

$2|x' - m|$ 为该抛物线的“开口大小”, 那么抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + 3$ “开口大小”为_____.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查新定义运算与二次函数综合, 涉及二次函数性质、分式化简求值等知识, 读懂题意, 理

解新定义抛物线的“开口大小”, 利用二次函数图象与性质将一般式化为顶点式得到 $-\frac{1}{2} = \frac{1}{x' - \frac{1}{3}}$, 按照定

义求解即可得到答案, 熟记二次函数图象与性质、理解新定义是解决问题的关键.

【详解】 解: 根据抛物线的“开口大小”的定义可知 $y - k = a(x - m)^2$ 中存在一点 $P(x', y')$, 使得

$$x' - m = y' - k \neq 0, \text{ 则 } a = \frac{y' - k}{(x' - m)^2} = \frac{1}{x' - m},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + 3$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) + 3$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) + 3$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{18} + 3$$

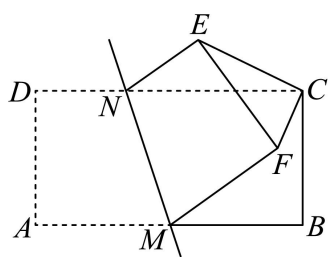
$$= -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{55}{18},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + 3 \text{ 中存在一点 } P(x', y'), \text{ 有 } -\frac{1}{2} = \frac{1}{x' - \frac{1}{3}}, \text{ 解得 } x' - \frac{1}{3} = -2, \text{ 则 } 2\left|x' - \frac{1}{3}\right| = 4,$$

$$\therefore \text{抛物线 } y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + 3 \text{ “开口大小” 为 } 4,$$

故答案为：4.

18. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $BC = 3$ ，点 M 是 AB 的中点，点 N 是 CD 边上的动点（不与端点重合），如果把四边形 $AMND$ 沿直线 MN 翻折，得到四边形 $EFMN$ （点 E 、 F 分别与点 D 、 A 对应），连接 EC 、 FC ，当 $EC \perp FC$ 时， $\triangle ECF$ 的周长为_____.



【答案】 $\frac{15+9\sqrt{5}}{5}$

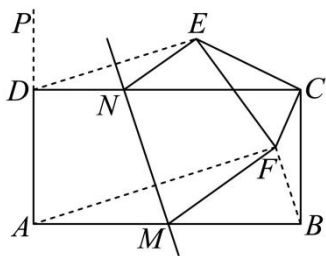
【解析】

本卷由「公众号：指尖上海」整理制作，小编微信：Leier19941118

【分析】如图：延长 AD 到任意一点 P ，连接 BF 、 AF 、 DE ，由矩形的性质得 $DC = AB = 6$ ， $AD = BC = 3$ ，由点 M 是 AB 的中点得 $AM = BM$ ，由翻折得 MN 垂直平分 DE ， MN 垂直平分 AF ， $FE = AD = 3$ ，则 $DE \parallel AF$ ，所以 $\angle EDP = \angle FAP$ ，可证明 $\angle CDE = \angle BAF$ ，由 $FM = AM = BM$ ，推导出 $\angle BAF + \angle ABF = 90^\circ$ ，而 $\angle CBF + \angle ABF = 90^\circ$ ，所以 $\angle CBF = \angle BAF$ ，则 $\angle CBF = \angle CDE$ ，因为 $\angle FCE = \angle BCD = 90^\circ$ ，所以 $\angle BCF = \angle DCE = 90^\circ - \angle DCF$ ，则 $\triangle BCF \sim \triangle DCE$ ，所以 $\frac{CF}{CE} = \frac{BC}{DC} = \frac{1}{2}$ ，则 $CE = 2CF$ ，由 $FE = \sqrt{CF^2 + CE^2} = \sqrt{5}CF = 3$ 可得 $CF = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ ，则 $CE = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ ，所以

$$FE + CF + CE = \frac{15 + 9\sqrt{5}}{5}, \text{ 据此即可解答.}$$

【详解】解：如图：延长 AD 到任意一点 P ，连接 BF 、 AF 、 DE ，



∵ 矩形 $ABCD$ 中, $AB=6$, $BC=3$, 点 M 是 AB 的中点,

$$\therefore DC \parallel AB, DC = AB = 6, AD = BC = 3, AM = BM, \angle ABC = \angle BCD = 90^\circ,$$

∴ 把四边形 $AMND$ 沿直线 MN 翻折, 得到四边形 $EFMN$.

$\therefore$ 点 E 与点 D 关于直线 MN 对称, 点 F 与点 A 关于直线 MN 对称, $FE = AD = 3$,

$\therefore MN$ 垂直平分 DE , MN 垂直平分 AF ,

$$\therefore DE \parallel AF,$$
$$\therefore \angle EDP = \angle FAP,$$
$$\therefore \angle CDP = \angle BAP,$$
$$\therefore \angle CDP - \angle EDP = \angle BAP - \angle FAP,$$
$$\therefore \angle CDE = \angle BAF,$$
$$\therefore FM = AM = BM,$$
$$\therefore \angle BAF = \angle MFA, \quad \angle ABF = \angle MFB.$$
$$\therefore \angle BAF + \angle ABF = \angle MFA + \angle MFB = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ,$$
$$\therefore \angle CBF + \angle ABF = 90^\circ,$$
$$\therefore \angle CBF = \angle BAF,$$
$$\therefore \angle CBF = \angle CDE,$$
$$\therefore EC \perp FC,$$
$$\therefore \angle FCE = 90^\circ,$$
$$\therefore \angle BCF = \angle DCE = 90^\circ - \angle DCF,$$
$$\therefore \triangle BCF \sim \triangle DCE,$$
$$\therefore \frac{CF}{CE} = \frac{BC}{DC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$
$$\therefore CE = 2CF,$$

$$\because FE = \sqrt{CF^2 + CE^2} = \sqrt{5}CF = 3,$$

$$\therefore CF = \frac{3\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore CE = 2CF = \frac{6\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore FE + CF + CE = 3 + \frac{3\sqrt{5}}{5} + \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{15 + 9\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \triangle ECF \text{ 的周长为 } \frac{15 + 9\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{15 + 9\sqrt{5}}{5}.$$

【点睛】 本题主要考查矩形的性质、翻折变换的性质、相似三角形的判定与性质、勾股定理、三角形的周长等知识点，正确地作出辅助线是解题的关键.

三、解答题：(本大题共 7 题，满分 78 分)

$$19. \text{ 计算: } \cos 30^\circ - 2\sin^2 45^\circ + \frac{2}{2\sin 60^\circ - \tan 45^\circ}.$$

$$\text{【答案】 } \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

【解析】

【分析】 本题考查特殊角的三角函数值，涉及二次根式混合运算、分母有理化等知识，熟记特殊角的三角函数值是解决问题的关键.

先由特殊角的三角函数值求出各部分，再由二次根式混合运算法则求解即可得到答案.

$$\text{【详解】 解: } \cos 30^\circ - 2\sin^2 45^\circ + \frac{2}{2\sin 60^\circ - \tan 45^\circ}$$

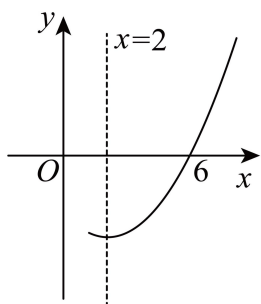
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{2}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \sqrt{3} + 1$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

20. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的部分图像如图所示，已知它与 x 轴的一个交点坐标是 $(6, 0)$ ，且对称轴是直线 $x = 2$ 。



(1) 填空：① a 与 b 的数量关系为： $b = \underline{\hspace{1cm}}$ ；② 图像与 x 轴的另一个交点坐标为 $\underline{\hspace{1cm}}$ 。

(2) 如果该函数图像经过点 $(0, -3)$ ，求它的顶点坐标。

【答案】 (1) ① $-4a$ ；② $(-2, 0)$

(2) $(2, -4)$

【解析】

【分析】 本题考查了求二次函数的解析式、二次函数的图像与性质，熟练掌握待定系数法和二次函数的对称性是解题关键。

(1) ① 根据二次函数的对称轴可得 $x = -\frac{b}{2a} = 2$ ，由此即可得；

② 根据二次函数的对称性求解即可得；

(2) 根据 (1) 可设二次函数的解析式为 $y = a(x-6)(x+2)$ ，将点 $(0, -3)$ 代入求出二次函数的解析式，再根据二次函数的解析式的顶点式求解即可得。

【小问 1 详解】

解：① $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴是直线 $x = 2$ ，

$$\therefore x = -\frac{b}{2a} = 2,$$

$$\therefore b = -4a,$$

故答案为： $-4a$ ；

② $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像与 x 轴的一个交点坐标是 $(6, 0)$ ，且对称轴是直线 $x = 2$ ，

$\therefore$ 图像与 x 轴的另一个交点坐标为 $(2 \times 2 - 6, 0)$ ，即为 $(-2, 0)$ ，

故答案为： $(-2, 0)$ 。

【小问 2 详解】

解： $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像与 x 轴的两个交点坐标是 $(6, 0)$ 和 $(-2, 0)$ ，

$\therefore$ 可设二次函数的解析式为 $y = a(x - 6)(x + 2)$ ，

$\because$ 这个函数图像经过点 $(0, -3)$ ，

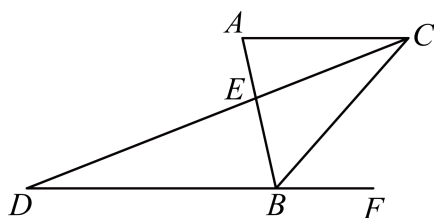
$\therefore (0 - 6) \times (0 + 2)a = -3$ ，

解得 $a = \frac{1}{4}$ ，

$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y = \frac{1}{4}(x - 6)(x + 2) = \frac{1}{4}(x - 2)^2 - 4$ ，

$\therefore$ 它的顶点坐标为 $(2, -4)$ 。

21. 如图， AB 与 CD 相交于点 E ， $AC \parallel BD$ ，点 F 在 DB 的延长线上，连接 BC ，如果 BC 平分 $\angle ABF$ ， $AE = 2$ ， $BE = 3$ 。



(1) 求 BD 的长；

(2) 设 $ED = a$ ， $\overrightarrow{EB} = \vec{b}$ ，用含 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示 $\overrightarrow{BC}$ 。

【答案】(1) 7.5

(2) $-\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$

【解析】

本卷由「公众号：指尖上海」整理制作，小编微信：Leier19941118

【分析】(1) 根据平行线的性质，三角形的相似判定和性质，角的平分线的定义，等腰三角形的判定，解答即可。

(2) 利用相似，和向量和计算即可。

【小问 1 详解】

解: $\because BC$ 平分 $\angle ABF$,

$$\therefore \angle ABC = \angle FBC,$$

$$\because AC \parallel BD,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle FBC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ABC,$$

$$\therefore AC = AB,$$

$$\because AE = 2, BE = 3,$$

$$\therefore AC = AB = 2 + 3 = 5,$$

$$\because AC \parallel BD,$$

$$\therefore \triangle ACE \sim \triangle BDE,$$

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BD},$$

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{5}{BD},$$

解得 $BD = 7.5$.

【小问 2 详解】

解: $\because AE = 2, BE = 3, AC \parallel BD$,

$$\therefore \triangle ACE \sim \triangle BDE,$$

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BD},$$

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{EC}{DE},$$

$$\because ED = a,$$

$$\therefore \overrightarrow{EC} = -\frac{2}{3}\vec{a},$$

$$\because \overrightarrow{EB} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} = -\vec{b},$$

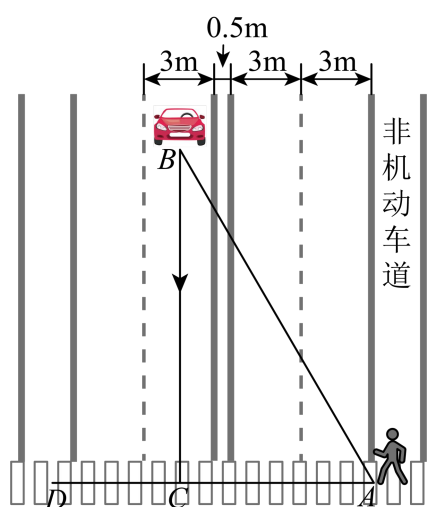
$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} = -\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}.$$

【点睛】 本题考查了平行线的性质, 三角形的相似判定和性质, 角的平分线的定义, 等腰三角形的判定, 向量的基本计算, 熟练掌握三角形相似的判定和性质, 向量的计算是解题的关键.

22. “彼此让一让，路宽心更宽”，斑马线前礼让行人是城市文明的一种具体体现，也是司机理应履行的一项法定义务，我市在锦惠路人民医院等路段设立了“礼让行人”交通标识. 某数学小组在老师的指导下对某路口的交通情况进行了如下探究.

问题情景：如图，某无红绿灯的路口有一行人从点 A 处出发，通过斑马线 AD 时，正好有一辆位于车道中间的小汽车从点 B （小汽车前沿中点）沿该车道中间直线匀速朝斑马线驶去. 已知行人的速度是 1m/s ，小汽车的速度为 30km/h ，每个车道宽 3m ，双向车道中间有宽 0.5m 的隔离带. 若小汽车与行人通过同一路口的时间差在 5s 内（不包含 5s ），则存在交通安全隐患，此时要求小汽车“礼让行人”.

问题思考与解决：



(1) 若 $\angle BAC = 76^\circ$,

① 计算此时小汽车到斑马线的距离 BC ;

② 若在 B 点时小汽车司机发现行人后，立即减速慢行，结果在行人到达点 C 时，小汽车前沿离行人还有 1m ，此时司机停车“礼让行人”，求小汽车在这一段的平均速度.

(2) 若小汽车刚好不需要“礼让行人”，求 $\angle BAC$ 的度数.

(参考数据: $\tan 72^\circ \approx 3$, $\tan 76^\circ \approx 4$, $\tan 86^\circ \approx 14$)

【答案】 (1) ① 32m ; ② $\frac{31}{8}\text{m/s}$

(2) 72° 或 86°

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形的应用、分式方程的应用，理解题意、数形结合解直角三角形是解题的关键.

(1) ① 根据题意得出 $AC = 8$ ，根据 $\angle BAC = 76^\circ$ ， $\tan \angle BAC = \frac{BC}{AC}$ ，解直角三角形求出 BC 即可；② 设

小汽车在这一段的平均速度为 a m/s, 根据题意得出分式方程 $\frac{32-1}{a} = \frac{8}{1}$ 求解即可;

(2) 设 $BC = x$ m, 根据 $30\text{km/h} = \frac{25}{3}\text{m/s}$, 由题意得出 $\frac{8}{1} - \frac{x}{\frac{25}{3}} = 5$ 或 $\frac{x}{\frac{25}{3}} - \frac{8}{1} = 5$ 求解, 进一步得出

$\tan\angle BAC$ 的值, 根据 $\tan 72^\circ \approx 3$, $\tan 86^\circ \approx 14$, 得出 $\angle BAC$ 的度数即可.

【小问 1 详解】

解: ①由题可知: $AC = 3 + 3 + 0.5 + 1.5 = 8$, $\angle BAC = 76^\circ$, $\angle ACB = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\tan\angle BAC = \frac{BC}{AC}$, 即 $\frac{BC}{8} = \tan 76^\circ$,

$\therefore BC = 8 \tan 76^\circ \approx 8 \times 4 = 32\text{m}$;

②设小汽车在这一段的平均速度为 a m/s,

由题意得: $\frac{32-1}{a} = \frac{8}{1}$,

解得: $a = \frac{31}{8}$,

经检验: $a = \frac{31}{8}$ 是该分式方程的解且符合题意,

$\therefore$ 小汽车在这一段的平均速度为 $\frac{31}{8}\text{m/s}$;

【小问 2 详解】

解: 设 $BC = x$ m, $30\text{km/h} = \frac{25}{3}\text{m/s}$,

由题意得: $\frac{8}{1} - \frac{x}{\frac{25}{3}} = 5$ 或 $\frac{x}{\frac{25}{3}} - \frac{8}{1} = 5$,

解得: $x = 25$ 或 $x = \frac{325}{3}$,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\tan\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{25}{8} \gg 3$ 或 $\tan\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{\frac{325}{3}}{8} \gg 14$,

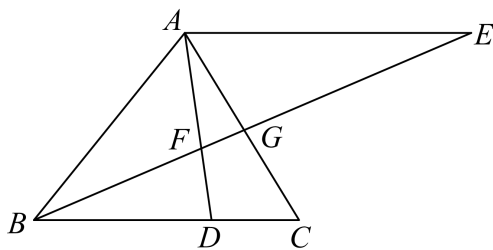
又 $\because \tan 72^\circ \approx 3$, $\tan 86^\circ \approx 14$,

$\therefore \angle BAC$ 的度数为 72° 或 86° .

23. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, $AE \parallel BC$, BE 与 AD 、 AC 分别相交于点 F 、 G , $AF^2 = FG \cdot FE$.

(1) 求证: $\triangle CAD \sim \triangle CBG$;

(2) 连接 DG , 求证: $DG \cdot AE = AB \cdot AG$.



【答案】(1) 见解析；(2) 见解析；

【解析】

【分析】(1) 由 $AF^2 = FG \cdot FE$ 及 $\angle AFG = \angle EFA$, 证得 $\triangle FAG \sim \triangle FEA$, 结合 $AE \parallel BC$, 证得 $\angle EBC = \angle FAG$, 从证得结论；

(2) 由 (1) 的结论得到 $\frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CG}$, 证得 $\triangle CDG \sim \triangle CAB$, 结合 $AE \parallel BC$, 证得 $\frac{AG}{AE} = \frac{GC}{CB}$, 继而证得结论.

【详解】(1) $\because AF^2 = FG \cdot FE$,

$$\therefore \frac{AF}{FG} = \frac{FE}{AF}.$$

又 $\because \angle AFG = \angle EFA$,

$$\therefore \triangle FAG \sim \triangle FEA.$$

$$\therefore \angle FAG = \angle E.$$

$$\because AE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle E = \angle EBC.$$

$$\therefore \angle EBC = \angle FAG.$$

又 $\because \angle ACD = \angle BCG$,

$$\therefore \triangle CAD \sim \triangle CBG.$$

$$(2) \because \triangle CAD \sim \triangle CBG,$$

$$\therefore \frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CG}.$$

又 $\because \angle DCG = \angle ACB$,

$$\therefore \triangle CDG \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore \frac{DG}{AB} = \frac{CG}{CB}.$$

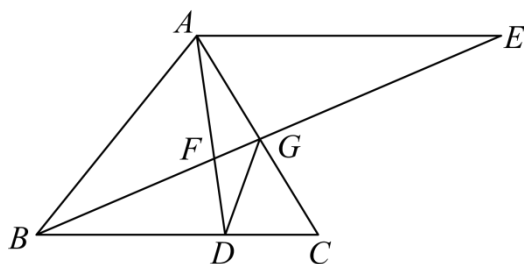
$$\because AE \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{AE}{CB} = \frac{AG}{GC}.$$

$$\therefore \frac{AG}{AE} = \frac{GC}{CB},$$

$$\therefore \frac{DG}{AB} = \frac{AG}{AE},$$

$$\therefore DG \cdot AE = AB \cdot AG.$$



【点睛】 本题考查了相似三角形的判定和性质，平行线分线段成比例定理，灵活运用比例的性质以及中间比是解题的关键.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(1,1)$ 和 $B(3,1)$ ，顶点为点 P ，抛物线与 y 轴交于点 C .

(1) 求 b 和 c 的值.

(2) 另一条抛物线 $y = ax^2 + mx + n$ ($a \neq 1$) 也经过点 $A(1,1)$ 和 $B(3,1)$ ，顶点为点 Q ，与 y 轴交于点 D .

①求 $\frac{CD}{PQ}$ 的值;

②当四边形 $CDPQ$ 是直角梯形，求其最小内角的正弦值.

【答案】 (1)
$$\begin{cases} b = -4 \\ c = 4 \end{cases}$$

(2) ① 3; ② $\frac{3}{5}$ 或 $\frac{\sqrt{17}}{17}$

【解析】

【分析】 (1) 将点 A 、 B 的坐标代入抛物线解析式 $y = x^2 + bx + c$ ，即可求出 b 、 c 的值;

(2) ①将点 A 、 B 的坐标代入抛物线解析式 $y = ax^2 + mx + n$ 得 $y = ax^2 - 4ax + 3a + 1 = a(x-2)^2 + 1 - a$ ，确定点 D 、 Q 的坐标，继而得到 CD 和 PQ 的长度，得出比值;

②分两种情况：当 $CD \perp DP$ 时；当 $CD \perp CQ$ 时，分别求解即可.

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(1,1)$ 和 $B(3,1)$,

$$\therefore \begin{cases} 1 = 1 + b + c \\ 1 = 9 + 3b + c \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b = -4 \\ c = 4 \end{cases};$$

【小问 2 详解】

①∵ 抛物线 $y = ax^2 + mx + n$ ($a \neq 1$) 也经过点 $A(1,1)$ 和 $B(3,1)$,

$$\therefore \begin{cases} 1 = a + m + n \\ 1 = 9a + 3m + n \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = -4a \\ n = 1 + 3a \end{cases},$$

∴ 抛物线的解析式为 $y = ax^2 - 4ax + 3a + 1 = a(x-2)^2 + 1 - a$,

∴ 该抛物线与 y 轴交于点 D ，顶点为点 Q ，

∴ $D(0, 3a+1)$ ， $Q(2, 1-a)$ ，

由 (1) 知抛物线的解析式为 $y = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ ，且该抛物线与 y 轴交于点 C ，顶点为点 P ，

∴ $C(0, 4)$ ， $P(2, 0)$ ，

$$\therefore CD = |3a+1-4| = |3a-3| = 3|a-1|, \quad PQ = |0-(1-a)| = |a-1|,$$

$$\therefore \frac{CD}{PQ} = \frac{3|a-1|}{|a-1|} = 3;$$

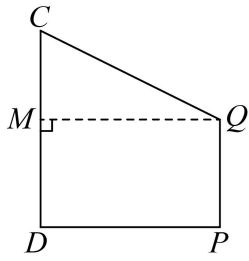
②∵ $C(0, 4)$ ， $P(2, 0)$ ， $D(0, 3a+1)$ ， $Q(2, 1-a)$ ，

即点 C 、 D 在 y 轴上，且点 P 、 Q 都在 y 轴的右侧且到 y 轴的距离为 2，

∴ $CD \parallel PQ$ ，

∴ 四边形 $CDPQ$ 是直角梯形，则：

当 $CD \perp PD$ 时，如图所示，则 $D(0, 0)$ ，



$$\therefore D(0, 3a+1), \quad Q(2, 1-a),$$

$$\therefore 3a+1=0,$$

$$\therefore a = -\frac{1}{3},$$

$$\therefore Q\left(2, \frac{4}{3}\right),$$

$\therefore \angle QCD$ 为最小内角,

过点 Q 作 $QM \perp CD$ 于点 M ,

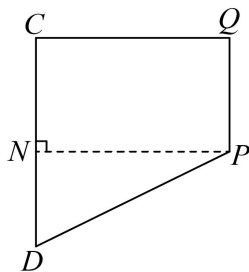
$$\therefore M\left(0, \frac{4}{3}\right),$$

$$\therefore QM = 2, \quad CM = CD - DM = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3},$$

$$\therefore CQ = \sqrt{CM^2 + QM^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + 2^2} = \frac{10}{3},$$

$$\therefore \sin \angle QCD = \frac{QM}{CQ} = \frac{2}{\frac{10}{3}} = \frac{3}{5};$$

当 $CD \perp CQ$ 时, 如图所示, $Q(2, 4)$,



$$\therefore D(0, 3a+1), \quad Q(2, 1-a),$$

$$\therefore 1-a=4,$$

$$\therefore a = -3,$$

$$\therefore D(0, -8),$$

$\therefore \angle CDP$ 为最小内角,

过点 P 作 $PN \perp CD$ 于点 N ,

$$\therefore N(0, 0),$$

$$\therefore PN = 2, \quad DN = 8,$$

$$\therefore PD = \sqrt{DN^2 + PN^2} = \sqrt{8^2 + 2^2} = 2\sqrt{17},$$

$$\therefore \sin \angle CDP = \frac{PN}{PD} = \frac{2}{2\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17};$$

综上所述, 最小的角的正弦值为 $\frac{3}{5}$ 或 $\frac{\sqrt{17}}{17}$.

【点睛】本题考查二次函数的性质, 三角函数, 坐标与图形, 直角梯形的性质, 勾股定理等知识点, 利用分类讨论的思想解决问题是解题的关键.

25. 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\tan B = 2$, AD 是 BC 边上的高, $AD = 12$, 点 E 在边 AC 上, $AE = 3EC$, 过点 E 作 $EP \parallel BC$, 交边 AB 于点 P , $EP = \frac{15}{2}$.

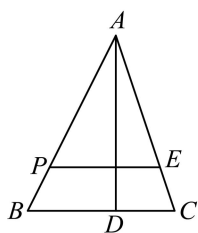


图1

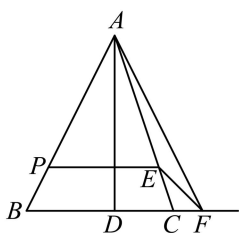
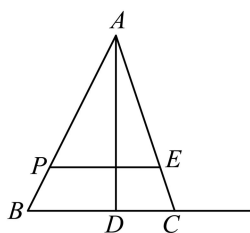


图2



备用图

(1) 求 $\tan \angle ACB$ 的值;

(2) 如图 2, 点 F 在 BC 延长线上, 连接 FE 、 FA , 设 $CF = m$.

① 延长 FE 交边 AB 于点 G , 如果 $AE \cdot EC = GE \cdot EF$, 记 $\triangle AGE$ 、 $\triangle FCE$ 的周长分别为 $C_{\triangle AGE}$ 、 $C_{\triangle FCE}$,

求 $\frac{C_{\triangle AGE}}{C_{\triangle FCE}}$ 的值;

② 如果 $\angle FEC = \angle DAF$, 且 $CF > BC$, 求 m 的值.

【答案】(1) 3

(2) ① $\sqrt{5}$; ② 20

【解析】

本卷由「公众号：指尖上海」整理制作，小编微信：Leier19941118

【分析】(1) 证明 $\triangle APE \sim \triangle ABC$ ，由相似三角形的性质求出 $BC = 10$ ，解直角三角形得出 $BD = 6$ ，从而得出 $CD = 4$ ，再由正切的定义即可得解；

(2) ①作 $EH \perp BC$ 于 H ，连接 BE ，则 $AD \parallel EH$ ， $\angle BHE = \angle EHF = 90^\circ$ ，证明 $\triangle CEH \sim \triangle CAD$ ，由相似三角形的性质求出 $CE = \sqrt{10}$ ， $AE = 3\sqrt{10}$ ， $CH = 1$ ， $EH = 3$ ，从而可得 $BH = 9$ ，证明 $\triangle ABE$

为等腰直角三角形，得出 $\angle BAE = 45^\circ$ ，证明 $\triangle AEG \sim \triangle FEC$ ，得出 $\angle EFC = \angle EAG = 45^\circ$ ， $\frac{C_{\triangle AGE}}{C_{\triangle FCE}} = \frac{AE}{EF}$ ，

从而可得 $\triangle EFH$ 为等腰直角三角形，求出 $EF = 3\sqrt{2}$ ，即可得解；②过点 F 作 $FQ \perp AC$ 交 AC 的延长

线于 Q ，由对顶角相等可得 $\angle FCQ = \angle ACB$ ，则 $\tan \angle FCQ = \tan \angle ACB = 3$ ，从而可得 $\frac{FQ}{CQ} = 3$ ，结合

勾股定理求出 $CQ = \frac{\sqrt{10}}{10}m$ ， $FQ = \frac{3\sqrt{10}}{10}m$ ，由 $\angle FEC = \angle DAF$ ，得出 $\tan \angle FEC = \tan \angle DAF$ ，结合

正切的定义得出 $\frac{4+m}{12} = \frac{\frac{3\sqrt{10}}{10}m}{\sqrt{10} + \frac{\sqrt{10}}{10}m}$ ，求解即可。

【小问 1 详解】

解：∵ $EP \parallel BC$ ，

∴ $\triangle APE \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore \frac{PE}{BC} = \frac{AE}{AC},$$

$$\therefore AE = 3EC,$$

$$\therefore AE = \frac{3}{4}AC,$$

$$\therefore \frac{PE}{BC} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore EP = \frac{15}{2},$$

$$\therefore BC = 10,$$

∵ 在 $\triangle ABC$ 中， $\tan B = 2$ ， AD 是 BC 边上的高， $AD = 12$ ，

$$\therefore \tan B = \frac{AD}{BD} = 2,$$

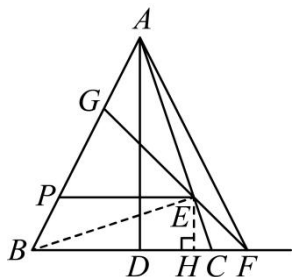
$$\therefore BD = 6,$$

$$\therefore CD = BC - BD = 4,$$

$$\therefore \tan \angle ACB = \frac{AD}{CD} = \frac{12}{4} = 3;$$

【小问2 详解】

解：①如图，作 $EH \perp BC$ 于 H ，连接 BE ，



则 $AD \parallel EH$ ， $\angle BHE = \angle EHF = 90^\circ$ ，

$$\therefore \triangle CEH \sim \triangle CAD,$$

$$\therefore \frac{EH}{AD} = \frac{CH}{CD} = \frac{CE}{AC},$$

$$\because AE = 3EC, \quad AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 4\sqrt{10},$$

$$\therefore CE = \frac{1}{4}AC = \sqrt{10}, \quad AE = \frac{3}{4}AC = 3\sqrt{10},$$

$$\because AD = 12, \quad CD = 4,$$

$$\therefore CH = 1, \quad EH = 3,$$

$$\therefore BH = BC - CH = 9,$$

$$\because AB = \sqrt{BD^2 + AD^2} = 6\sqrt{5}, \quad BE = \sqrt{BH^2 + EH^2} = 3\sqrt{10},$$

$$\therefore AB^2 = AE^2 + BE^2, \quad AE = BE,$$

$\therefore \triangle ABE$ 为等腰直角三角形，

$$\therefore \angle BAE = 45^\circ,$$

$$\because AE \cdot EC = GE \cdot EF,$$

$$\therefore \frac{AE}{EF} = \frac{GE}{CE},$$

$$\because \angle AEG = \angle FEC,$$

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle FEC,$$

$$\therefore \angle EFC = \angle EAG = 45^\circ, \quad \frac{C_{\triangle AGE}}{C_{\triangle FCE}} = \frac{AE}{EF},$$

$\therefore \triangle EFH$ 为等腰直角三角形，

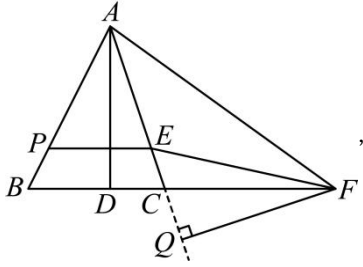
$$\because EH = 3,$$

$$\therefore EH = HF = 3,$$

$$\therefore EF = \sqrt{EH^2 + HF^2} = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{C_{\triangle AGE}}{C_{\triangle FCE}} = \frac{AE}{EF} = \frac{3\sqrt{10}}{3\sqrt{2}} = \sqrt{5};$$

②如图，过点 F 作 $FQ \perp AC$ 交 AC 的延长线于 Q ，



则 $\angle FCQ = \angle ACB$ ，

$$\therefore \tan \angle FCQ = \tan \angle ACB = 3,$$

$$\therefore \frac{FQ}{CQ} = 3,$$

$$\because CQ^2 + FQ^2 = CF^2, \quad CF = m,$$

$$\therefore CQ = \frac{\sqrt{10}}{10}m, \quad FQ = \frac{3\sqrt{10}}{10}m,$$

$$\because \angle FEC = \angle DAF,$$

$$\therefore \tan \angle FEC = \tan \angle DAF,$$

$$\therefore \tan \angle FEC = \frac{FQ}{EQ} = \frac{\frac{3\sqrt{10}}{10}m}{\sqrt{10} + \frac{\sqrt{10}}{10}m}, \quad \tan \angle DAF = \frac{DF}{AD} = \frac{4+m}{12},$$

$$\therefore \frac{4+m}{12} = \frac{\frac{3\sqrt{10}}{10}m}{\sqrt{10} + \frac{\sqrt{10}}{10}m},$$

$$\text{整理可得: } m^2 - 22m + 40 = 0,$$

$$\text{解得: } m = 20 \text{ 或 } m = 2,$$

$$\therefore CF > BC,$$

$$\therefore m = 20.$$

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定与性质、解直角三角形、勾股定理、勾股定理逆定理、等腰三角形的判定与性质等知识点，熟练掌握以上知识点并灵活运用，添加适当的辅助线是解此题的关键.