

上海市张江集团中学 2024-2025 学年第二学期

六年级期中考·数学试卷

时间：100 分钟 满分：150 分

(本张试卷中无特殊说明时， π 均取 3.14)

一、选择题：(每题 4 分，共 24 分)

1. 以下调查中，最适宜采用全面调查方式的是 ()

- A. 检测某批次汽车的抗撞击能力
- B. 了解某市中学生课外阅读的情况
- C. 调查黄河的水质情况
- D. 调查乘坐飞机的旅客是否携带了违禁物品

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查全面调查与抽样调查，熟练掌握其定义及优缺点是解题的关键。全面调查与抽样调查的优缺点：①全面调查收集的到数据全面、准确，但一般花费多、耗时长，而且某些调查不宜用全面调查。②抽样调查具有花费少、省时的特点，但抽取的样本是否具有代表性，直接关系到对总体估计的准确程度；据此进行判断即可。

【详解】解：检测某批次汽车的抗撞击能力适宜采用抽查方式，则 A 不符合题意，
了解某市中学生课外阅读的情况适宜采用抽查方式，则 B 不符合题意，
调查黄河的水质情况适宜采用抽查方式，则 C 不符合题意，
调查乘坐飞机的旅客是否携带了违禁物品适宜采用普查方式，则 D 符合题意，
故选：D。

2. 下列情况中，摸球一次，摸到红球的可能性最小的是 ()

- A. 8 个白球，2 个红球，3 个黑球
- B. 3 个蓝球，9 个白球，1 个红球
- C. 6 个白球，4 个蓝球，3 个红球
- D. 2 个黑球，4 个红球，7 个白球

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查可能性大小判断，理解数量越少，摸到的可能性越小是解决本题的关键。根据数量越少，摸到的可能性越小，比较红球的个数，即可解答。

【详解】解：四个选项中，球的总数相同，红球数量越少，摸到红球的可能性越小，

$$\because 4 < 3 < 2 < 1$$

$\therefore$ 摸到红球的可能性最小的是 3 个蓝球，9 个白球，1 个红球，

故选：B.

3. 若 a 、 b 都不为 0， a 是 b 的 25%，则 b 是 a 的 ()

- A. 75% B. 100% C. 33% D. 400%

【答案】D

【解析】

【分析】此题主要考查比例基本性质的逆应用，以及百分数意义的应用. 根据题意得出 $a = 25\%b = \frac{1}{4}b$,

即可求解.

【详解】解：依题意， $a = 25\%b = \frac{1}{4}b$ ，即 $a:b = 1:4$

$$\therefore b = 4a = 400\%a$$

故选：D.

4. 下列各数中，不能与 3、4、6 构成比例的是 ()

- A. 8 B. 2 C. 4.5 D. 5

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了比例的基本性质. 根据比例的基本性质：在比例里，两内项之积等于两外项之积；看题干和每个选项中的数组成的 4 个数中，最小数与最大数的积是否等于中间两个数的积即可.

【详解】解： $3 \times 8 = 4 \times 6 = 24$ ，两组数的乘积相等，3、4、6 与 8 能组成比例；

$$6 \times 2 = 3 \times 4 = 12, \text{ 两组数的乘积相等, 3、4、6 与 2 能组成比例;}$$

$$6 \times 3 = 4 \times 4.5 = 18, \text{ 两组数的乘积相等, 3、4、6 与 4.5 能组成比例;}$$

$$3 \times 6 = 18, 4 \times 5 = 20, \text{ 两组数的乘积不相等, 3、4、6 与 5 不能组成比例.}$$

故选：D.

5. 一个圆形花坛，周长是 9.42 米，在离开花坛边 0.5 米的外面围上一圈栏杆，栏杆的长至少是 ()

- A. 10.99 米 B. 12.56 米 C. 9.42 米 D. 10.42 米

【答案】B

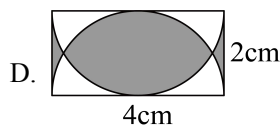
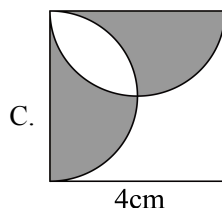
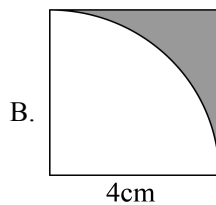
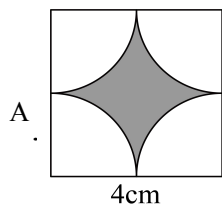
【解析】

【分析】本题考查了圆的周长公式，掌握圆的周长公式是解题的关键. 先求花坛的半径，再计算栏杆的长.

【详解】解： $2\pi\left(\frac{9.42}{2\pi} + 0.5\right) = 9.42 + 3.14 = 12.56$ 米

故选：B.

6. 下列图形中阴影部分周长最长的是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了与圆有关的图形的周长，根据图形分别计算各选项中阴影部分的周长，即可求解.

【详解】解：以下计算中， π 取3

A. 阴影部分周长为： $4 \times \frac{1}{4} \times 2\pi \times \left(\frac{1}{2} \times 4\right) = 4\pi \approx 12$ cm

B. 阴影部分周长为： $4 + 4 + \frac{1}{4} \times 2\pi \times 4 = 8 + 2\pi \approx 14$ cm

C. 阴影部分周长为： $4 + 4 + 2 \times \frac{1}{2} \times 2\pi \times \left(4 \times \frac{1}{2}\right) = 8 + 4\pi \approx 20$ cm

D. 阴影部分周长为： $4 + 4 + 2 + 2 + 2 \times 2\pi \times \left(4 \times \frac{1}{2}\right) = 12 + 4\pi = 24$ cm

阴影部分周长最长的是 D 选项

故选：D

二、填空题：(每题3分，共45分)

7. 求比值：0.25 小时：25 分钟 = _____.

【答案】3:5

【解析】

【分析】此题主要考查了化简比和求比值的方法. 根据比的基本性质作答，即比的前项和后项同时乘一个数或除以一个数(0除外)比值不变；用比的前项除以后项即可.

【详解】解：0.25 小时：25 分钟

=15 分钟：25 分钟

=15:25；

15:25

=15÷25

$$=\frac{3}{5}.$$

故答案为：3:5.

8. 已知某地图的比例尺为1: 3000000, 若 A, B 两地的在地图上的距离是 2.5cm, 实际距离为_____ km.

【答案】75

【解析】

【分析】此题有计算公式可用, 根据图上距离、比例尺和实际距离三者的关系, 进行分析解答即可得出结论. 要求 A, B 两地间实际距离是多少千米, 根据“图上距离÷比例尺=实际距离”, 代入数值, 计算即可.

【详解】解: $2.5 \div \frac{1}{3000000} = 7500000\text{cm} = 75\text{km}$

故答案为: 75.

9. 已知 4 是 6 与 x 的比例中项, 那么 $x =$ _____.

【答案】 $\frac{8}{3}$

【解析】

【分析】本题主要考查解比例, 找到等量关系是解题的关键. 根据题意列出方程式, 进而得出答案.

【详解】解: 由题意可得: $4^2 = 6x$,

解得: $x = \frac{8}{3}$.

故答案为: $\frac{8}{3}$.

10. 如果 $3x = 2y = 6z \neq 0$, 那么 $x: y: z =$ _____.

【答案】2:3:1

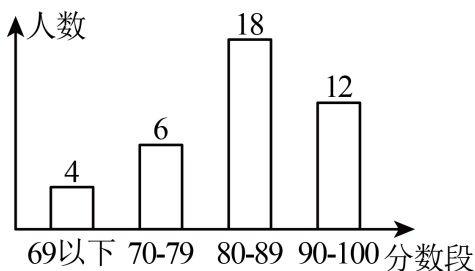
【解析】

【分析】本题考查了比的性质. 熟练掌握该知识点是关键. 根据比例的性质“内项之积等于外项之积”, 即可得到结论.

【详解】解: $x: y: z = \frac{6}{3}: \frac{6}{2}: \frac{6}{6} = 2:3:1$

故答案为: 2:3:1.

11. 如图, 是某班全班 40 名学生一次数学测验分数段统计图, 根据统计图所提供的信息计算, 达到优良的人数占全班人数的百分比为 (分数 80 分以上包括 80 分的为优良) _____ (填入百分数)



【答案】 75%

【解析】

【分析】 本题考查了统计图, 百分数的意义, 根据统计图获得相关信息是解题的关键. 根据优良率 = 优良数 $\div$ 总人数 $\times 100\%$ 计算即可求解.

【详解】 解: 由统计图知: 成绩为优良的人数有 $18 + 12 = 30$ (人),

则优良率为: $\frac{30}{40} \times 100\% = 75\%$,

故答案为: 75%.

12. 一个圆环形纸片, 外环的半径是 8 厘米, 内环的半径是 6 厘米, 这个圆环的面积是 _____ 平方厘米. (结果保留 π)

【答案】 28π

【解析】

【分析】 本题主要考查了圆环面积的计算, 解题的关键是熟练掌握圆的面积公式. 用大圆的面积减去小圆的面积即可得出圆环的面积.

【详解】 解: 圆环的面积为: $\pi \times 8^2 - \pi \times 6^2 = 64\pi - 36\pi = 28\pi$ (平方厘米),

故答案为: 28π .

13. 若一弧长为 18.84 厘米, 所对圆心角为 60° , 则这弧所在圆的半径是 _____ 厘米.

【答案】 18

【解析】

【分析】 本题主要考查弧长计算, 熟练掌握弧长计算公式是解题的关键. 根据弧长计算公式可进行求解.

【详解】 解: 设该弧所在圆的半径为 r cm, 由弧长公式, 得

$$\frac{60 \times 3.14r}{180} = 18.84$$

解得: $r = 18$;

$\therefore$ 该弧所在圆的半径为 18 cm.

故答案为：18.

14. 一个圆被分为弧长之比为3:2:2:5的四个扇形，则最长的弧所对的圆心角的大小为_____.

【答案】150°##150度

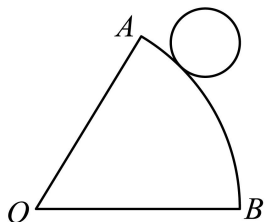
【解析】

【分析】本题考查了按比例分配与圆心角的计算，根据题意可得最长的弧长占 $\frac{5}{12}$ ，则最长的弧所对的圆心角的大小为 $\frac{5}{12} \times 360^\circ$ ，即可求解.

【详解】解：依题意，最长的弧所对的圆心角的大小为 $\frac{5}{3+2+2+5} \times 360^\circ = 150^\circ$

故答案为：150°.

15. 如图, 已知一圆在扇形AOB的外部, 沿扇形的 $\widehat{AB}$, 从点A滚动一周, 恰好到达点B. 如果OA=24cm, $\angle AOB = 60^\circ$, 圆的半径为_____ cm.



【答案】4

【解析】

【分析】本题考查了扇形的弧长，由扇形弧长公式得 $C_{\text{扇形}} = \frac{60\pi \times 24}{180}$ ，再由圆的周长公式即可求解；理解扇形的弧长与圆的周长之间的关系，掌握扇形弧长公式 $C_{\text{扇形}} = \frac{n\pi R}{180}$ 是解题的关键.

【详解】解：由题意得

$$C_{\text{扇形}} = \frac{60\pi \times 24}{180}$$

$$= 8\pi,$$

$$\therefore 2\pi r = 8\pi,$$

解得： $r = 4$ ；

故答案：4.

16. 如果用70厘米的铅丝做成一个半径为20厘米的扇形，那么这个扇形的面积等于_____平方厘米.

【答案】300

【解析】

【分析】因为扇形的周长=弧长+半径 $\times 2$ ，据此即可得出圆心角的度数，进而依据扇形的面积公式，即

$$S_{\text{扇形}} = \frac{n\pi r^2}{360}, \text{ 代入数据即可求解.}$$

【详解】解： $\because l + 20 \times 2 = 70$,

$$\therefore l = 30(\text{cm}),$$

$$\therefore \frac{n\pi r}{180} = 30,$$

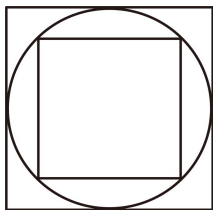
$$\therefore n\pi r = 5400,$$

$$\text{这个扇形的面积为 } \frac{n\pi \times 20^2}{360} = \frac{5400 \times 20}{360} = 300 \text{ (平方厘米);}$$

故答案为：300.

【点睛】此题主要考查扇形的周长和面积的计算方法的灵活应用，得出 $n\pi r$ 的值是解题关键.

17. 在一个面积是 20 的正方形内画一个最大的圆，继续在这个圆内画一个最大的正方形，画出的正方形的面积是_____.



【答案】10

【解析】

【分析】此题考查了组合图形的面积. 由题意可知这个最大圆的直径应该等于大正方形的边长，小正方形的对角线等于圆的直径，则小正方形的面积等于对角线的平方的 2 倍，据此解答即可.

【详解】解：设这个圆的半径为 r 厘米，则大正方形的边长就是 $2r$,

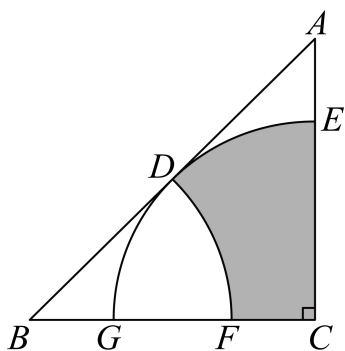
根据大正方形的面积是 20 可得： $2r \times 2r = 20$,

整理可得： $r^2 = 5$,

小正方形的面积是： $2r \times 2r \div 2 = 10$,

故答案为：10.

18. 如图，已知等腰直角三角形 ABC ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， D 是斜边 AB 的中点，且 $AC = BC = 10$ 厘米，以点 B 为圆心， BD 为半径画弧，交 BC 于点 F ，以点 C 为圆心， CD 为半径画弧，分别交 AC 、 BC 于点 E 、 G 。则阴影部分的面积为_____.

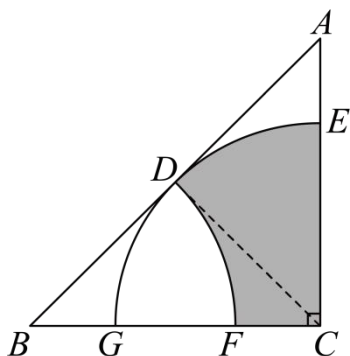


【答案】 25 平方厘米

【解析】

【分析】 本题考查了与扇形的面积计算；连接 CD ，根据题意和图形可以得到阴影部分的面积是 $\triangle ABC$ 的面积的一半，即可求解。

【详解】 解：如图，连接 CD ，

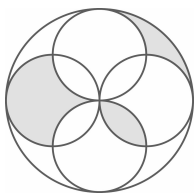


等腰直角三角形 ABC ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， D 是斜边 AB 的中点，且 $AC = BC = 10$ 厘米，

阴影部分的面积为 $\frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 25$ 平方厘米

故答案为： 25 平方厘米.

19. 如图，大圆的半径等于小圆的直径，那么图中阴影部分的面积的和与大圆的面积之比是_____.



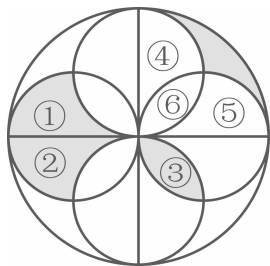
【答案】 $1:4$ 或 $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了割补法求阴影部分面积；

如图，将大圆分成 4 部分，把大圆阴影分成了①②两部分，将①②③平移到④⑤⑥，可得阴影部分的面积占大圆面积的 $\frac{1}{4}$ ，问题得解。

【详解】解：如图，将大圆分成4部分，把大阴影分成了①②两部分，
 由图可得，①、②和④、⑤的面积相等，③和⑥的面积相等，
 将①②③平移到④⑤⑥，可得阴影部分的面积占大圆面积的 $\frac{1}{4}$ ，
 $\therefore$ 图中阴影部分的面积的和与大圆的面积之比是1:4，
 故答案为：1:4.



20. 在下降的电梯中称重，显示的重量比实际体重减少 $\frac{1}{7}$ ；在上升的电梯中称重，显示的重量比实际体重增加 $\frac{1}{6}$ ．甲在下降的电梯中与乙在上升的电梯中称得的体重相同，甲和乙实际体重的比是_____.

【答案】49:36

【解析】

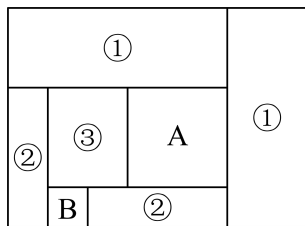
【分析】本题考查了比例的应用；甲在下降的电梯中称得的体重为其实际体重的 $\left(1-\frac{1}{7}\right)$ ，乙在上升的电梯中称得的体重为其实际体重的 $\left(1+\frac{1}{6}\right)$ ，据此，即可求解.

【详解】解：依题意，甲和乙实际体重的比是 $1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$ ， $1+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$

$$\left(1-\frac{6}{7}\right):\left(1+\frac{7}{6}\right)=\frac{7}{6}:\frac{6}{7}=49:36$$

故答案为：49:36.

21. 如图，长方形是由正方形A、B和长方形①、②、③组成，若长方形①、②的周长之比为 $\frac{5}{3}$ ，则正方形A、B的面积之比为_____.



【答案】 $\frac{25}{4}$

【解析】

【分析】 设正方形 A 的边长为 a ，正方形 B 的边长为 b ，根据图形分别得出长方形①、②、③的长和宽，再根据长方形①、②的周长之比，得到 $a = \frac{5}{2}b$ ，即可求出正方形 A 、 B 的面积之比.

【详解】 解：设正方形 A 的边长为 a ，正方形 B 的边长为 b ，

$\therefore$ 长方形②的宽为 b ，长为 $a+b$ ；长方形③的长为 a ，宽为 $2b$ ，长方形①的长为 $b+b+a+b=a+3b$ ，宽为 $a+3b-(a+b)=2b$ ，

$\therefore$ 长方形①、②的周长之比为 $\frac{5}{3}$ ，

$$\therefore \frac{2(a+3b+2b)}{2(b+a+b)} = \frac{5}{3}, \text{ 即 } \frac{a+5b}{a+2b} = \frac{5}{3},$$

$$\therefore 3(a+5b) = 5(a+2b),$$

$$\therefore a = \frac{5}{2}b,$$

$$\therefore \frac{S_{\text{正方形}A}}{S_{\text{正方形}B}} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2}{\left(\frac{5}{2}a\right)^2} = \frac{25}{4},$$

故答案为： $\frac{25}{4}$.

【点睛】 本题考查了列代数式，整式的加减法，根据图形得出长方形①、②、③的长和宽是解题关键.

三、计算题：(22 题每题 5 分，23 题 6 分，共 26 分)

22. (1) 求 x 的值： $(x+6):4 = (2x-1):3$ ；

(2) 若 $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} \neq 0$ ，求 $\frac{2x+y-z}{x+y+z}$ 的值；

(3) 已知 a 是 b 的 75%， b 是 c 的 90%，求 $a:b:c$ ；

(4) 若 $ab:ac:bc = 3:2:8$ ，求 $a:b:c$.

【答案】 (1) $x = \frac{22}{5}$ ；(2) $\frac{4}{13}$ ；(3) $27:36:40$ ；(4) $3:12:8$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解比例，以及比例的基本性质，解题的关键是熟练掌握比例的各个基本性质：内项之积等于外项之积，合比性质，分比性质以及等比性质.

(1) 根据内项之积等于外项之积，列出方程，解方程，即可求解；

(2) 设 $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} = a$, 进而表示出 x, y, z , 进而代入 $\frac{2x+y-z}{x+y+z}$ 进行计算即可求解;

(3) 根据题意可得 $a = 0.75b, b = 0.9c$, 则 $a = 0.75 \times 0.9c = 0.675c$, 即可求解.

(4) 根据题意得出 $b = \frac{3}{2}c, a = \frac{3}{8}c$, 再求比值, 即可求解.

【详解】解: (1) $(x+6):4 = (2x-1):3$

$$\therefore 3(x+6) = 4(2x-1)$$

$$\therefore 3x+18 = 8x-4$$

$$\therefore 5x = 22$$

$$\text{解得: } x = \frac{22}{5}$$

(2) 设 $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} = a$, 则 $x = 3a, y = 4a, z = 6a$,

$$\therefore \frac{2x+y-z}{x+y+z} = \frac{6a+4a-6a}{3a+4a+6a} = \frac{4a}{13a} = \frac{4}{13}$$

(3) $a = 75\%b = \frac{3}{4}b, b = 90\%c = \frac{9}{10}c$

$$\therefore a = 0.75b, b = 0.9c$$

$$\therefore a = 0.75 \times 0.9c = 0.675c$$

$$\therefore a:b:c = 0.675c:0.9c:c = 675:900:1000 = 27:36:40$$

(4) $\because ab:ac:bc = 3:2:8$

设 $ab = 3k, ac = 2k, bc = 8k$

$$\therefore \frac{ab}{ac} = \frac{b}{c} = \frac{3k}{2k} = \frac{3}{2}, \frac{ab}{bc} = \frac{a}{c} = \frac{3k}{8k} = \frac{3}{8}$$

$$\therefore b = \frac{3}{2}c, a = \frac{3}{8}c$$

$$\therefore a:b:c = \frac{3}{8}c:\frac{3}{2}c:c = 3:12:8$$

23. 已知 $xy = 0.8\frac{5}{8}, xz = 2\frac{2}{3}, 2\frac{1}{2}$, 求:

(1) $x:y:z$ 的值;

(2) 若 $z-y=40$, 求 x 的值.

【答案】(1) $32:25:30$

(2) 256

【解析】

【分析】 本题考查了比例的性质，根据比例的性质，进行计算即可求解.

(1) 根据题意得出 $y = \frac{25}{32}x$, $z = \frac{15}{16}x$, 进而计算 $x:y:z$ 的值;

(2) 根据 (1) 可得 $y = \frac{25}{32}x$, $z = \frac{15}{16}x$, 结合 $z - y = 40$ 得出 $\frac{5}{32}x = 40$, 即可求解.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } x:y = 0.8 : \frac{5}{8}, x:z = 2 : \frac{2}{3} \cdot 2 : \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{4}{5}y = \frac{5}{8}x, \frac{8}{3}z = \frac{5}{2}x$$

$$\text{即 } y = \frac{5}{8}x \times \frac{5}{4} = \frac{25}{32}x, z = \frac{5}{2}x \times \frac{3}{8} = \frac{15}{16}x$$

$$\therefore x:y:z = x:\frac{25}{32}x:\frac{15}{16}x = 32:25:30$$

【小问 2 详解】

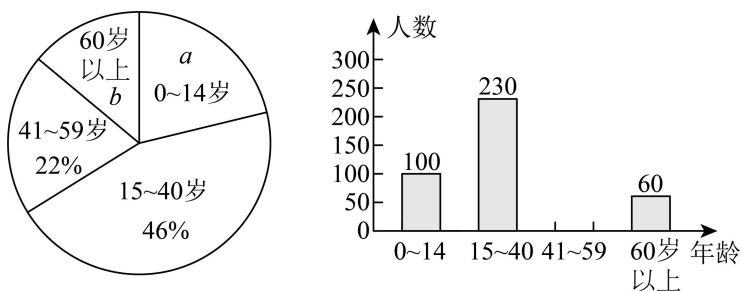
$$\text{解: } \because y = \frac{5}{8}x \times \frac{5}{4} = \frac{25}{32}x, z = \frac{5}{2}x \times \frac{3}{8} = \frac{15}{16}x$$

$$\therefore \frac{15}{16}x - \frac{25}{32}x = \frac{30}{32}x - \frac{25}{32}x = \frac{5}{32}x = 40$$

$$\therefore x = 40 \times \frac{32}{5} = 256$$

四、简答题: (10 分+7 分+8 分+10 分+20 分, 共 55 分)

24. 小丽学完统计知识后, 随机调查了她所在辖区若干名居民的年龄, 将调查数据绘制成如下扇形和条形统计图:



请根据以上不完整的统计图提供的信息, 解答下列问题:

(1) 小丽同学共调查了_____名居民的年龄;

(2) 扇形统计图中 $a =$ _____, $b =$ _____ (填写百分数), 并补全条形统计图;

(3) 扇形统计图中, 表示“年龄在 0~14 岁的居民”的扇形的圆心角度数是_____.

【答案】 (1) 500

(2) 20%, 12%

(3) 72°

【解析】

【分析】 本题考查了扇形统计图与条形统计图信息关联，画条形统计图，数形结合是解题的关键；

(1) 由条形统计图可知 15~40 岁的有 230 人，由扇形统计图可知 15~40 岁的占被调查总人数的 46%，由 $230 \div 46\%$ 即可求得单位“1”的量，即是被调查的小区居民的总人数；

(2) 求 a 时，用 0~14 岁的人数除以调查的总人数；用 60 岁以上的人数除以调查的总人数即可求出 b ，进而求得 41~59 岁居民人数，再补全统计图；

(3) 用 0~14 岁居民所占的百分率乘以 360° ，即可求解.

【小问 1 详解】

解：被调查的居民的总人数： $230 \div 46\% = 500$ (人)；

【小问 2 详解】

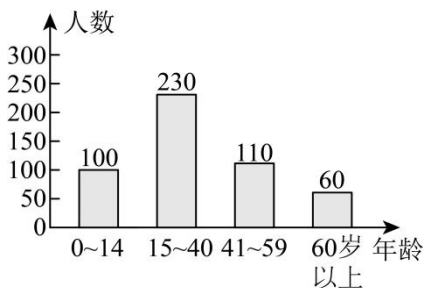
0~14 岁居民所占的百分率： $a = 100 \div 500 = 0.2 = 20\%$ ；

60 岁以上居民所占的百分率： $b = 60 \div 500 = 0.12 = 12\%$.

故答案为：20%，12%.

41~59 岁居民人数为： $500 - 100 - 230 - 60 = 110$

条形统计图如下：



【小问 3 详解】

扇形统计图中，表示“年龄在 0~14 岁的居民”的扇形的圆心角度数是 $20\% \times 360^\circ = 72^\circ$

故答案为： 72° .

25. 某市今年第一季度的工业总产值为 100 亿元，第二季度的工业总产值为 130 亿元，预计第三季度的增长率在第二季度的增长率的基础上将提高 10 个百分点，求预计第三季度的工业总产值是多少亿元？

【答案】 预计第三季度的工业总产值是 182 亿元

【解析】

【分析】 本题主要考查了百分数的实际应用，准确计算是解题的关键. 先求出第三季度比第二季度增产的产值，再加上第二季度的产值即可求解.

【详解】解： $130\left(1+\frac{130-100}{100}\times 100\%+10\%\right)=182$ 亿元

答：预计第三季度的工业总产值是182亿元.

26. 有 A, B, C 三个水桶，它们的总容积是1440升，现 A, B 两桶装满水， C 桶是空的；小明发现若将 A 桶水的全部和 B 桶水的 $\frac{1}{5}$ 倒入 C 桶，或将 B 桶水的全部和 A 桶水的 $\frac{1}{3}$ 倒入 C 桶，都可以将 C 桶恰好装满. 求：

(1) A 桶和 B 桶容积的比是多少？

(2) A, B, C 三个水桶的容积各是多少？

【答案】(1) A 桶和 B 桶容积的比是 $6:5$

(2) A 桶的容积是 480 升， B 桶的容积是 400 升， C 桶的容积是 560 升

【解析】本题考查了比例的应用；关键在于根据题目数量关系列出比例式，进而计算出每个水桶的容积之比，然后进行解答.

(1) 根据题意可得 A 桶水的 $\frac{2}{3}$ 等于 B 桶水的 $\frac{4}{5}$ ，即 A 桶和 B 桶容积的比是 $6:5$ ，

(2) 根据 C 桶水为 B 桶水 $\frac{7}{5}$ ，进而得出 A, B, C 桶容积的比是 $6:5:7$ ，结合 A, B, C 三个水桶，它们的总容积是1440升，按比例分配进行计算即可求解.

【小问 1 详解】

解：将 A 桶水的全部和 B 桶水的 $\frac{1}{5}$ 倒入 C 桶， 或将 B 桶水的全部和 A 桶水的 $\frac{1}{3}$ 倒入 C 桶，

$$\therefore A \text{ 桶水的 } \frac{2}{3} \text{ 等于 } B \text{ 桶水的 } \frac{4}{5}$$

$$\therefore A \text{ 桶水的全部等于 } B \text{ 桶水的 } \frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{6}{5}$$

$$\therefore A \text{ 桶和 } B \text{ 桶容积的比是 } 6:5$$

【小问 2 详解】

解：设 A 桶和 B 桶容积分别为 a, b ，则 $a:b=6:5$ 即 $a=\frac{6b}{5}$

将 B 桶水的全部和 A 桶水的 $\frac{1}{3}$ 倒入 C 桶，可以将 C 桶恰好装满.

$$\therefore c=b+\frac{1}{3}a=b+\frac{1}{3}\times\frac{6b}{5}=\frac{7}{5}b$$

$$\therefore c:b=7:5$$

$$\therefore A、B、C \text{ 桶容积的比是 } 6:5:7$$

$\therefore A, B, C$ 三个水桶，它们的总容积是1440升，

$$\therefore A \text{ 桶容积是 } 1440\times\frac{6}{6+5+7}=480 \text{ 升，}$$

$$B \text{ 桶容积是 } 1440 \times \frac{5}{6+5+7} = 400 \text{ 升,}$$

$$C \text{ 桶容积是 } 1440 \times \frac{7}{6+5+7} = 560 \text{ 升,}$$

答: A 桶的容积是 480 升, B 桶的容积是 400 升, C 桶的容积是 560 升.

27. 如图, 长方形 $ABCD$ 的长 $AB = 14$ 厘米, 宽 $BC = 9$ 厘米.

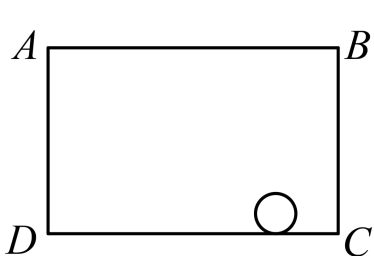


图1

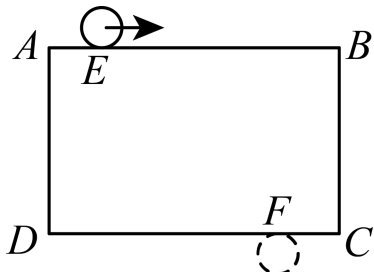


图2

(1) 如图 1, 一个半径为 1 厘米的圆, 沿着长方形的四边内侧滚动一周, 求圆滚过的面积;

(2) 如图 2, E 、 F 分别为 AB 、 CD 上的点, 且 $AE = \frac{1}{7}AB$, $FC:DF = 2:5$, 一个半径为 1 厘米的

圆, 沿着长方形的外侧从 E 点经过点 B 滚动到点 F , 求圆滚过的面积.

【答案】 (1) $(72 + \pi)(\text{cm}^2)$ (2) $(50 + 3\pi)(\text{cm}^2)$

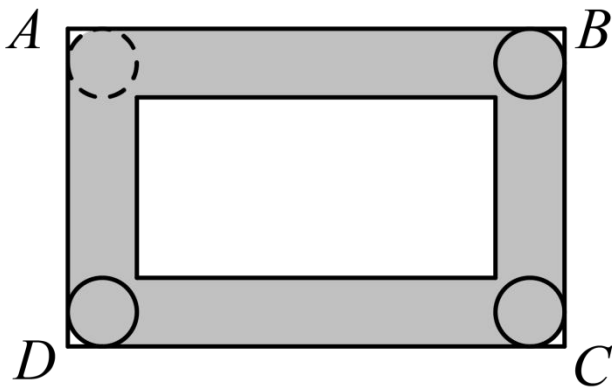
【解析】 本题考查了圆的面积, 矩形的性质等知识, 解题的关键是理解题意, 灵活运用所学知识解决问题.

(1) 如图所示, 圆滚过的面积 = 长方形的面积 - 中间白色长方形的面积 - 四个直角处的面积和; 四个直角处的面积和 = 边长为 2 厘米的正方形的面积 - 半径为 1 的圆的面积, 据此解答即可;

(2) 如图把圆滚过的面积分为 7 部分, 3 个长方形, 起点、终点分别为两个半圆, 两个角处分别为半径为 2 厘米的圆; 起点、终点加起来正好是一个半径长为 1 厘米圆的面积; 两个角面积之和是半径为 2 厘米的半圆的面积; 据此解答即可.

【小问 1 详解】

解: 如图中,



空白部分的长 $= 14 - 4 = 10$ (cm), 宽 $= 9 - 4 = 5$ (cm),

$$\therefore \text{阴影部分的面积} = 14 \times 9 - 10 \times 5 - 4 \times \left(1 \times 1 - \frac{1}{4} \pi \times 1^2 \right) = (72 + \pi) (\text{cm}^2)$$

【小问 2 详解】

如图 2 中,

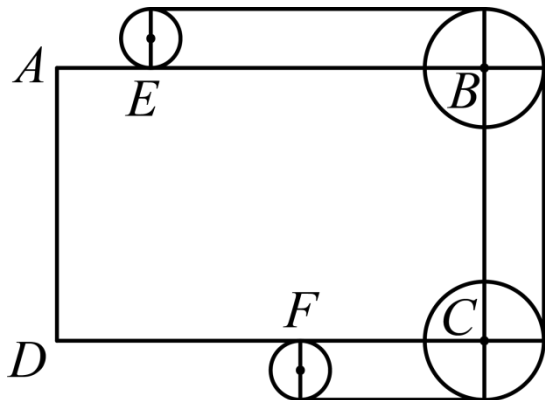


图2

由题意 $AE = \frac{1}{7} AB = \frac{1}{7} \times 14 = 2\text{cm}$, $BE = AB - AE = 14 - 2 = 12\text{cm}$, $CF = \frac{2}{7} AB = \frac{2}{7} \times 14 = 4\text{cm}$,

$$\therefore \text{圆滚过的面积为 } 2 \times (12 + 9 + 4) + \pi \times 1^2 + 2 \times \frac{1}{4} \pi \times 2^2 = (50 + 3\pi) (\text{cm}^2).$$

28. 在学习扇形的面积公式时, 已知圆心角 n 和扇形所在圆的半径 R , 可以推的公式: $S_{\text{扇形}} = \frac{n\pi R^2}{360}$ ①,

并通过比较扇形面积公式与弧长公式 $l = \frac{n\pi R}{180}$ ②, 得出扇形面积的另一种计算方法 $S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2} lR$

③. 请解决下列问题:

问题 I: 求弧长为 4π , 圆心角为 120° 的扇形面积.

问题 II: 某小区设计的花坛形状如图 1 中的阴影部分, 已知 AB 和 CD 所在圆心都是点 O , 弧 AB 的长为 l_1 ,

弧 CD 的长为 l_2 , $AC = BD = d$, 求花坛的面积.

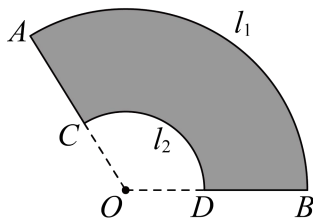


图1

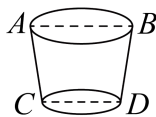


图2

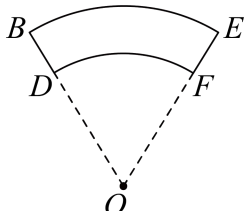


图3

(1) 请你解答问题 I;

(2) 在解决问题 II 的过程中, 有位同学发现扇形面积公式③类似于三角形面积公式: 类比梯形面积公式, 他猜想花坛的面积 $S = \frac{1}{2} (l_1 + l_2) d$. 他的猜想正确吗? 如果正确, 写出推导过程; 如果不正确, 请说明理

由. (参考公式: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$)

(3) 乙同学发现平时所用的一次性纸杯(如图2)的侧面展开的大致图形如图3所示, 经测量(如图2)杯口直径 $AB = 8\text{cm}$, 杯底直径 $CD = 6\text{cm}$, 杯壁母线长 $AC = BD = 6\text{cm}$, 若忽略纸杯的连接部分和纸杯的厚度, 请求出其在图3中其侧面展开的图形 $BDFE$ 面积.

(4) 丙同学认为, 要想准确画出纸杯的侧面展开图, 需要确定图3中 $\widehat{BE}$ 和 $\widehat{DF}$ 所在的半径 OE, OF 的长以及圆心角 $\angle BOE$ 的度数, 那么根据(3)中的尺寸, $\widehat{DF}$ 所在圆的半径 $OF =$ _____; 它所对的圆心角 $\angle BOE$ 的度数为 _____.

【答案】(1) 12π ; (2) 正确, 理由见解析; (3) $42\pi\text{cm}^2$; (4) 18cm , 60°

【解析】

【分析】本题主要考查了扇形面积公式的应用.

(1) 根据扇形公式之间的关系, 结合已知条件推出结果.

(2) 根据(1)的公式进行计算即可求解;

(3) 根据(2)的结论进行计算即可求解;

(4) 根据弧长公式得出 $r = \frac{1080}{n}$, $R = \frac{1440}{n}$, 进而根据 $AC = BD = 6\text{cm}$ 得出圆心角 $\angle BOE$ 的度数, 进而求得 $OF = 18\text{cm}$, 即可求解.

【详解】解: 已知圆心角 n 和扇形所在圆的半径 R , 可以推的公式: $S_{\text{扇形}} = \frac{n \times \pi R^2}{360}$ ①, 并通过比较扇形

面积公式与弧长公式 $l = \frac{n\pi R}{180}$, 得出扇形面积的另一种计算方法 $S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2}lr$.

问题 I: $l = \frac{n\pi R}{180} = 4\pi$, 圆心角为 120° ,

即 $\frac{120}{180}\pi R = 4\pi$,

$\therefore R = 6$,

$\therefore S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2} \times 4\pi \times 6 = 12\pi$;

(2) 他的猜想正确. 理由如下:

设大扇形半径为 R , 小扇形半径为 r , 圆心角度数为 n , 则由 $l = \frac{n\pi R}{180}$ 得 $R = \frac{180}{n\pi}l_1$, $r = \frac{180}{n\pi}l_2$

$\therefore$ 花坛的面积 $S = \frac{1}{2}l_1R - \frac{1}{2}l_2r = \frac{1}{2}l_1 \times \frac{180}{n\pi}l_1 - \frac{1}{2}l_2 \times \frac{180}{n\pi}l_2$

$$\begin{aligned}
&= \frac{90}{n\pi} (l_1^2 - l_2^2) \\
&= \frac{90}{n\pi} (l_1 + l_2)(l_1 - l_2) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{180}{n\pi} \left(\frac{n\pi}{180} R - \frac{n\pi}{180} r \right) (l_1 + l_2) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (l_1 + l_2) (R - r) \\
&= \frac{1}{2} (l_1 + l_2) d ;
\end{aligned}$$

$$(3) \quad \because AB = 8\text{cm}, \quad CD = 6\text{cm}$$

$$\therefore l_1 = \widehat{BE} = \pi \times AB = 8\pi\text{cm}, l_2 = \widehat{DF} = \pi \times CD = 6\pi\text{cm}, \quad d = AC = BD = 6\text{cm},$$

由 (2) 可得, 侧面展开的图形 $BDFE$ 面积为 $S_{\text{扇形}OBE} - S_{\text{扇形}ODE} = \frac{1}{2} (l_1 + l_2) d = \frac{1}{2} (8\pi + 6\pi) \times 6 = 42\pi\text{cm}^2$;

$$(4) \quad \because \widehat{DF} = \frac{n\pi r}{180} = 6\pi, \quad \widehat{BE} = \frac{n\pi R}{180} = 8\pi,$$

$$\therefore r = \frac{1080}{n}, R = \frac{1440}{n},$$

$$\text{由 } \because AC = BD = 6\text{cm}, \text{ 即 } \frac{1440}{n} - \frac{1080}{n} = 6,$$

解得: $n = 60$

$$\therefore r = \frac{1080}{60} = 18\text{cm} \text{ 即 } OF = 18\text{cm}$$

故答案为: 18cm , 60° .