

2025 学年第一学期期中质量检测

八年级数学试卷

(完成时间: 90 分钟, 满分: 100 分)

一、选择题 (每题 2 分, 共 12 分)

1. 二次根式 $\sqrt{a^2+3a+2}$, $\sqrt{-xy^3}$, $\sqrt{0.75}$, $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ 中, 其中是最简二次根式的有 ()
- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查最简二次根式的定义, 熟练掌握最简二次根式的定义是解题的关键.

判断每个二次根式是否满足最简二次根式的条件: 被开方数不含分母、不含能开得尽方的因数或因式, 据此逐一判断即可.

【详解】 解: 对于 $\sqrt{a^2+3a+2}$: 被开方数可因式分解为 $(a+1)(a+2)$, 但无完全平方因式, 故为最简二次根式;

对于 $\sqrt{-xy^3}$: 被开方数含 y^2 (因 $y^3 = y^2 \cdot y$), 可化为 $|y|\sqrt{-xy}$, 故不是最简二次根式;

对于 $\sqrt{0.75}$: 被开方数 $0.75 = \frac{3}{4}$, 分母 4 是平方数, 可化为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 故不是最简二次根式;

对于 $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$: 被开方数为分式, 含分母 $a-b$, 故不是最简二次根式;

综上, 只有 1 个是最简二次根式,

故选: B.

2. 下列各组二次根式中, 属于同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{0.7}$ 与 $\sqrt{7}$

B. $\sqrt{a+b}$ 与 $\frac{1}{\sqrt{a-b}}$ (其中 $a > b > 0$)

C. $\sqrt{24}$ 与 $\sqrt{\frac{1}{6}}$

D. $\sqrt{x^3y}$ 与 $\sqrt{xy^2}$ (其中 $x > 0$, $y > 0$)

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查同类二次根式的定义, 熟练掌握同类二次根式的定义是解题的关键.

判断二次根式是否为同类，需将它们化为最简二次根式，比较被开方数是否相同，据此逐项判断即可。

【详解】解：同类二次根式需化简后被开方数相同，

选项 A: $\sqrt{0.7}$ 与 $\sqrt{7}$ ，被开方数分别为 0.7 和 7，不同，故不是同类二次根式；

选项 B: $\sqrt{a+b}$ 与 $\frac{1}{\sqrt{a-b}}$ (其中 $a > b > 0$)， $\frac{1}{\sqrt{a-b}}$ 可化为 $\frac{\sqrt{a-b}}{a-b}$ ，被开方数分别为 $a+b$ 和 $a-b$ ，

不同，故不是同类二次根式；

选项 C: $\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$ ， $\sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ ，两者最简形式被开方数均为 6，故是同类二次根式；

选项 D: $\sqrt{x^3y} = x\sqrt{xy}$ ， $\sqrt{xy^2} = y\sqrt{x}$ ，其中 $x > 0$ ， $y > 0$ ，被开方数分别为 xy 和 x ，不同，故不是同类二次根式；

故选：C.

3. 下列命题正确的是 ()

A. 两个无理数的积一定是无理数；

B. 1 的平方根是它本身；

C. $ax^2 + bx + c = 0$ 是关于 x 的一元二次方程；

D. $\sqrt{3x-2y}$ 的一个有理化因式是 $\sqrt{3x-2y}$.

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查无理数的性质、一元二次方程的定义、有理化因式的定义，熟练掌握这些定义是解题的关键。

选项 A、B、C 均存在反例或定义错误，选项 D 符合有理化因式的定义，据此解答即可。

【详解】解：A: 由于存在无理数 $\sqrt{2}$ ，其积 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ 为有理数，则 A 错误；

B: 由于 1 的平方根是 ± 1 ，不全是它本身，则 B 错误；

C: 当 $a = 0$ 时，方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 不是一元二次方程，则 C 错误；

D: 由于 $\sqrt{(3x-2y)} \times \sqrt{(3x-2y)} = 3x-2y$ 为有理式，所以 $\sqrt{3x-2y}$ 是它自己的有理化因式，则 D 正确，

故选：D.

4. 关于 x 的方程 $(m-3)x^{|m|-1} + 5x - 2 = 0$ 是一元二次方程，则 ()

A. $m = 3$

B. $m \neq 3$

C. $m = \pm 3$

D. $m = -3$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程的定义，熟练掌握一元二次方程的定义是解题的关键.
方程为一元二次方程，需满足最高次项为二次且二次项系数非零，据此计算求解即可.

【详解】解：由于方程 $(m-3)x^{|m|-1} + 5x - 2 = 0$ 是一元二次方程，

则最高次项次数： $|m|-1=2$ ，且二次项系数 $m-3 \neq 0$ ，

方程 $|m|-1=2$ ，解得 $m=3$ 或 $m=-3$ ，

不等式 $m-3 \neq 0$ ，解得 $m \neq 3$ ，

因此 $m=-3$ ，

故答案为：D.

5. $6-\sqrt{10}$ 的整数部分为 a ，小数部分为 b ，则 $b(2a+\sqrt{10})$ 的值是 ()

A. 6

B. $2\sqrt{10}$

C. 12

D. $9\sqrt{10}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了无理数的整数部分与小数部分的确定以及平方差公式的应用，熟练掌握无理数的估算方法和平方差公式是解题的关键.

先估算 $6-\sqrt{10}$ 的取值范围，确定其整数部分 a 和小数部分 b ，再将 a 、 b 代入式子，利用平方差公式计算.

【详解】解： $\because \sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$ ，即 $3 < \sqrt{10} < 4$

$\therefore -4 < -\sqrt{10} < -3$

$\therefore 6-4 < 6-\sqrt{10} < 6-3$ ，即 $2 < 6-\sqrt{10} < 3$

$\therefore$ 整数部分 $a=2$

$\therefore$ 小数部分 $b=6-\sqrt{10}-2=4-\sqrt{10}$

$\therefore b(2a+\sqrt{10})=(4-\sqrt{10})(2 \times 2+\sqrt{10})$

$=(4-\sqrt{10})(4+\sqrt{10})$

$=6$ ，

故选：A.

6. 我们把形如 $a+b\sqrt{x}$ (a, b 为有理数, $\sqrt{x}$ 为最简二次根式) 的数叫做 $\sqrt{x}$ 型无理数, 如 $2+3\sqrt{5}$ 是 $\sqrt{5}$ 型无理数, 则 $(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2$ 是 ()

A. $\sqrt{2}$ 型无理数

B. $\sqrt{3}$ 型无理数

C. $\sqrt{5}$ 型无理数

D. $\sqrt{12}$ 型无理数

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查完全平方公式和二次根式的化简, 关键是将结果化为指定形式.
先利用完全平方公式展开, 再化简二次根式, 得到结果的形式后判断类型.

【详解】 解: $(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2$
$$=(\sqrt{2})^2+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2$$
$$=2+2\sqrt{12}+6$$
$$=8+4\sqrt{3},$$

故为 $\sqrt{3}$ 型无理数,

故选: B.

二、填空题 (每题 2 分, 共 24 分)

7. 式子 $\frac{\sqrt{3-x}}{x}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \leq 3$ 且 $x \neq 0$

【解析】

【分析】 根据二次根式有意义的条件和分式有意义的条件进行求解即可.

【详解】 解: $\because$ 式子 $\frac{\sqrt{3-x}}{x}$ 在实数范围内有意义,

$$\therefore \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases},$$

$$\therefore x \leq 3 \text{ 且 } x \neq 0,$$

故答案为: $x \leq 3$ 且 $x \neq 0$.

【点睛】 本题主要考查了分式有意义的条件, 二次根式有意义的条件, 熟知分式有意义的条件是分母不为 0,

二次根式有意义的条件是被开方数大于等于 0 是解题的关键.

8. 方程 $2x = -x^2$ 的根为_____.

【答案】 $x_1 = 0$, $x_2 = -2$

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程, 熟练掌握一元二次方程的解法是解题的关键.

将方程移项化为一般形式, 再通过因式分解法进行计算求解即可.

【详解】 解: 原方程为 $2x = -x^2$,

移项得: $x^2 + 2x = 0$,

因式分解得: $x(x + 2) = 0$,

由零乘积性质,

得: $x = 0$ 或 $x + 2 = 0$,

解得: $x_1 = 0$ 或 $x_2 = -2$,

故答案为: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$.

9. 方程 $3x^2 - x - 5 = 0$ 的根为_____.

【答案】 $x_1 = \frac{1+\sqrt{61}}{6}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{61}}{6}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了公式法解一元二次方程, 利用公式法求解即可, 熟练掌握解一元二次方程的方法是解题的关键.

【详解】 解: $3x^2 - x - 5 = 0$,

$\therefore \Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-5) = 61 > 0$,

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根,

$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{61}}{2 \times 3} = \frac{1 \pm \sqrt{61}}{6}$,

$\therefore x_1 = \frac{1+\sqrt{61}}{6}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{61}}{6}$,

故答案为: $x_1 = \frac{1+\sqrt{61}}{6}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{61}}{6}$.

10. 方程 $\sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{3}x + 2\sqrt{2} = 0$ 根的判别式的值为_____.

【答案】 32

【解析】

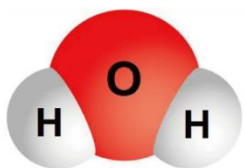
【分析】 本题考查一元二次方程根的判别式, 熟练掌握一元二次方程根的判别式公式是解题的关键. 直接应用一元二次方程根的判别式公式计算即可.

【详解】 解: 方程 $\sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{3}x + 2\sqrt{2} = 0$,

根的判别式为: $\Delta = b^2 - 4ac = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 16 \times 3 - 8 \times 2 = 48 - 16 = 32$,

故答案为: 32.

11. 我们生活在物质的世界里, 所有的物质都是由一些看不见的微小粒子构成的, 例如水就是由水分子构成的. 科学家们通过测量发现一个水分子的直径仅约 0.0000000004m , 其中 0.0000000004m 用科学记数法表示为_____.



【答案】 $4 \times 10^{-10}\text{m}$

【解析】

【分析】 本题考查了科学记数法的表示方法, 科学记数法的表现形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同, 当原数绝对值大于等于 10 时, n 是非负数, 当原数绝对值小于 1 时, n 是负数, 表示时关键是要正确确定 a 的值以及 n 的值.

【详解】 解: 0.0000000004m 用科学记数法表示为 $4 \times 10^{-10}\text{m}$,

故答案为: $4 \times 10^{-10}\text{m}$.

12. 将下列各数 $2\frac{1}{4}$ 、 $2.\dot{2}\dot{3}$ 、 $\sqrt{5}$ 用 “<” 连接: _____.

【答案】 $2.\dot{2}\dot{3} < \sqrt{5} < 2\frac{1}{4}$

【解析】

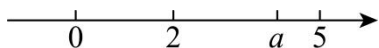
【分析】 本题主要考查了实数的大小比较. 根据实数的大小比较法则解答即可.

【详解】解：∵ $2\frac{1}{4} = 2.25$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ，

$$\therefore 2.\dot{2}\dot{3} < \sqrt{5} < 2\frac{1}{4}.$$

故答案为： $2.\dot{2}\dot{3} < \sqrt{5} < 2\frac{1}{4}$

13. 已知数 a 、 b 在数轴上对应的点如图所示，化简 $|a-2| + \sqrt{(a-5)^2} =$ _____.



【答案】3

【解析】

【分析】本题主要考查了实数的运算与数轴，算术平方根的非负性，化简绝对值等知识点，正确化简各式是解本题的关键.

观察数轴得： $2 < a < 5$ ，可得 $a-2 > 0$ ， $a-5 < 0$ ，从而原式变形为 $a-2+5-a$ ，即可求解.

【详解】解：观察数轴得： $2 < a < 5$ ，

$$\therefore a-2 > 0, a-5 < 0,$$

$$\therefore |a-2| + \sqrt{(a-5)^2}$$

$$= a-2+5-a$$

$$= 3.$$

故答案为：3.

14. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + 3x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a > -\frac{9}{4}$ 且 $a \neq 0$.

【解析】

【详解】试题分析：∵ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + 3x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，∴ $a \neq 0$ 且 $\Delta = 3^2 - 4 \times a \times (-1) = 9 + 4a > 0$ ，解得： $a > -\frac{9}{4}$ 且 $a \neq 0$. 故答案为 $a > -\frac{9}{4}$ 且 $a \neq 0$.

考点：1. 根的判别式；2. 一元二次方程的定义.

15. 不等式 $\sqrt{7}x \leq 3x - 2$ 的解集是_____.

【答案】 $x \geq \sqrt{7} + 3$

【解析】

【分析】 本题考查解一元一次不等式，熟练掌握一元一次不等式的解法是解题的关键.
通过移项、合并同类项后，由于系数为负数，需改变不等号方向，并有理化分母即可.

【详解】 解： 移项得 $\sqrt{7}x - 3x \leq -2$,

合并同类项得 $(\sqrt{7} - 3)x \leq -2$,

由于 $\sqrt{7} - 3 < 0$ ，除以负数时不等号方向改变，

得 $x \geq \frac{-2}{\sqrt{7} - 3}$,

有理化分母： $x \geq \frac{-2(\sqrt{7} + 3)}{(\sqrt{7} - 3)(\sqrt{7} + 3)} = \frac{-2(\sqrt{7} + 3)}{7 - 9} = \frac{-2(\sqrt{7} + 3)}{-2} = \sqrt{7} + 3$,

故解集为： $x \geq \sqrt{7} + 3$.

16. 若关于 x 的方程 $x^2 + (m-1)x + m^2 = 0$ 的两根互为倒数，则 m 的值为_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 根据方程的两根互为倒数结合根的判别式以及根与系数的关系，即可得出关于 m 的一元二次不等式以及一元二次方程，解之即可得出结论.

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (m-1)x + m^2 = 0$ 的两根互为倒数，

$\therefore m^2 = 1$ ，且 $\Delta = (m-1)^2 - 4m^2 \geq 0$ ，

$\therefore m = -1$.

故答案为： -1.

【点睛】 本题考查了根与系数的关系以及根的判别式，根据根的判别式及根与系数的关系找出关于 m 的一元二次不等式以及一元二次方程是解题的关键.

17. 定义一种新的运算“@”，“@”的运算法则为： $a @ b = \sqrt{ab + 3}$ ，则 $(2 @ 3) @ 5 =$ _____.

【答案】 $3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 根据新定义运算法则列式计算，先算小括号里面的，然后算括号外面的.

【详解】 解： 原式 $= \sqrt{2 \times 3 + 3} @ 5$,

$$= \sqrt{9} @ 5,$$

$$= 3 @ 5,$$

$$= \sqrt{3 \times 5 + 3},$$

$$= \sqrt{18},$$

$$= 3\sqrt{2},$$

故答案为: $3\sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查利用二次根式的性质化简，解题的关键是理解新定义运算法则，掌握二次根式的性质，正确化简二次根式.

18. 若方程 $(x-1)(x^2-2x+m)=0$ 的三个根可以作为一个三角形的三边之长，则 m 的取值范围: ____.

【答案】 $\frac{3}{4} < m \leq 1$

【解析】

【分析】 首先根据题意得出方程的一个根为 1，然后设另一个一元二次方程的两个根为 a 和 b ，根据根的判别式 $\Delta = 4 - 4m \geq 0$ 和三角形三边的关系 $|a-b| < 1$ 得出 m 的取值范围.

【详解】 解: $\because (x-1)(x^2-2x+m)=0$,

$$\therefore x-1=0 \text{ 或 } x^2-2x+m=0,$$

$$\therefore \text{原方程的一个根为 } 1,$$

$$\text{设 } x^2-2x+m=0 \text{ 的两根为 } a、b,$$

$$\text{则 } \Delta = 4 - 4m \geq 0, \text{ 解得 } m \leq 1,$$

$$\therefore a+b=2, ab=m,$$

$$\text{又 } \therefore |a-b| = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} = \sqrt{4-4m} < 1,$$

$$\therefore 4-4m < 1,$$

$$\text{解得 } m > \frac{3}{4},$$

$$\therefore \frac{3}{4} < m \leq 1.$$

$$\text{故答案为 } \frac{3}{4} < m \leq 1.$$

【点睛】 本题考查了一元二次方程的根的判别式、根与系数的关系以及三角形的三边关系等知识，属于常考题型，熟练掌握上述知识是解题的关键.

三、计算题 (每题 5 分, 共 30 分)

19. 计算: $\sqrt{32} - 6\sqrt{\frac{1}{2}} + (2\sqrt{3} + 1)(2\sqrt{3} - 1)$

【答案】 $11 + \sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的运算, 熟练掌握二次根式的化简方法是解题的关键.

先化简至最简二次根式, 再合并同类项计算即可.

【详解】 解: $\sqrt{32} - 6\sqrt{\frac{1}{2}} + (2\sqrt{3} + 1)(2\sqrt{3} - 1)$

$$= 4\sqrt{2} - 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + (2\sqrt{3})^2 - 1$$
$$= 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 12 - 1$$
$$= 11 + \sqrt{2}.$$

20. 计算: $\left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \div \frac{3}{5}\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \frac{2}{b}\sqrt{ab^3} (a > 0)$

【答案】 $-5ab\sqrt{ab}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的乘除混合运算, 熟练掌握二次根式的化简方法和乘除运算法则是解题的关键.

先将各项根式化为最简形式, 再根据二次根式的乘除运算法则, 从左到右依次进行计算.

【详解】 解: $\left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \div \frac{3}{5}\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \frac{2}{b}\sqrt{ab^3}$

$$= \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^2 \cdot ab}\right) \div \left(\frac{3}{5}\sqrt{\frac{ab}{b^2}}\right) \cdot \left(\frac{2}{b}\sqrt{ab \cdot b^2}\right)$$
$$= \left(-\frac{3}{2}a\sqrt{ab}\right) \div \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{b}\right) \cdot \left(\frac{2}{b} \cdot b\sqrt{ab}\right)$$
$$= \left(-\frac{3}{2}a\sqrt{ab}\right) \cdot \left(\frac{5b}{3\sqrt{ab}}\right) \cdot (2\sqrt{ab})$$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{3}{2}a \cdot \frac{5b}{3}\right) \cdot \left(\sqrt{ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}}\right) \cdot 2\sqrt{ab} \\
&= -\frac{5ab}{2} \times 2\sqrt{ab} \\
&= -5ab\sqrt{ab}.
\end{aligned}$$

21. 计算: $12 \div (\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (\sqrt{2})^3$.

【答案】 $12\sqrt{3} - 10\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的运算, 熟练掌握二次根式的运算是解题的关键.

首先对分母 $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ 进行有理化, 然后计算 $(\sqrt{2})^3$, 最后合并同类项.

【详解】 解: $12 \div (\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (\sqrt{2})^3$

$$\begin{aligned}
&= \frac{12(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} + 2\sqrt{2} \\
&= 12\sqrt{3} - 12\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \\
&= 12\sqrt{3} - 10\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

22. 解方程: $(3x-1)^2 - 4(x+2)^2 = 0$

【答案】 $x_1 = 5, \quad x_2 = -\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程, 熟练掌握一元二次方程的解法是解题的关键.

该方程可通过平方差公式因式分解, 通过零乘积的性质进行计算求解即可.

【详解】 解: $(3x-1)^2 - 4(x+2)^2 = 0$

整理得, $(3x-1)^2 - [2(x+2)]^2 = 0$

因式分解得, $[(3x-1) - 2(x+2)] \times [(3x-1) + 2(x+2)] = 0$

化简得, $(x-5)(5x+3) = 0$

令 $x-5=0$ 或 $5x+3=0$

解得 $x_1 = 5$, $x_2 = -\frac{3}{5}$.

23. 用配方法解方程: $2x^2 - 8x - 5 = 0$.

【答案】 $x_1 = 2 + \frac{\sqrt{26}}{2}$, $x_2 = 2 - \frac{\sqrt{26}}{2}$.

【解析】

【分析】 本题主要考查了用配方法解一元二次方程, 熟练掌握配方法的步骤 (化二次项系数为1、配方、开方求解) 是解题的关键.

先将二次项系数化为1, 再在方程两边加上一次项系数一半的平方, 将方程左边配成完全平方式, 最后用直接开平方法求解.

【详解】 解: $2x^2 - 8x - 5 = 0$,

$$x^2 - 4x - \frac{5}{2} = 0,$$

$$x^2 - 4x = \frac{5}{2},$$

$$x^2 - 4x + 4 = \frac{5}{2} + 4,$$

$$(x-2)^2 = \frac{13}{2},$$

$$x-2 = \pm \frac{\sqrt{26}}{2},$$

$$\therefore x_1 = 2 + \frac{\sqrt{26}}{2}, \quad x_2 = 2 - \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

24. 解方程: $(x^2 - 4x)^2 - 9(x^2 - 4x) - 36 = 0$

【答案】 $x = -2$ 或 $x = 1$ 或 $x = 3$ 或 $x = 6$

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程, 熟练掌握一元二次方程的解法是解题的关键.

通过换元法, 设 $y = x^2 - 4x$, 将原方程转化为关于 y 的二次方程求解, 然后代回解关于 x 的方程.

【详解】 解: 设 $y = x^2 - 4x$,

$$\text{则 } y^2 - 9y - 36 = 0,$$

$$\text{因式分解, } (y-12)(y+3) = 0,$$

解得 $y=12$ 或 $y=-3$,

当 $y=12$ 时, 即

$$x^2 - 4x = 12$$

移项得, $x^2 - 4x - 12 = 0$,

因式分解得, $(x-6)(x+2) = 0$

解得 $x=6$ 或 $x=-2$,

当 $y=-3$ 时, 即

$$x^2 - 4x = -3$$

移项得, $x^2 - 4x + 3 = 0$,

因式分解得, $(x-3)(x-1) = 0$

解得 $x=3$ 或 $x=1$,

综上, 原方程的解为 $x=-2$ 或 $x=1$ 或 $x=3$ 或 $x=6$.

四、解答题 (共 34 分)

25. 已知实数 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f , 且 a 、 b 互为倒数, c 、 d 互为相反数, e 的绝对值为 $\sqrt{2}$, f 的算术平方根是 8, 求 $-2ab + \frac{c+d}{5} + e^2 + \sqrt[3]{f}$ 的值.

【答案】4

【解析】

【分析】本题考查整式的运算, 熟练掌握代数式的化简求值是解题的关键.

根据条件, a 、 b 互为倒数, 则 $ab=1$; c 、 d 互为相反数, 则 $c+d=0$; e 的绝对值为 $\sqrt{2}$, 则 $e^2=2$; f 的算术平方根是 8, 则 $f=64$, 代入表达式计算即可.

【详解】解: 根据题意得, a 、 b 互为倒数, 则 $ab=1$,
 c 、 d 互为相反数, 则 $c+d=0$,

e 的绝对值为 $\sqrt{2}$, 则 $|e|=\sqrt{2}$, 即 $e^2=(\sqrt{2})^2=2$,

f 的算术平方根是 8, 则 $f=64$, $\sqrt[3]{64}=4$,

$$\begin{aligned} & -2ab + \frac{c+d}{5} + e^2 + \sqrt[3]{f} \\ &= -2 \times 1 + \frac{0}{5} + 2 + 4 \end{aligned}$$

= 4.

26. 先化简, 再求值: $\frac{4a-9b}{2\sqrt{a}+3\sqrt{b}} - \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, 其中 $a=12$, $b=\frac{1}{3}$.

【答案】 $\sqrt{a}-2\sqrt{b}$, $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的化简求值, 解题关键是利用乘法公式化简.

先利用平方差公式、完全平方公式进行约分, 然后合并同类二次根式, 再代入求解.

【详解】 解: 原式 = $\frac{(2\sqrt{a}+3\sqrt{b})(2\sqrt{a}-3\sqrt{b})}{2\sqrt{a}+3\sqrt{b}} - \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

$$= (2\sqrt{a}-3\sqrt{b}) - (\sqrt{a}-\sqrt{b})$$
$$= 2\sqrt{a}-3\sqrt{b}-\sqrt{a}+\sqrt{b}$$
$$= \sqrt{a}-2\sqrt{b},$$

当 $a=12$, $b=\frac{1}{3}$ 时, 原式 = $\sqrt{12}-2\sqrt{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

27. 请证明: 无论 k 取何值时, 关于 x 的方程 $3x^2+4kx+k^2=8$ 有实数根, 并解出此时方程的根.

【答案】 见解析; $x = \frac{-2k \pm \sqrt{k^2+24}}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程, 根的判别式, 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2-4ac$ 有如下关系: 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实数根. 根据根的判别式进行证明即可, 用公式法解一元二次方程即可.

【详解】 解: $3x^2+4kx+k^2=8$ 变为一般形式: $3x^2+4kx+k^2-8=0$,

$$a=3, \quad b=4k, \quad c=k^2-8,$$

$$\Delta = b^2-4ac = (4k)^2 - 4 \times 3(k^2-8) = 4k^2+96,$$

$$\because k^2 \geq 0,$$

$$\therefore 4k^2+96 > 0,$$

∴ 关于 x 的方程 $3x^2 + 4kx + k^2 = 8$ 有实数根,

$$\therefore x = \frac{-4k \pm \sqrt{4k^2 + 96}}{2 \times 3} = \frac{-2k \pm \sqrt{k^2 + 24}}{3}.$$

28. 关于 x 的方程 $5x^2 - 10x + 2 = 0$ 有两个实数根 x_1 、 x_2 , 请求下列各式的值:

(1) 填空: $x_1 + x_2 =$ _____; $x_1 \cdot x_2 =$ _____;

(2) $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$;

(3) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$.

【答案】(1)

2, $\frac{2}{5}$

(2)

$\frac{18}{5}$

(3)

8

【解析】

【分析】 本题主要考查一元二次方程根与系数的关系, 掌握根与系数的关系, 乘法公式的变形计算是关键.

(1) 确定一元二次方程二次项, 一次项, 常数项的值, 根据根与系数的关系 ($x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$)

代入求值即可;

(2) 运用乘法公式变形计算即可求解;

(3) 根据分式的计算法则得到 $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2^2 + x_1^2}{x_1x_2}$, 代入计算即可.

【小问 1 详解】

解: 关于 x 的方程 $5x^2 - 10x + 2 = 0$ 有两个实数根 x_1 、 x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{-10}{5} = 2, x_1x_2 = \frac{2}{5},$$

故答案为: $2, \frac{2}{5}$;

【小问 2 详解】

解: $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$

$$\begin{aligned}
 &= (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 \\
 &= 2^2 - \frac{2}{5} \\
 &= \frac{18}{5};
 \end{aligned}$$

【小问 3 详解】

$$\begin{aligned}
 \text{解: } \because \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} &= \frac{x_2^2 + x_1^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2}, \\
 \therefore \text{原式} &= \frac{2^2 - 2 \times \frac{2}{5}}{\frac{2}{5}} = 8.
 \end{aligned}$$

29. 对于三个数 a, b, c , 用 $M\{a, b, c\}$ 表示这三个数的平均数; 用 $\min\{a, b, c\}$ 表示这三个数中最小的数. 如:

$$M\{1, 2, 3\} = \frac{1+2+3}{3} = 2, \quad \min\{1, 2, 3\} = 1.$$

(1) 填空: $M\{\sqrt{5}, \sqrt{2}, \sqrt{13}\} = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \min\{\sqrt{6}, \pi, \sqrt{15}\} = \underline{\hspace{2cm}};$

(2) 如果 $M\{2, 4, x\} = \min\{4, 5, x\}$, 求 x 的值.

(3) 解方程 $x^2 = \min\{x+3, 3, x+2\}$.

【答案】(1) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{13}}{3}, \sqrt{6}$

(2) $x = 3$ 或 6

(3) $x = -1$ 或 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】本题主要考查了平均数的计算、数的大小比较、解一元二次方程, 熟练掌握平均数公式、分情况讨论的方法是解题的关键.

(1) 第一空根据平均数公式计算三个数的平均数; 第二空比较三个数的大小得出最小值.

(2) 先根据平均数公式表示出 $M\{2, 4, x\}$, 再分情况讨论 $\min\{4, 5, x\}$, 结合等式求解 x .

(3) 先分析 $\min\{x+3, 3, x+2\}$ 的取值情况, 再分情况解方程.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } M\{\sqrt{5}, \sqrt{2}, \sqrt{13}\} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{13}}{3},$$

$$\because \sqrt{6} \approx 2.45, \pi \approx 3.14, \sqrt{15} \approx 3.87,$$

$$\therefore \min\{\sqrt{6}, \pi, \sqrt{15}\} = \sqrt{6},$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{13}}{3}, \sqrt{6};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } M\{2, 4, x\} = \frac{2+4+x}{3} = \frac{x+6}{3},$$

分情况讨论:

$$\text{当 } x \leq 4 \text{ 时, } \min\{4, 5, x\} = x, \text{ 则 } \frac{x+6}{3} = x, \text{ 解得 } x = 3, \text{ 符合 } x \leq 4.$$

$$\text{当 } 4 < x \leq 5 \text{ 时, } \min\{4, 5, x\} = 4, \text{ 则 } \frac{x+6}{3} = 4, \text{ 解得 } x = 6, \text{ 不符合 } 4 < x \leq 5, \text{ 舍去.}$$

$$\text{当 } x > 5 \text{ 时, } \min\{4, 5, x\} = 4, \text{ 则 } \frac{x+6}{3} = 4, \text{ 解得 } x = 6, \text{ 符合 } x > 5.$$

综上, $x = 3$ 或 $x = 6$;

【小问 3 详解】

$$\text{解: } \because x+2 < x+3,$$

$$\therefore \min\{x+3, 3, x+2\} \text{ 为 } x+2 \text{ 或 } 3,$$

分情况讨论:

$$\text{当 } x+2 \leq 3, \text{ 即 } x \leq 1 \text{ 时, } \min\{x+3, 3, x+2\} = x+2,$$

$$\therefore x^2 = x+2, \text{ 即 } x^2 - x - 2 = 0,$$

$$(x-2)(x+1) = 0,$$

解得 $x = 2$ (舍去, 因为 $x \leq 1$) 或 $x = -1$.

$$\text{当 } x+2 > 3, \text{ 即 } x > 1 \text{ 时, } \min\{x+3, 3, x+2\} = 3,$$

$$\therefore x^2 = 3,$$

解得 $x = \sqrt{3}$ 或 $x = -\sqrt{3}$ (舍去, 因为 $x > 1$).

综上, $x = -1$ 或 $x = \sqrt{3}$.