

## 2025 学年度第一学期八年级数学期中考试试卷 (2025. 11)

### 一、选择题: (本题共 6 小题, 每小题 2 分, 共 12 分.)

1. 下列计算正确的是 ( )

A.  $3\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

B.  $\sqrt{4} + \sqrt{9} = \sqrt{13}$

C.  $2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$

D.  $\sqrt{(-3)^2} = -3$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的混合运算, 熟练掌握计算法则是解题的关键.

根据二次根式的加法, 减法, 乘法法则, 性质进行计算, 逐一判断即可解答.

【详解】解: A、 $3\sqrt{5} \times \sqrt{5}$ : 根据二次根式乘法法则,  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ , 则

$3\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 3 \times (\sqrt{5} \times \sqrt{5}) = 3 \times \sqrt{25} = 3 \times 5 = 15$ , 但选项 A 结果为  $4\sqrt{5}$ , 显然 A 错误;

B、 $\sqrt{4} + \sqrt{9}$ : 直接计算得  $\sqrt{4} = 2$ ,  $\sqrt{9} = 3$ , 故  $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$ , 而  $\sqrt{13} \approx 3.605 \neq 5$ , 因此选项 B 错误;

C、 $2\sqrt{3} - \sqrt{3}$ : 合并同类二次根式, 系数相减:  $2\sqrt{3} - \sqrt{3} = (2-1)\sqrt{3} = \sqrt{3}$ , 与选项 C 结果一致, 故正确;

D、 $\sqrt{(-3)^2}$ : 先计算被开方数:  $(-3)^2 = 9$ , 则  $\sqrt{9} = 3$ , 但选项 D 结果为  $-3$ , 显然 D 错误;

故选: C

2. 一列客车已经晚点 6min, 如果将速度加快 10km/h, 那么继续行驶 20km 便可正点运行, 如果设客车原来行驶的速度是  $x$ km/h, 那么可列出的分式方程为 ( )

A.  $\frac{20}{x} - \frac{20}{x+10} = 6$

B.  $\frac{20}{x} - \frac{20}{x+10} = \frac{1}{10}$

C.  $\frac{20}{x+10} - \frac{20}{x} = 6$

D.  $\frac{20}{x+10} - \frac{20}{x} = \frac{1}{10}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查用分式方程解决行程问题, 得到时间的等量关系是解决本题的关键.

根据时间差等于晚点时间列出方程, 需注意单位转换, 6 分钟转换为  $\frac{1}{10}$  小时.

【详解】解: 设客车原来速度为  $x$ km/h,

则行驶 20km 原需时间  $\frac{20}{x}$  小时,

加快后速度  $(x+10)$  km/h, 需时间  $\frac{20}{x+10}$  小时,

$\therefore$  时间差为晚点时间 6 分钟  $= \frac{1}{10}$  小时,

$$\therefore \frac{20}{x} - \frac{20}{x+10} = \frac{1}{10},$$

故选 B.

3. 把二次三项式  $2x^2 - 8xy + 5y^2$  因式分解, 下列结果正确的是 ( )

A.  $\left(x - \frac{4 - \sqrt{6}}{2}y\right)\left(x - \frac{4 + \sqrt{6}}{2}y\right)$

B.  $2\left(x + \frac{4 - \sqrt{6}}{2}y\right)\left(x + \frac{4 + \sqrt{6}}{2}y\right)$

C.  $2\left(x - \frac{4 - \sqrt{6}}{2}y\right)\left(x - \frac{4 + \sqrt{6}}{2}y\right)$

D.  $(2x - 4y + \sqrt{6}y)\left(x - \frac{4 + \sqrt{6}}{2}y\right)$

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程和在实数内分解因式, 能求出方程  $2x^2 - 8xy + 5y^2 = 0$  的解是解此题的关键. 先把  $y$  看出已知数求出关于  $x$  的方程  $2x^2 - 8xy + 5y^2 = 0$  的解, 再分解因式即可.

【详解】 解:  $2x^2 - 8xy + 5y^2 = 0$ ,

$$\Delta = 64y^2 - 4 \times 2 \times 5y^2 = 24y^2,$$

$$\text{则 } x = \frac{8y \pm \sqrt{24y^2}}{4} = \frac{8y \pm 2\sqrt{6y^2}}{4} = \frac{4y \pm \sqrt{6y^2}}{2},$$

$$\text{所以 } 2x^2 - 8xy + 5y^2 = 2\left(x - \frac{4 - \sqrt{6}}{2}y\right)\left(x - \frac{4 + \sqrt{6}}{2}y\right),$$

故选: C.

4. 关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 + (2m-3)x + m^2 + 1 = 0$  的两实根  $x_1, x_2$ , 且满足  $\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} = 1$ , 则  $m$  的值为

( )

A. 1 或 5

B. 1 或 -5

C. -5

D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查了根与系数的关系，一元二次方程根的判别式，一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  的根

与系数的关系为：  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ，  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$  . 根据根与系数的关系得到  $x_1 + x_2 = -(2m-3)$ ，  $x_1 \cdot x_2 = m^2 + 1$ ，

整理代入  $\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} = \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = 1$ ，可求得  $m$  的值，再根据判别式得出  $m \leq \frac{5}{12}$  即可求解.

【详解】 解：  $\because x_1, x_2$  是方程  $x^2 + (2m-3)x + m^2 + 1 = 0$  的两实根，

$$\therefore x_1 + x_2 = -(2m-3), \quad x_1 \cdot x_2 = m^2 + 1,$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2m-3)^2 - 4(m^2 + 1) = 4m^2 - 12m + 9 - 4m^2 - 4 \geq 0,$$

$$\therefore 12m - 5 \leq 0, \quad \text{解得: } m \leq \frac{5}{12},$$

$$\therefore \frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} = \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = 1,$$

$$\therefore \frac{-2(2m-3)}{m^2 + 1} = 1,$$

$$\text{整理得 } m^2 + 4m - 5 = 0,$$

$$\text{解得 } m = -5 \text{ 或 } m = 1 \text{ (舍去),}$$

$$\therefore m = -5;$$

故选：C.

5. 在下列条件；①  $\angle A + \angle B = \angle C$ ；②  $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$ ；③  $\angle A = \angle B = 2\angle C$ ；④  $\angle A = \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{3}\angle C$ ；

⑤  $\angle A = 2\angle B = 3\angle C$  中，能确定  $ABC$  为直角三角形的条件有 ( )

A. 5 个

B. 4 个

C. 3 个

D. 2 个

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查了三角形的内角和定理，直角三角形的定义，利用三角形的内角和定理求出角的度数，即可分别进行判断.

【详解】 解：①由  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$  得到  $2\angle C = 180^\circ$ ，即  $\angle C = 90^\circ$ ，是直角三角形；

②由题可得  $\angle C = 180^\circ \times \frac{3}{1+2+3} = 90^\circ$ ，是直角三角形；

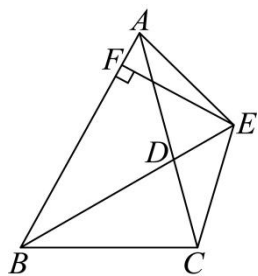
③由  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$  得到  $2\angle C + 2\angle C + \angle C = 180^\circ$ ，解得  $\angle C = 36^\circ$ ， $\angle A = \angle B = 72^\circ$ ，不是直角三角形；

④由  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$  得到  $\angle A + 2\angle A + 3\angle A = 180^\circ$ ，解得  $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，是直角三角形；

⑤由  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$  得到  $\angle A + \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{3}\angle A = 180^\circ$ ，解得  $\angle A = \left(\frac{1080}{11}\right)^\circ$ ，不是直角三角形；

故选：C.

6. 已知：如图， $BD$  为  $\triangle ABC$  的角平分线，且  $BD = BC$ ， $E$  为  $BD$  延长线上的一点， $BE = BA$ ，过  $E$  作  $EF \perp AB$ ， $F$  为垂足. 下列结论：①  $\triangle ABD \cong \triangle EBC$ ；②  $\angle BCE + \angle BCD = 180^\circ$ ；③  $AD = AE = EC$ ；④  $BA + BC = 2BF$ . 其中正确的是 ( )



A. ①②③

B. ①②④

C. ②③④

D. ①②③④

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了全等三角形的判定与性质，角平分线，本题中熟练求证三角形全等和全等三角形对边应角、对应边相等的性质是解题的关键.

先证明  $\triangle ABD \cong \triangle EBC$  (SAS)，可得  $\angle BCE = \angle BDA$ ， $AD = EC$  可得①②正确，再根据角平分线的性质可求得  $\angle DAE = \angle DCE$ ，即③正确，根据③可求得④正确.

【详解】解：∵  $BD$  为  $\triangle ABC$  的角平分线，

∴  $\angle ABD = \angle CBD$ ，

在  $\triangle ABD$  和  $\triangle EBC$  中，

$$\begin{cases} BD = BC \\ \angle ABD = \angle EBC, \\ BA = BE \end{cases}$$

∴  $\triangle ABD \cong \triangle EBC$  (SAS)，①正确；

$$\because BD = BC, BE = BA,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BCD = \frac{180^\circ - \angle CBD}{2}, \quad \angle BEA = \angle BAE = \frac{180^\circ - \angle ABD}{2},$$

$$\therefore \angle BCD = \angle BDC = \angle BAE = \angle BEA,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle EBC,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle BDA,$$

$$\therefore \angle BCE + \angle BCD = \angle BDA + \angle BDC = 180^\circ, \quad \textcircled{2} \text{正确},$$

$$\because \angle BCE = \angle BDA, \quad \angle BCE = \angle BCD + \angle DCE, \quad \angle BDA = \angle DAE + \angle BEA, \quad \angle BCD = \angle BEA,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle DAE,$$

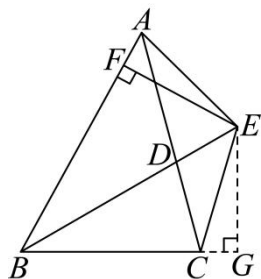
$$\therefore AE = EC,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle EBC,$$

$$\therefore AD = EC,$$

$$\therefore AD = AE = EC, \quad \textcircled{3} \text{正确};$$

过  $E$  作  $EG \perp BC$ , 交  $BC$  的延长线于点  $G$ ,



$$\because BD \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore EF = EG,$$

在  $\text{Rt}\triangle BEG$  和  $\text{Rt}\triangle BEF$  中,

$$\begin{cases} BE = BE \\ EG = EF \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BEG \cong \text{Rt}\triangle BEF \text{ (HL)},$$

$$\therefore BG = BF,$$

在  $\text{Rt}\triangle CEG$  和  $\text{Rt}\triangle AEF$  中,

$$\begin{cases} CE = AE \\ EG = EF \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle CEG \cong \text{Rt}\triangle AEF \text{ (HL)},$$

$$\therefore AF = CG,$$

$\therefore BA + BC = BF + FA + BG - CG = BF + BG = 2BF$ , ④正确;

故选 D.

## 二、填空题: (本题共 12 小题, 每小题 2 分, 共 24 分.)

7. 要使得代数式  $\frac{\sqrt{6-x}}{x}$  有意义, 那么  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $x \leq 6$  且  $x \neq 0$

**【解析】**

**【分析】** 本题主要考查了分式有意义的条件和二次根式有意义的条件, 熟练掌握相关知识是解题关键. 根据分式有意义的条件和二次根式有意义的条件求解即可.

**【详解】** 解: 若代数式  $\frac{\sqrt{6-x}}{x}$  有意义,

则有  $6-x \geq 0$  且  $x \neq 0$ ,

解得  $x \leq 6$  且  $x \neq 0$ .

故答案为:  $x \leq 6$  且  $x \neq 0$ .

8. 化简  $\frac{2}{\sqrt{5}+1}$  的结果是\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

**【解析】**

**【分析】** 本题考查了分母有理化, 分子分母同时乘以  $\sqrt{5}-1$ , 即可求解.

**【详解】** 解:  $\frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

故答案为:  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

9. 如果最简二次根式  $a\sqrt{3+a}$  与  $\sqrt{b}$  是同类二次根式, 那么  $b$  的值等于\_\_\_\_\_.

**【答案】** 7

**【解析】**

**【分析】** 本题考查同类二次根式, 根据同类二次根式的定义得到  $a-2=2$ ,  $3+a=b$ , 然后求解即可, 即可得出答案. 解题的关键是掌握同类二次根式的定义: 把几个二次根式化为最简二次根式以后, 如果被开

方数相同，那么这几个二次根式叫做同类二次根式．也考查了二元一次方程组的应用．

【详解】解： $\because$ 最简二次根式 $a-2\sqrt{3+a}$ 与 $\sqrt{b}$ 是同类二次根式，

$$\therefore \begin{cases} a-2=2 \\ 3+a=b \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a=4 \\ b=7 \end{cases},$$

$\therefore b$ 的值等于7．

故答案为：7．

10. 方程 $\frac{x^2-4}{x-2}=0$ 的解是\_\_\_\_\_．

【答案】 $x=-2$

【解析】

【分析】本题考查了解分式方程，掌握解分式方程的解法是解题的关键．根据分式方程的解法即可求解．

【详解】解： $\frac{x^2-4}{x-2}=0$ ，

$$\therefore x^2-4=0,$$

解得 $x=\pm 2$ ，

经检验，当 $x=2$ 时， $x-2=2-2=0$ ，

$\therefore$ 原方程的解是 $x=-2$ ，

故答案为： $x=-2$ ．

11. 对实数 $a$ 、 $b$ ，定义运算 $a \star b = ab^2$ ，已知 $3 \star m = 18$ ，则 $m$ 的值为\_\_\_\_\_．

【答案】 $\pm\sqrt{6}$

【解析】

【分析】本题主要考查了新定义运算，利用平方根解方程，解题的关键是根据题意得出 $m$ 的方程．根据题意列出关于 $m$ 的方程，解方程即可．

【详解】解： $\because a \star b = ab^2$

$$\therefore 3 \star m = 3m^2 = 18,$$

解得： $m = \pm\sqrt{6}$ ，

故答案为:  $\pm\sqrt{6}$ .

12. 若关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2 + bx - 3 = 0$  的一个根是  $x = 1$ , 则代数式  $2024 - a - b$  的值为\_\_\_\_\_.

【答案】 2021

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的解, 已知式子的值求代数式的值, 先把  $x = 1$  代入  $ax^2 + bx - 3 = 0$ , 得  $a + b = 3$ , 则  $2024 - (a + b) = 2024 - 3 = 2021$ , 即可作答.

【详解】 解: 把  $x = 1$  代入  $ax^2 + bx - 3 = 0$ ,

得  $a + b - 3 = 0$ ,

则  $a + b = 3$ ,

则  $2024 - (a + b) = 2024 - 3 = 2021$ ,

故答案为: 2021.

13. 已知关于  $x$  的一元二次方程  $(a + 1)x^2 - 4x + 1 = 0$  有两个不相等的实数根, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

【答案】  $a < 3$  且  $a \neq -1$

【解析】

【分析】 根据一元二次方程的定义和判别式的意义得到  $a + 1 \neq 0$  且  $\Delta = (-4)^2 - 4(a + 1) > 0$ , 然后解两个不等式得到它们的公共部分即可.

【详解】 根据题意得  $a + 1 \neq 0$  且  $\Delta = (-4)^2 - 4(a + 1) > 0$ ,

解得  $a < 3$  且  $a \neq -1$ .

故答案为  $a < 3$  且  $a \neq -1$ .

【点睛】 本题考查了一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) 的根的判别式  $\Delta = b^2 - 4ac$ : 当  $\Delta > 0$ , 方程有两个不相等的实数根; 当  $\Delta = 0$ , 方程有两个相等的实数根; 当  $\Delta < 0$ , 方程没有实数根. 也考查了一元二次方程的定义.

14. 若直角三角形的两边长  $a, b$  是一元二次方程  $x^2 - 7x + 12 = 0$  的两个根, 则这个直角三角形的第三边长为\_\_\_\_\_.

【答案】 5 或  $\sqrt{7}$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解法解一元二次方程, 解一元二次方程求得直角三角形的两边长, 分两种情况

讨论求得即可.

【详解】解:  $\therefore x^2 - 7x + 12 = 0$ ,

$$(x-3)(x-4) = 0,$$

$$\therefore x-3=0 \text{ 或 } x-4=0,$$

解得  $x_1 = 3, x_2 = 4$ .

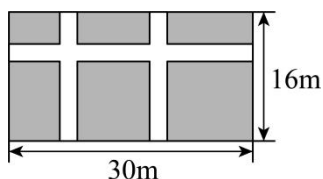
当 3 和 4 为直角边长时, 第三边长  $= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ;

当 4 为斜边长时, 第三边长  $= \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$ .

故这个直角三角形的第三边长为 5 或  $\sqrt{7}$ .

故答案为: 5 或  $\sqrt{7}$ .

15. 学校的劳动实践基地是一块长 30m、宽 16m 的矩形土地. 为便于学生参与劳动, 要在中间开辟一横两纵共三条等宽的小道 (如图所示), 使种植面积达到  $400\text{m}^2$ , 若设小道的宽为  $x\text{m}$ , 则根据题意, 列方程, 并化为一般形式是\_\_\_\_\_.



【答案】  $x^2 - 31x + 40 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用, 由题意可得除小路的其余部分可合成长为  $(30-2x)\text{m}$ , 宽为  $(16-x)\text{m}$  的矩形, 再根据“种植面积达到  $400\text{m}^2$ ”列出一元二次方程即可, 理解题意, 找准等量关系, 正确列出一元二次方程是解此题的关键.

【详解】解:  $\because$  学校的劳动实践基地是一块长 30m、宽 16m 的矩形土地, 小道的宽为  $x\text{m}$ ,

$\therefore$  除小路的其余部分可合成长为  $(30-2x)\text{m}$ , 宽为  $(16-x)\text{m}$  的矩形,

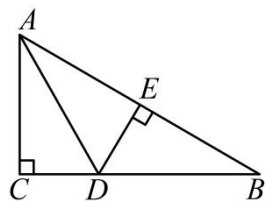
由题意可得:  $(30-2x)(16-x) = 400$ ,

化为一般式为:  $x^2 - 31x + 40 = 0$ ,

故答案为:  $x^2 - 31x + 40 = 0$ .

16. 如图, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AB$  的垂直平分线  $DE$  交  $BC$  于点  $D$ , 垂足为点  $E$ , 连接  $AD$ ,

若  $AD$  平分  $\angle CAB$ ， $BC = 6$ ，则  $BD$  的长为\_\_\_\_\_.



【答案】4

【解析】

【分析】本题主要考查了线段垂直平分线的性质，等腰三角形的性质与判定，三角形内角和定理，含  $30^\circ$  角的直角三角形的性质，由线段垂直平分线的性质得到  $DA = DB$ ，则由等边对等角和角平分线的定义可得  $\angle CAD = \angle BAD = \angle B$ ，再由三角形内角和定理可推出  $\angle CAD = 30^\circ$ ，则可得到  $BD = AD = 2CD$ ，再由线段的和差关系求解即可.

【详解】解： $\because AB$  的垂直平分线  $DE$  交  $BC$  于点  $D$ ，垂足为点  $E$ ，

$$\therefore DA = DB,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle B,$$

$$\because AD \text{ 平分 } \angle CAB,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle BAD = \angle B,$$

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD + \angle BAD + \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = 30^\circ,$$

$$\therefore BD = AD = 2CD,$$

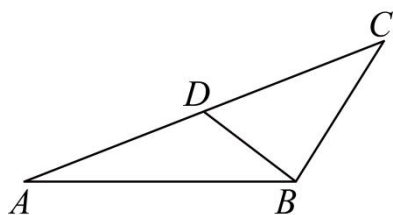
$$\because BC = CD + BD = 6,$$

$$\therefore \frac{1}{2}BD + BD = 6,$$

$$\therefore BD = 4,$$

故答案为：4.

17. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $AB = 5$ ， $BC = 3$ ，中线  $BD = 2$ ，则  $\triangle ABC$  的面积为\_\_\_\_\_.

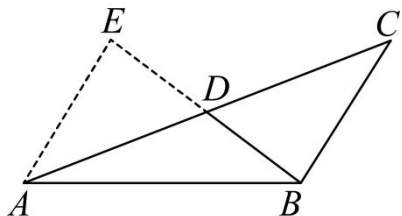


【答案】6

【解析】

【分析】 本题主要考查勾股定理逆定理及全等三角形的性质与判定，熟练掌握勾股定理逆定理及全等三角形的性质与判定是解题的关键；延长  $BD$  到点  $E$ ，使  $ED = BD = 2$ ，连接  $AE$ ，可证明  $\triangle EAD \cong \triangle BCD$ ，则  $EA = BC = 3$ ，所以  $EA^2 + BE^2 = AB^2 = 25$ ，则  $\angle AEB = 90^\circ$ ，然后问题可求解。

【详解】 解：如图，延长  $BD$  到点  $E$ ，使  $ED = BD = 2$ ，连接  $AE$ ，则  $BE = 2BD = 4$ ，



$\because BD$  是  $ABC$  的中线， $AB = 5, BC = 3$ ，

$\therefore AD = CD$ ，

$\because \angle ADE = \angle CDB$ ，

$\therefore \triangle EAD \cong \triangle BCD$  (SAS)，

$\therefore EA = BC = 3$ ， $S_{\triangle EAD} = S_{\triangle BCD}$ ，

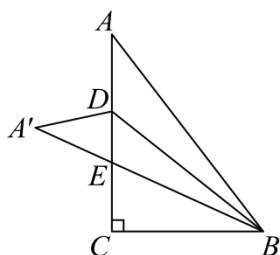
$\therefore EA^2 + BE^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = AB^2$ ，

$\therefore \triangle AEB$  是直角三角形，且  $\angle AEB = 90^\circ$ ，

$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BAD} + S_{\triangle BCD} = S_{\triangle BAD} + S_{\triangle EAD} = S_{\triangle AEB} = \frac{1}{2} AE \cdot BE = 6$ ；

故答案为：6.

18. 如图，已知  $ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ，若  $AB = 10$ ， $BC = 6$ ，点  $D$  是  $AC$  边上的一个动点，以  $BD$  为折痕将  $\triangle ABD$  折叠得到  $\triangle A'BD$ ， $A'B$  与  $AC$  交于点  $E$ ，当  $\triangle A'ED$  为直角三角形时，则  $BD$  的长为\_\_\_\_\_.



【答案】  $6\sqrt{2}$  或  $3\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了折叠和直角三角形中勾股定理的知识，掌握以上知识是解答本题的关键；

本题先在  $Rt\triangle ABC$  中，求得  $AC = 8$ ，得到  $AD = DA'$ ， $A'B = AB = 10$ ，然后再分当  $\angle A'DE = 90^\circ$  时和

$\angle A'ED = 90^\circ$  时的情况，然后根据折叠和勾股定理的知识即可求解；

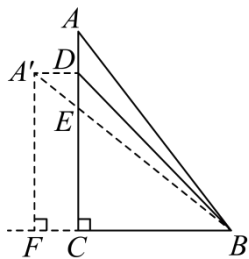
【详解】解： $\because$  在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ， $BC = 6$ ，

$\therefore$  由勾股定理得： $AC = 8$ ，

$\therefore$  以  $BD$  为折痕将  $\triangle ABD$  折叠得到  $\triangle A'BD$ ，

$\therefore AD = DA'$ ， $A'B = AB = 10$ ，

如图所示：当  $\angle A'DE = 90^\circ$  时，过点  $A'$  作  $A'F \perp BC$  的延长线于点  $F$ 。



$\because \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle A'DE = \angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle A'FC = \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore A'D \parallel BF$ ， $A'F \parallel AC$ ，

$\therefore AD = CF$ ， $DC = FA$ ，

设  $AD = DA' = x$ ，则  $BF = 6 + x$ ， $FA = 8 - x$ ，

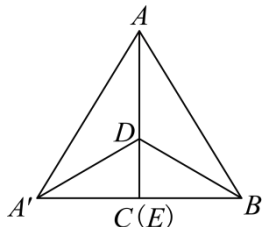
在  $\text{Rt}\triangle BFA$  中，由勾股定理得： $BA^2 = BF^2 + FA^2$ ，即  $(6 + x)^2 + (8 - x)^2 = 10^2$ ，

解得： $x_1 = 2$ ， $x_2 = 0$ （舍去），

$\therefore AD = 2$ ， $CD = FA = 8 - x = 8 - 2 = 6$ ，

$\therefore BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ ；

如图所示：当  $\angle A'ED = 90^\circ$  时，点  $C$  与点  $E$  重合。



$\therefore BA' = 10$ ， $BC = 6$ ，

$\therefore A'E = 4$ ，设  $AD = DA' = x$ ，则  $CD = 8 - x$ ，

在  $\text{Rt}\triangle A'DE$  中， $DA'^2 = DE^2 + A'E^2$ ，即  $x^2 = (8 - x)^2 + 4^2$ ，

解得： $x = 5$ ，

$$\therefore AD=5, \quad CD=8-x=8-5=3,$$

$$\therefore BD=\sqrt{DC^2+BC^2}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}.$$

综上所述,  $BD$  的长为  $6\sqrt{2}$  或  $3\sqrt{5}$ .

故答案为:  $6\sqrt{2}$  或  $3\sqrt{5}$ .

### 三、简答题: (本大题共 6 小题, 每题 5 分, 共 30 分.)

19. 计算:  $\left(3\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{\frac{1}{5}}\right)\times\sqrt{5}$

【答案】 44

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算, 利用二次根式性质化简是解题的关键.

先利用二次根式性质化简, 再进行计算即可求解.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \left(3\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{\frac{1}{5}}\right)\times\sqrt{5} \\ & =\left(6\sqrt{5}+3\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\times\sqrt{5} \\ & =\frac{44\sqrt{5}}{5}\times\sqrt{5} \\ & =\frac{44\times 5}{5} \\ & =44. \end{aligned}$$

20 用配方法解方程:  $\frac{1}{2}x^2-x-1=0$

【答案】  $x_1=1-\sqrt{3}, \quad x_2=1+\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程, 解题的关键是选择适当的方法解一元二次方程.

根据配方法求解一元二次方程求解即可.

【详解】 解:  $\frac{1}{2}x^2-x-1=0$

$$x^2-2x-2=0$$

$$x^2-2x+1-1-2=0$$

$$(x-1)^2 - 3 = 0$$

$$(x-1)^2 = 3$$

$$\therefore x-1 = \pm\sqrt{3},$$

$$\text{解得 } x_1 = 1 - \sqrt{3}, \quad x_2 = 1 + \sqrt{3}.$$

$$21. \text{ 解方程: } (2x+3)^2 = 4(2x+3)$$

$$\text{【答案】 } x_1 = -\frac{3}{2} \text{ 或 } x_2 = \frac{1}{2}$$

【解析】

【分析】移项，把  $2x+3$  看作一个整体，进行因式分解，然后求解.

$$\text{【详解】 } (2x+3)^2 - 4(2x+3) = 0$$

$$(2x+3)(2x+3-4) = 0$$

$$2x+3=0 \text{ 或 } 2x+3-4=0$$

$$x = -\frac{3}{2} \text{ 或 } x = \frac{1}{2}.$$

【点睛】 本题考查用因式分解法解一元二次方程，关键把  $2x+3$  看作整体.

$$22. \text{ 解方程: } \frac{x-10}{x^2-4} + 1 = \frac{3}{x+2}.$$

$$\text{【答案】 } x = 4$$

【解析】

【分析】 此题考查了解分式方程、平方根求解方程和完全平方公式的应用，利用了转化的思想，把方程的解代入原方程进行检验是解题的关键.

分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到  $x$  的值，经检验即可得到分式方程的解.

$$\text{【详解】 解: } \frac{x-10}{x^2-4} + 1 = \frac{3}{x+2}$$

$$\frac{x-10}{(x-2)(x+2)} + 1 = \frac{3}{x+2}$$

$$x-10 + (x-2)(x+2) = 3(x-2)$$

$$x-10 + x^2 - 4 = 3x - 6$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 - 8 = 0$$

$$(x-1)^2 = 9,$$

$$\therefore x-1 = \pm 3,$$

解得  $x = 4$  或  $x = -2$ ,

检验当  $x = 4$  时,  $(x+2)(x-2) \neq 0$ , 且代入原方程成立;

当  $x = -2$  时,  $x+2 = 0$ , 舍去,

$\therefore$  原方程的解为  $x = 4$ .

$$23. \text{ 解方程: } \frac{x-3}{x-2} - \frac{2}{x^2-3x+2} = \frac{2}{x-1}.$$

【答案】  $x = 5$

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程、平方根求解方程、完全平方公式的应用, 准确的计算是解决本题的关键. 先将分式方程化为整式方程, 求出整式方程的解得到  $x$  的值, 经检验即可得到分式方程的解.

$$\text{【详解】 解: } \frac{x-3}{x-2} - \frac{2}{x^2-3x+2} = \frac{2}{x-1}$$

$$\frac{x-3}{x-2} - \frac{2}{(x-1)(x-2)} = \frac{2}{x-1}$$

$$(x-1)(x-3) - 2 = 2(x-2)$$

$$x^2 - 4x + 3 - 2 = 2x - 4$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + 5 = 0$$

$$(x-3)^2 = 4,$$

$$\therefore x-3 = \pm 2,$$

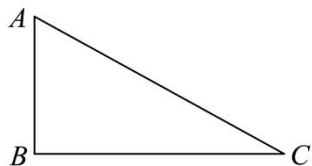
解得  $x = 1$  或  $x = 5$ ,

检验: 当  $x = 1$  时, 原方程分母  $x-1 = 0$ , 是增根, 舍去;

当  $x = 5$  时, 原方程分母均不为 0, 符合条件,

$\therefore$  原方程的解为  $x = 5$ .

24. 如图, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 30^\circ$ ,  $\angle B = 90^\circ$ .



(1) 尺规作图：在边  $BC$  上作一点  $D$ ，使得点  $D$  到边  $AB$  与边  $AC$  的距离相等（不写作法，保留作图痕迹）；

(2) 若  $CD = 4\text{cm}$ ，求  $AB$  的长.

【答案】(1) 见详解 (2)  $AB = 2\sqrt{3}\text{cm}$

【解析】

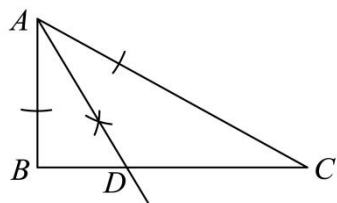
【分析】本题考查了作角平分线，角平分线的判定与性质，30 度角的直角三角形，勾股定理，等角对等边，正确掌握相关性质内容是解题的关键.

(1) 理解点  $D$  到边  $AB$  与边  $AC$  的距离相等，即作出  $\angle BAC$  的平分线，交  $BC$  于一点，即为点  $D$ ，即可作答.

(2) 先求出  $\angle BAC = 60^\circ$ ，结合角平分线的定义，得出  $\angle CAD = 30^\circ = \angle ACB$ ，根据等角对等边，得  $AD = CD = 4\text{cm}$ ，运用 30 度角的直角三角形的性质以及勾股定理列式计算，即可作答.

【小问 1 详解】

解：点  $D$  如图所示：



【小问 2 详解】

解：  $\because \angle ACB = 30^\circ$ ，  $\angle B = 90^\circ$  .

$\therefore \angle BAC = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$  ,

由 (1) 的作图痕迹，得出  $AD$  是  $\angle BAC$  的角平分线，

$\therefore \angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ = \angle ACB$  ,

$\therefore AD = CD = 4\text{cm}$  ,

在  $\text{Rt}\triangle ABD$  中，  $BD = \frac{1}{2} AD = 2\text{cm}$  ,

$\therefore AB = \sqrt{AD^2 - BD^2} = 2\sqrt{3}(\text{cm})$  .

四、解答题：（本大题共 5 题，满分 34 分）

25. 已知：  $x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$  ,  $y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$  , 求  $x^2 + xy + y^2$  的平方根；

【答案】  $\pm 3\sqrt{11}$

【解析】

【分析】 本题考查平方差公式，完全平方公式的运用，二次根式的混合运算，求一个数的平方根，根据题意结合平方差公式，完全平方公式得到  $xy$ ， $x+y$  的值，再将  $x^2+xy+y^2$  变形为  $(x+y)^2-xy$  求解，最后利用平方根概念求解，即可解题.

【详解】 解：  $\because x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}},$

$$\therefore xy = \left( \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \right) \times \left( \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \right) = 1,$$

$$x+y = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

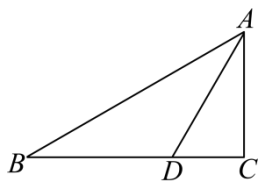
$$= 3 - 2\sqrt{6} + 2 + 3 + 2\sqrt{6} + 2$$

$$= 10,$$

$$\text{则 } x^2 + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - xy = (x+y)^2 - xy = 10^2 - 1 = 99,$$

$$\therefore x^2 + xy + y^2 \text{ 的平方根为 } \pm\sqrt{99} = \pm 3\sqrt{11}.$$

26. 如图，在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $AD$  平分  $\angle BAC$  交  $BC$  于点  $D$ .



(1) 求证：点  $D$  在  $AB$  的垂直平分线上；

(2) 若  $CD = 2$ ，求  $BD$  的长.

【答案】 (1) 见详解 (2) 4

【解析】

【分析】 本题考查角平分线的定义、线段垂直平分线的判定、 $30^\circ$ 角所对的直角边与斜边的关系.

(1) 根据题意和角平分线的定义，可以得到  $\angle BAD = \angle DAC = \frac{1}{2}\angle BAC = 30^\circ$ ，然后即可得到  $AD = BD$ ，

再根据线段垂直平分线的判定，即可证明结论成立；

(2) 根据  $30^\circ$  角所对的直角边和斜边的关系，可以得到  $AD = 2CD = 4$ ，再根据  $BD = AD$  即可.

【小问 1 详解】

证明： $\because$  在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ，

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ - \angle B = 60^\circ,$$

$\because AD$  平分  $\angle BAC$ ，

$$\therefore \angle BAD = \angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle BAD,$$

$$\therefore AD = BD,$$

$\therefore$  点  $D$  在  $AB$  的垂直平分线上；

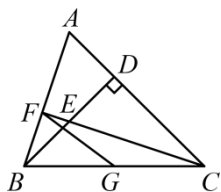
【小问 2 详解】

解：在  $\text{Rt}\triangle ACD$  中， $\angle CAD = 30^\circ$ ，

$$\therefore AD = 2CD = 2 \times 2 = 4,$$

$$\therefore BD = AD = 4.$$

27. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $BD$  为边  $AC$  上的高，且  $BD = CD$ ，在  $BD$  上截取一点  $E$  使  $CE = AB$ ，延长  $CE$  交  $AB$  于点  $F$ ， $G$  为边  $BC$  上的中点，连接  $FG$ 。



(1) 求证： $\angle ABD = \angle ECD$ ；

(2) 若  $FG \parallel AC$ ，求证： $CA = CB$ 。

【答案】(1) 证明过程见详解；

(2) 证明过程见详解。

【解析】

【分析】本题主要考查了直角三角形全等的判定，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，等腰三角形的性质和判定，平行线的性质等，熟练运用这些知识点是正确解答此题的关键。

(1) 由  $BD$  为边  $AC$  上的高，证明  $\triangle CDE$ ， $\triangle BDA$  都是直角三角形，用 HL 证明  $\text{Rt}\triangle BDA \cong \text{Rt}\triangle CDE$  即可得结论；

(2) 由  $\angle ABD = \angle ECD$  得  $\angle BFC = \angle A + \angle ECD = 90^\circ$ ，进而得出  $\triangle BCF$  是直角三角形，根据直角三角

形斜边上的中线等于斜边的一半，得  $FG = BG = \frac{1}{2}BC$ ，进而得  $\angle ABC = \angle BFG$ ，根据  $FG \parallel AC$ ，得  $\angle BFG = \angle A$ ，等量代换得  $\angle A = \angle ABC$ ，即可证明  $CA = CB$ 。

【小问 1 详解】

证明：∵  $BD$  为边  $AC$  上的高，

∴  $\triangle CDE$ ， $\triangle BDA$  都是直角三角形，

在  $\text{Rt}\triangle BDA$  和  $\text{Rt}\triangle CDE$  中，

$$\therefore \begin{cases} BA = CE \\ BD = CD \end{cases},$$

∴  $\text{Rt}\triangle BDA \cong \text{Rt}\triangle CDE$  (HL),

∴  $\angle ABD = \angle ECD$ ;

【小问 2 详解】

证明：∵  $\angle ABD = \angle ECD$ ， $\angle ABE + \angle A = 90^\circ$ ，

∴  $\angle A + \angle ECD = 90^\circ$ ，

∴  $\angle BFC = \angle A + \angle ECD = 90^\circ$ ，

即  $\triangle BCF$  是直角三角形，

∵  $G$  为边  $BC$  上的中点，

$$\therefore FG = BG = \frac{1}{2}BC,$$

∴  $\angle ABC = \angle BFG$ ，

∵  $FG \parallel AC$ ，

∴  $\angle BFG = \angle A$ ，

∴  $\angle A = \angle ABC$ ，

∴  $CA = CB$ 。

28. 上海市公安交警部门提醒市民，骑车出行必须严格遵守“一盔一带”的规定。某头盔经销商统计了某品牌头盔 9 月份到 11 月份的销量，该品牌头盔 9 月份销售 500 个，11 月份销售 720 个，9 月份到 11 月份销售量的月增长率相同。

(1) 求该品牌头盔销售量的月增长率；

(2) 若此种头盔的进价为 40 元/个，商家经过调查统计，当售价为 50 元/个时，月销售量为 500 个，若在此基础上售价每上涨 2 元/个，则月销售量将减少 10 个，为使月销售利润达到 9000 元，且尽可能让顾客得到实惠，则该品牌头盔每个售价应定为多少钱？

【答案】(1) 该品牌头盔销售量的月增长率为 20%

(2) 该品牌头盔每个售价应定为 60 元

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程的实际应用，解题的关键是根据等量关系列出方程.

(1) 设该品牌头盔销售量的月增长率为  $x$ ，根据该品牌头盔 10 月份销售 50 个，12 月份销售 72 个列出方程求解即可；

(2) 设该品牌头盔每个售价为  $y$  元，根据利润 = (售价 - 进价) × 销售量列出方程求解即可.

【小问 1 详解】

解：设该品牌头盔销售量的月增长率为  $x$ ，

依题意，得： $500(1+x)^2 = 720$

解得  $x_1 = 0.2 = 20\%$ ,  $x_2 = -2.2$  (不合题意，舍去)

答：设该品牌头盔销售量的月增长率为 20%.

【小问 2 详解】

解：设该品牌头盔每个售价为  $y$  元，依题意，得：

$$(y-40)\left(500-10\times\frac{y-50}{2}\right)=9000,$$

整理，得  $y^2 - 120y + 3500 = 0$

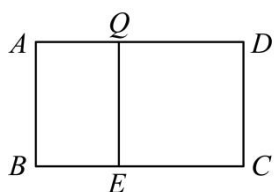
解得  $y_1 = 60, y_2 = 130$

因为尽可能让顾客得到实惠，所以  $y = 130$  不合题意，舍去.

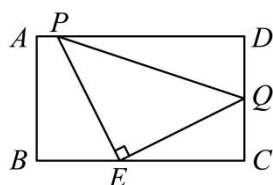
所以  $y = 60$ .

答：该品牌头盔每个售价应定为 60 元.

29. 如图①，在长方形  $ABCD$  中， $AB = 3, AD = 5$ ，点  $E$  在边  $BC$  上，且  $BE = 2$ ，动点  $P$  从点  $E$  出发，沿折线  $EB - BA - AD$  以每秒 1 个单位长度的速度运动. 作  $\angle PEQ = 90^\circ$ ,  $EQ$  交边  $AD$  或边  $DC$  于点  $Q$ ，连接  $PQ$ . 当点  $Q$  与点  $C$  重合时，点  $P$  停止运动. 设点  $P$  的运动时间为  $t$  秒. ( $t > 0$ )



图①



图②

- (1) 当点  $P$  和点  $B$  重合时, 线段  $PQ$  的长为\_\_\_\_\_.
- (2) 当点  $Q$  和点  $D$  重合时, 求线段  $PQ$  的长;
- (3) 如图②, 当点  $P$  在边  $AD$  上运动时, 当  $PQE$  的形状始终是\_\_\_\_\_.
- (4) 作点  $E$  关于直线  $PQ$  的对称点  $F$ , 当点  $F$  落在长方形  $ABCD$  的边上时, 直接写出  $t$  的值.

【答案】(1)  $\sqrt{13}$

(2)  $\sqrt{26}$

(3) 等腰直角三角形 (4)  $\frac{9-3\sqrt{5}}{2}$  秒或  $\frac{17}{6}$  秒或 7 秒

【解析】

【分析】(1) 根据平行线间的距离相等得到  $QE = AB = 3$ , 进而在  $\text{Rt}\triangle QBE$  中, 勾股定理即可求解;

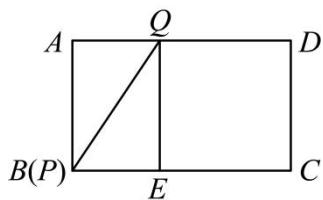
(2) 设  $AP = x$ , 则  $BP = 3 - x$ , 在  $\text{Rt}\triangle APQ$  中,  $AP^2 + AQ^2 = PQ^2$ , 在  $\text{Rt}\triangle PBE$  中,  $PB^2 + BE^2 = PE^2$ , 在  $\text{Rt}\triangle ECQ$  中,  $EC^2 + CQ^2 = EQ^2$ , 再根据  $PE^2 + EQ^2 = PQ^2$ , 进而作答即可;

(3) 过点  $P$  作  $PH \perp BC$  于点  $H$ , 证明  $\triangle PHE \cong \triangle ECQ$  (ASA), 得出  $PE = QE$ , 即可得出结论;

(4) 分三种情况讨论, 画出符合题意的示意图, 由长方形得性质和勾股定理求解即可.

【小问 1 详解】

解: 如图所示,



$\because$  四边形  $ABCD$  是长方形,

$\therefore \angle ABE = 90^\circ$ ,  $AD \parallel BC$

$\therefore \angle PEQ = 90^\circ$ ,

$\therefore AB \perp BC, QE \perp BC$ ,

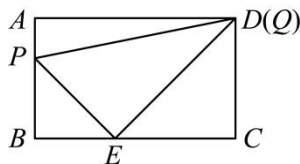
$$\therefore QE = AB = 3,$$

$$\because BE = 2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle QBE \text{ 中, } BQ = \sqrt{BE^2 + QE^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13};$$

【小问 2 详解】

解: 如图,



$\because$  四边形  $ABCD$  是长方形,

$$\therefore BC = AD = 5,$$

$$\therefore EC = BC - BE = 3,$$

设  $AP = x$ , 则  $BP = 3 - x$ ,

$$\text{在 Rt}\triangle APQ \text{ 中, } AP^2 + AQ^2 = PQ^2,$$

$$\therefore PQ^2 = 5^2 + x^2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle PBE \text{ 中, } PB^2 + BE^2 = PE^2,$$

$$\therefore PE^2 = (3 - x)^2 + 2^2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ECQ \text{ 中, } EC^2 + CQ^2 = EQ^2,$$

$$\therefore EQ^2 = 3^2 + 3^2,$$

$$\because \angle PEQ = 90^\circ,$$

$$\therefore PE^2 + EQ^2 = PQ^2,$$

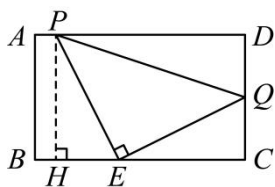
$$\therefore 2^2 + (3 - x)^2 + 3^2 + 3^2 = 5^2 + x^2,$$

故  $x = 1$ ,

$$\therefore PQ = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26};$$

【小问 3 详解】

证明: 如图, 过点  $P$  作  $PH \perp BC$  于点  $H$ ,



则同 (1) 可得  $PH = AB = 3$ ,

$$\therefore \angle PEQ = \angle PHE = 90^\circ$$

$$\therefore \angle EPH = \angle QEC = 90^\circ - \angle PEH,$$

$$\therefore EC = BC - BE = 3,$$

$$\therefore PH = EC,$$

$$\text{又 } \angle PHE = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle PHE \cong \triangle ECQ (\text{ASA}),$$

$$\therefore PE = HE,$$

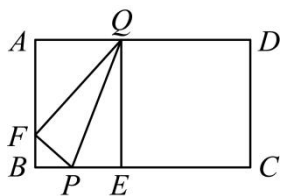
$\therefore PQE$  是等腰直角三角形;

#### 【小问 4 详解】

解: 动点  $P$  从点  $E$  出发, 沿折线  $EB - BA - AD$  以每秒 1 个单位长度的速度运动,

有以下三种情况:

①当点  $P$  在线段  $BE$  上时, 点  $E$  关于  $PQ$  的对称点  $F$  落在  $AB$  边上, 点  $Q$  在  $AD$  边上, 如图:



由上可得:  $EQ = AB = 3, AQ = BE = 2$ ,

设  $PE = y$ , 则  $PB = BE - PE = 2 - y$ ,

由对称的性质得:  $EQ = FQ = 3, PE = PF = y$ ,

在  $\text{Rt}\triangle AQF$  中, 由勾股定理得:  $AF = \sqrt{QF^2 - AQ^2} = \sqrt{5}$ ,

$$\therefore BF = AB - AF = 3 - \sqrt{5},$$

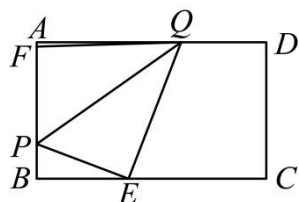
在  $\text{Rt}\triangle BFP$  中, 由勾股定理得:  $PF^2 = BF^2 + PB^2$ ,

$$\therefore (3 - \sqrt{5})^2 + (2 - y)^2 = y^2$$

解得:  $y = \frac{9-3\sqrt{5}}{2}$ , 即  $PE = \frac{9-3\sqrt{5}}{2}$ ,

$\therefore t = \frac{9-3\sqrt{5}}{2} \div 1 = \frac{9-3\sqrt{5}}{2}(\text{s})$ ;

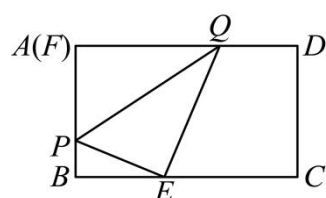
当点  $P, F$  在  $AB$  上, 点  $Q$  在  $AD$  上时,



由对称的性质得:  $\angle QFP = \angle QEP = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle A = 90^\circ$ , 点  $F$  在  $AB$  上时,

$\therefore F, A$  重合, 如图:



设  $AP = m$ , 则  $PE = AP = m, BP = AB - AP = 3 - m$ ,

在  $\text{Rt}\triangle BPE$  中, 由勾股定理得:  $BP^2 + BE^2 = PE^2$ ,

$\therefore (3-m)^2 + 2^2 = m^2$ ,

解得:  $m = \frac{13}{6}$ ,

$\therefore BP = 3 - \frac{13}{6} = \frac{5}{6}$ ,

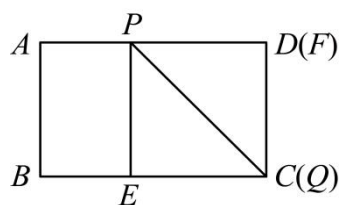
$\therefore$  运动的时间为  $t = (BE + BP) \div 1 = 2 + \frac{5}{6} = \frac{17}{6}(\text{s})$

当点  $P, F$  在  $AD$  上,  $Q$  在  $DC$  上,

由对称的性质得:  $\angle QFP = \angle QEP = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle D = 90^\circ$ , 点  $F$  在  $AD$  上时,

$\therefore F, D$  重合, 此时  $C, Q$  重合, 如图:



则由 (1) 可得  $AP = BE = 2$ ,

$\therefore$  运动时间为:  $t = (AP + AB + BE) \div 1 = 2 + 3 + 2 = 7(\text{s})$ ,

综上所述:  $t$  的值为  $\frac{9-3\sqrt{5}}{2}$  秒或  $\frac{17}{6}$  秒或 7 秒.

**【点睛】** 本题考查了长方形的性质, 勾股定理, 二次根式的混合运算, 全等三角形的判定与性质, 折叠的性质以及等腰三角形的定义等知识点, 难度较大, 解题的关键在于分类讨论.