

# 2025 学年第一学期期中质量检测

## 初二年级数学试卷

(完卷时间: 100 分钟 分值: 150 分)

### 一、选择题(本大题共 6 题, 每 4 分, 满分 24 分)

1. 下列方程中有实数解的是 ( )

A.  $x^2 + 3x + 4 = 0$       B.  $\sqrt{x} - 1 = 1 - x$       C.  $\frac{x}{x-3} = \frac{3}{x-3}$       D.  $\frac{1}{x^2 + 2} = -\frac{5}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了方程有无实数根的问题, 涉及解分式方程, 无理方程和一元二次方程, 解题的关键是熟练掌握判断方程有无实数根的方法.

A、根据一元二次方程根的判别式判断即可; B、C、D 分别解无理方程和分式方程即可.

【详解】解: A、 $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 4 = -7 < 0$ , 故该方程无实数根;

B、由  $\sqrt{x} - 1 = 1 - x$  得  $\sqrt{x} = 2 - x$ , 则  $x = (2 - x)^2$ , 解得  $x_1 = 1, x_2 = 4$ , 经检验  $x = 4$  是增根,  $x = 1$  是原方程的根, 故该方程有实数根;

C、 $\frac{x}{x-3} = \frac{3}{x-3}$ , 去分母得  $x = 3$ , 经检验  $x = 3$  是增根, 故该方程无实数根;

D、 $\frac{1}{x^2 + 2} = -\frac{5}{3}$ , 去分母得,  $3 = -5(x^2 + 2)$ , 化简得  $x^2 = -\frac{13}{5}$ , 故该方程无实数根;

故选: B.

2. 下列  $y$  关于  $x$  的函数中, 在其定义域内,  $y$  的值随  $x$  的增大而增大的函数是 ( )

A.  $y = -\frac{1}{3}x$       B.  $y = \frac{3}{x}$       C.  $y = -\frac{2}{x}$       D.  $y = 3x - 4$

【答案】D

【解析】

【分析】本题综合考查一次函数、反比例函数、正比例函数的增减性, 熟练掌握各函数的图象与性质是解题的关键.

根据一次函数, 反比例函数, 正比例函数的增减性, 逐一判断即可.

【详解】解: A、 $y = -\frac{1}{3}x$ ,

$\therefore k = -\frac{1}{3} < 0$ ,

$\therefore y$  随  $x$  增大而减小，故此选项不符合题意；

B、 $y = \frac{3}{x}$ ，为反比例函数， $k = 3 > 0$ ，在  $x < 0$  和  $x > 0$  时，在每个象限内  $y$  均随  $x$  增大而减小，故此选项不符合题意；

C、 $y = -\frac{2}{x}$ ，为反比例函数， $k = -2 < 0$ ，在  $x < 0$  和  $x > 0$  时，在每个象限内  $y$  均随  $x$  增大而增大，但不是连续的增大，故此选项不符合题意；

D、 $y = 3x - 4$ ，

$\therefore k = 3 > 0$ ，

$\therefore y$  随  $x$  增大而增大，故此选项符合题意。

故选：D。

3. 当  $k > 0, b < 0$  时，一次函数  $y = kx + b$  的图象不经过（ ）

- A. 第一象限                      B. 第二象限                      C. 第三象限                      D. 第四象限

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了一次函数的图象。根据一次函数的图象解答即可。

【详解】解： $\because k > 0, b < 0$ ，

$\therefore$  一次函数  $y = kx + b$  的图象经过一、三、四象限，

$\therefore$  不经过第二象限。

故选 B。

4. 综合实践课上，老师发给每人一张印有  $\text{Rt}\triangle ABC$  的卡片，如图 1，然后要求同学们画一个与  $\text{Rt}\triangle ABC$  全等的三角形。小张同学先画出了  $\angle MB'N = 90^\circ$  后，后续的作图步骤如图 2 所示，则能判定

$\text{Rt}\triangle A'B'C' \cong \text{Rt}\triangle ABC$  的依据是（ ）。

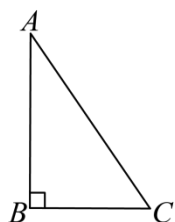


图1

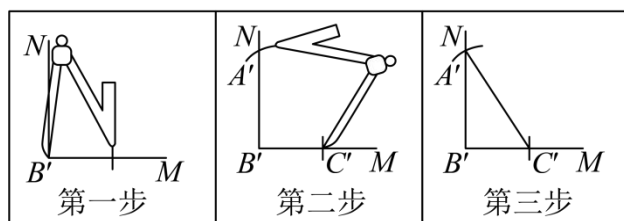


图2

- A. SAS                      B. AAS                      C. SSS                      D. 直角三角形全等的判定定理

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查全等三角形的判定，熟练掌握利用 HL 证明两个直角三角形全等，是解题的关键．由作图可知， $B'C' = BC, A'C' = AC$ ，利用 HL 证明两个直角三角形全等，即可．

【详解】解：由作图可知： $B'C' = BC, A'C' = AC$ ，

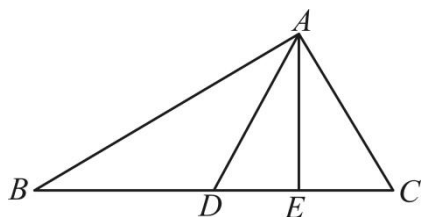
在  $\text{Rt}\triangle A'B'C'$  和  $\text{Rt}\triangle ABC$  中，

$$\therefore B'C' = BC, A'C' = AC,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle A'B'C' \cong \text{Rt}\triangle ABC \text{ (HL)};$$

故选 D.

5. 如图，在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle CAB = 90^\circ$ ， $AD$  是斜边  $BC$  的中线， $AE$  是斜边  $BC$  的高，如果  $AE$  恰好是  $DC$  边上的中线，下列结论错误的是（ ）



A.  $AD = CD$

B.  $AD = 2CE$

C.  $AB = 2AE$

D.  $AB = 3DE$

【答案】D

【解析】

【分析】首先根据直角三角形斜边中线的性质得到  $AD = BD = CD$ ，即可判断 A 选项；然后证明出  $\triangle ADC$  是等边三角形，得到  $AD = CD = 2CE$ ，即可判断 B 选项；然后利用含  $30^\circ$  角直角三角形的性质即可判断 C 选项；然后根据勾股定理即可判断 D 选项．

【详解】解： $\because$  在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle CAB = 90^\circ$ ， $AD$  是斜边  $BC$  的中线，

$$\therefore AD = BD = CD, \text{ 故 A 正确；}$$

$$\because AE \text{ 恰好是 } DC \text{ 边上的中线，}$$

$$\therefore DE = CE$$

$$\because AE \text{ 是斜边 } BC \text{ 的高，}$$

$$\therefore \angle AED = \angle AEC = 90^\circ$$

$$\therefore AE \text{ 垂直平分 } CD$$

$$\therefore AD = AC,$$

$$\therefore AD = AC = CD$$

$\therefore \triangle ADC$  是等边三角形

$\therefore AD = CD = 2CE$ , 故 B 正确;

$$\because AD = BD$$

$$\therefore \angle B = \angle BAD = \frac{1}{2} \angle ADC = 30^\circ$$

$\therefore AB = 2AE$ , 故 C 正确;

$\because \triangle ADC$  是等边三角形,  $AE \perp CD$

$$\therefore AD = AC = 2DE$$

$$\therefore AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{3}DE$$

$\therefore AB = 2AE = 2\sqrt{3}DE$ , 故 D 错误.

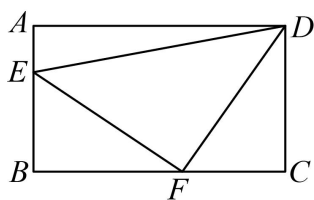
故选: D.

【点睛】此题考查了直角三角形斜边中线的性质, 等边三角形的性质和判定, 勾股定理, 含  $30^\circ$  角直角三角形的性质等知识, 解题的关键是掌握以上知识点.

6. 在矩形  $ABCD$  中,  $AB < BC$ , 点  $E$  在边  $AB$  上, 点  $F$  在边  $BC$  上, 联结  $DE$ 、 $DF$ 、 $EF$ ,

$AB = a, BE = CF = b, DE = c, \angle BEF = \angle DFC$ , 以下两个结论: ①  $(a+b)^2 + (a-b)^2 = c^2$ ;

②  $a+b > \frac{\sqrt{2}}{2}c$ . 其中判断正确的是 ( )



A. ①②都正确

B. ①②都错误;

C. ①正确, ②错误

D. ①错误, ②正确

【答案】A

【解析】

【分析】先证明  $\triangle BEF \cong \triangle CFD$  (ASA), 则  $\angle BFE = \angle CDF, EF = DF$ , 再证明  $\triangle DEF$  是等腰直角三角

形, 则  $EF = DF = \frac{\sqrt{2}}{2} DE = \frac{\sqrt{2}}{2} c$ , 进一步得到  $a = \sqrt{\frac{1}{2}c^2 - b^2}$ , 则  $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2$ , 利用完全平方公式

进行计算即可证明①正确，由  $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2$  得到  $\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$ ，根据

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 > a^2 + b^2$  即可证明②正确.

【详解】解：∵ 四边形  $ABCD$  是矩形，

$$\therefore \angle B = \angle C = 90^\circ, \quad AB = CD = a$$

$$\therefore BE = CF = b, \angle BEF = \angle DFC$$

$$\therefore \triangle BEF \cong \triangle CFD (\text{ASA}),$$

$$\therefore \angle BFE = \angle CDF, EF = DF,$$

$$\therefore \angle BFE + \angle CFD = \angle CDF + \angle CFD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EFD = 90^\circ$$

∴  $\triangle DEF$  是等腰直角三角形，

$$\therefore EF = DF = \frac{\sqrt{2}}{2}DE = \frac{\sqrt{2}}{2}c,$$

$$\therefore CD = BF = \sqrt{EF^2 - BE^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2 - b^2} = \sqrt{\frac{1}{2}c^2 - b^2},$$

$$\therefore a = \sqrt{\frac{1}{2}c^2 - b^2}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2,$$

$$\therefore (a+b)^2 + (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 2(a^2 + b^2) = 2 \times \frac{1}{2}c^2 = c^2,$$

故①正确；

$$\therefore a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2,$$

$$\therefore \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}c,$$

$$\therefore (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 > a^2 + b^2,$$

$$\therefore a+b > \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\therefore a+b > \frac{\sqrt{2}}{2}c$$

故②正确,

故选: A

【点睛】此题考查了全等三角形的判定和性质、勾股定理、矩形的性质、二次根式的运算等知识, 证明  $\triangle BEF \cong \triangle CFD$  (ASA) 是解题的关键.

## 二、填空题(本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 如果一次函数  $y = 3x - 2$  的图像经过点  $(a, 2)$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】本题考查一次函数的图像和性质, 把点  $(a, 2)$  代入函数解析式进行求解即可.

【详解】解:  $\because$  一次函数  $y = 3x - 2$  的图像经过点  $(a, 2)$ ,

$$\therefore 3a - 2 = 2, \text{ 解得 } a = \frac{4}{3};$$

故答案为:  $\frac{4}{3}$ .

8. 一次函数  $y = x - 5$  在  $y$  轴上的截距是\_\_\_\_\_.

【答案】  $-5$

【解析】

【分析】本题考查一次函数的性质及截距的定义, 通过令自变量  $x$  等于零求函数值  $y$ , 即可得到  $y$  轴上的截距.

【详解】解: 对于一次函数  $y = x - 5$ , 令  $x = 0$ , 则  $y = 0 - 5 = -5$ ,

因此该函数在  $y$  轴上的截距为  $-5$ .

故答案为:  $-5$

9. 用换元法解方程  $\frac{x}{x^2-1} + \frac{2(x^2-1)}{x} = 3$ , 若设  $\frac{x}{x^2-1} = y$ , 那么所得到的关于  $y$  的整式方程为\_\_\_\_\_.

【答案】  $y^2 - 3y + 2 = 0$

【解析】

【分析】用  $y$  替换方程中的  $\frac{x}{x^2-1}$ ，用  $\frac{1}{y}$  替换方程中的  $\frac{x^2-1}{x}$ ，得到关于  $y$  的分式方程，再去分母转化为整式方程即可.

【详解】解：设  $\frac{x}{x^2-1} = y$ ，则  $\frac{x^2-1}{x} = \frac{1}{y}$ ，

原方程可变为： $y + \frac{2}{y} = 3$ ，

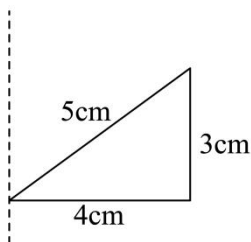
两边都乘以  $y$  得： $y^2 + 2 = 3y$ ，

即  $y^2 - 3y + 2 = 0$  .

故答案为： $y^2 - 3y + 2 = 0$  .

【点睛】本题考查换元法解分式方程、一元二次方程，理解换元法的意义是解题的关键.

10. 如图，将该图形以虚线为轴旋转一周形成一个几何体，体积是\_\_\_\_\_ . (结果保留 $\pi$ )



【答案】  $32\pi cm^3$

【解析】

【分析】本题考查平面图形旋转后所得的立体图形，不规则物体的体积算法.

根据题意可得，旋转后形成的几何体的体积为圆柱体积减去圆锥体积，将图中已知数据代入公式计算即可.

【详解】解： $4 \times 4\pi \times 3 - 4 \times 4\pi \times 3 \times \frac{1}{3}$   
 $= 48\pi - 16\pi$   
 $= 32\pi (cm^3)$  .

故答案为： $32\pi cm^3$  .

11. 如果直线  $y = kx + b$  ( $k \neq 0$ ) 过第二、三、四象限，与  $x$  轴的交点为  $(-2, 0)$ ，那么关于  $x$  的不等式  $kx + b < 0$  的解集是\_\_\_\_\_ .

【答案】  $x > -2$

【解析】

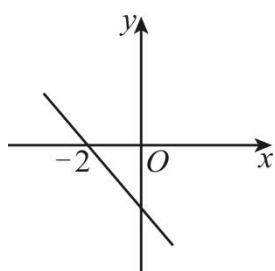
【分析】 本题考查了一次函数的性质，一次函数与一元一次不等式的关系，解题的关键是掌握根据函数图象解不等式的方法．由直线过第二、三、四象限可知  $k < 0$ ，然后画出草图，根据一次函数和一元一次不等式的关系，结合函数图象求不等式的解集．

【详解】 解：  $\because$  直线  $y = kx + b (k \neq 0)$  过第二、三、四象限，

$$\therefore k < 0,$$

又直线与  $x$  轴的交点为  $(-2, 0)$ ，

$\therefore$  草图如下：



不等式  $kx + b < 0$  表示一次函数图象在  $x$  轴下方的部分，

根据图象，当  $x > -2$ ，函数图象在  $x$  轴下方，

故不等式的解集是  $x > -2$ ．

故答案是：  $x > -2$ ．

12. 直线  $y = 2x + b$  被两坐标轴截得的线段长度为 5，则  $b =$  \_\_\_\_\_．

【答案】  $\pm 2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数与坐标轴的交点坐标，两点之间的距离．

求直线与坐标轴的交点，利用两点间距离公式建立方程求解．

【详解】 解： 当  $y = 0$  时，  $0 = 2x + b$ ，

$$\text{解得： } x = -\frac{b}{2},$$

$\therefore$  直线  $y = 2x + b$  与  $x$  轴交于点  $\left(-\frac{b}{2}, 0\right)$ ，

当  $x = 0$  时，  $y = b$ ，

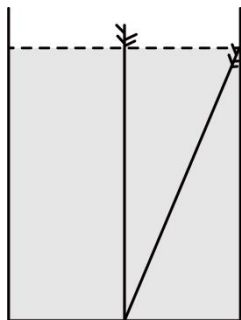
$\therefore$  与  $y$  轴交于点  $(0, b)$ ，

$$\text{两交点间距离为 } \sqrt{\left(-\frac{b}{2}-0\right)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{\frac{5b^2}{4}} = |b| \frac{\sqrt{5}}{2} = 5,$$

解得:  $b = \pm 2\sqrt{5}$ ,

故答案为  $\pm 2\sqrt{5}$ .

13. 我国古代数学著作《九章算术》中有这样一个问题: “今有池方一丈, 葭 (jiā) 生其中央, 出水一尺, 引葭赴岸, 适与岸齐问水深几何?” (注: 丈、尺是长度单位, 1 丈=10 尺) 这段话翻译成现代汉语, 即为: 如图, 有一个水池, 水面是一个边长为 1 丈的正方形, 在水池正中央有一根芦苇, 它高出水面 1 尺, 如果把这根芦苇拉向水池一边的中点, 它的顶端恰好到达池边的水面. 则水池里水的深度是\_\_\_\_\_尺.



【答案】 12

【解析】

【分析】 首先设水池的深度为  $x$  尺, 则这根芦苇的长度为  $(x+1)$  尺, 根据勾股定理可得方程  $x^2+5^2=(x+1)^2$  即可.

【详解】 设这个水池深  $x$  尺,

由题意得,  $x^2+5^2=(x+1)^2$ ,

解得:  $x=12$

答: 这个水池深 12 尺.

故答案为: 12.

【点睛】 此题主要考查了勾股定理的应用, 在应用勾股定理解决实际问题时勾股定理与方程的结合是解决实际问题常用的方法, 关键是从题中抽象出勾股定理这一数学模型, 画出准确的示意图. 领会数形结合的思想的应用.

14. 当  $m = \underline{\hspace{2cm}}$ , 方程  $\frac{3}{x} + \frac{6}{x-1} = \frac{x+m}{x-x^2}$  会产生增根.

【答案】 3 或 -7

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程, 以及分式方程的增根, 理解分式方程产生增根的条件是解题的关键. 通

过求解方程, 用  $m$  表示  $x$ , 再令  $x$  等于使分母为零的值, 求出  $m$ .

【详解】解: 方程两边同时乘以公分母  $x(x-1)$ , 得  $3(x-1)+6x=-(x+m)$ ,

化简得  $10x+m-3=0$ ,

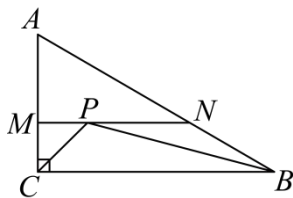
当  $x(x-1)=0$ , 即  $x=0$  或  $x=1$  时, 分式方程有增根,

把  $x=0$  代入  $10x+m-3=0$  得,  $m-3=0$ , 解得  $m=3$ ,

把  $x=1$  代入  $10x+m-3=0$  得,  $10 \times 1+m-3=0$ , 解得  $m=-7$ ,

$\therefore m=3$  或  $m=-7$  时, 方程  $\frac{3}{x} + \frac{6}{x-1} = \frac{x+m}{x-x^2}$  会产生增根.

15. 如图,  $\triangle ABC$  中,  $\angle ACB=90^\circ$ ,  $CP$  平分  $\angle ACB$ ,  $BP$  平分  $\angle ABC$ ,  $\angle ABP=15^\circ$ , 过点  $P$  作  $MN \parallel BC$ , 分别交  $AC$ 、 $AB$  于  $M$ 、 $N$ , 设  $AB=12$ , 则  $\triangle AMN$  周长是\_\_\_\_\_.



【答案】18

【解析】

【分析】本题考查了平行线的性质, 等腰三角形的判定, 直角三角形的性质等, 由角平分线的定义及平行线的性质可得  $\angle MCP = \angle MPC$ ,  $\angle NBP = \angle NPB$ , 即得  $MP = MC$ ,  $NP = NB$ , 再根据直角三角形的性质可得  $AC = \frac{1}{2}AB = 6$ , 进而根据  $\triangle AMN$  的周长  $= AM + MN + AN = AC + AB$  即可求解, 熟练掌握知识点是解题的关键.

【详解】解:  $\because CP$  平分  $\angle ACB$ ,  $BP$  平分  $\angle ABC$ ,

$\therefore \angle MCP = \angle PCB$ ,  $\angle NBP = \angle PBC$ ,

$\because MN \parallel BC$ ,

$\therefore \angle MPC = \angle PCB$ ,  $\angle NPB = \angle PBC$ ,

$\therefore \angle MCP = \angle MPC$ ,  $\angle NBP = \angle NPB$ ,

$\therefore MP = MC$ ,  $NP = NB$ ,

$\because BP$  平分  $\angle ABC$ ,  $\angle ABP = 15^\circ$ ,

$\therefore \angle ABC = 2\angle ABP = 30^\circ$ ,

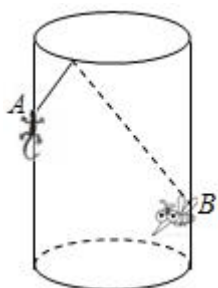
$\because \angle ACB = 90^\circ$ ,  $AB = 12$ ,

$\therefore AC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 12 = 6$ ,

$$\begin{aligned}
 \therefore \triangle AMN \text{ 的周长} &= AM + MN + AN \\
 &= AM + MP + PN + AN \\
 &= AM + MC + BN + AN \\
 &= AC + AB \\
 &= 6 + 12 \\
 &= 18,
 \end{aligned}$$

故答案为：18.

16. 如图，圆柱形容器中，高为  $8\text{cm}$ ，底面周长为  $24\text{cm}$ ，在容器内壁离容器底部  $2\text{cm}$  的点  $B$  处有一蚊子，此时一只壁虎正好在容器外壁，离容器上沿  $3\text{cm}$  与蚊子相对的点  $A$  处，则壁虎捕捉蚊子的最短距离为  $\underline{\quad} \text{cm}$  (容器厚度忽略不计).

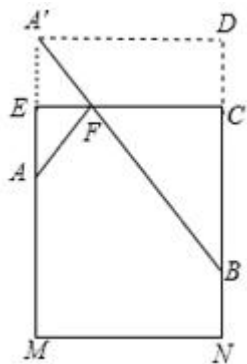


【答案】15

【解析】

【分析】如图，将容器侧面展开，建立  $A$  关于  $EC$  的对称点  $A'$ ，根据两点之间线段最短可知  $A'B$  的长度即为所求.

【详解】解：如图，将容器侧面展开，作  $A$  关于  $EC$  的对称点  $A'$ ，过  $A'$  作  $A'D \perp BC$  交  $BC$  的延长线于  $D$ ，则四边形  $A'ECD$  为矩形，连接  $A'B$  交  $EC$  于  $F$ ，则  $A'B$  即为最短距离.



$\because$  高为  $8\text{cm}$ ，底面周长为  $24\text{cm}$ ，在容器内壁离容器底部  $2\text{cm}$  的点  $B$  处有一蚊子，此时一只壁虎正好在容器外壁，离容器上沿  $3\text{cm}$  与蚊子相对的点  $A$  处，

$$\therefore A'D = 12\text{cm}, \quad BD = BC + CD = BC + EA' = 8 - 2 + 3 = 9\text{cm},$$

∴在直角 $\triangle A'DB$ 中,  $A'B = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$  cm,

故答案为: 15.

【点睛】本题考查了平面展开——最短路径问题, 将图形展开, 利用轴对称的性质和勾股定理进行计算是解题的关键.

17. 由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成一个二元二次方程组, 它的解是  $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 4 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -4 \end{cases}$ ,

这个二元二次方程组可以是\_\_\_\_\_.

【答案】  $\begin{cases} y = 2x \\ xy = 8 \end{cases}$  (答案不唯一)

【解析】

【分析】本题考查方程和方程组: 可通过两点确定一条直线构造一次方程, 可通过两组解的  $x$  和  $y$  之积均为 8 来构造二元二次方程.

【详解】解: 设解为  $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 4 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -4 \end{cases}$  的二元一次方程为  $y = kx + b$ ,

则  $\begin{cases} 2k + b = 4 \\ -2k + b = -4 \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} k = 2 \\ b = 0 \end{cases}$ ,

∴该二元一次方程为  $y = 2x$ ;

∴  $2 \times 4 = (-2) \times (-4) = 8$ ,

故该二元二次方程可为  $xy = 8$ ,

故答案为:  $\begin{cases} y = 2x \\ xy = 8 \end{cases}$  (答案不唯一).

18. 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle A = 90^\circ$ ,  $AC = 4$ ,  $AB = a$ , 将  $\triangle ABC$  沿着斜边  $BC$  翻折, 点  $A$  落在点  $A_1$  处, 点  $E$  为边  $BC$  的中点, 过  $B$  作  $AB$  的平行线交  $A_1B$  所在直线于点  $F$ , 连结  $A_1E$ , 如果  $\triangle A_1EF$  为直角三角形时, 那么  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $4\sqrt{3}$  或 4

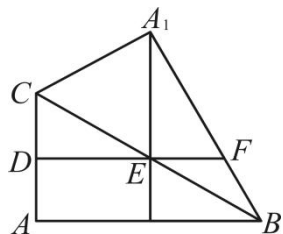
【解析】

【分析】本题考查了翻折的性质, 中点的性质, 解直角三角形及勾股定理. 分情况讨论: 当  $\angle A_1EF = 90^\circ$

时, 当  $\angle A_1FE = 90^\circ$  时, 根据翻折性质和中点性质, 并利用勾股定理进行求解即可.

【详解】解: 当  $\triangle A_1EF$  为直角三角形时, 存在两种情况:

①当  $\angle A_1EF = 90^\circ$  时, 如图,



$\because \triangle A_1BC$  与  $\triangle ABC$  关于  $BC$  所在直线对称,

$\therefore A_1C = AC = 4, \angle ACB = \angle A_1CB,$

$\because$  点  $D, E$  分别为  $AC, BC$  的中点,

$\therefore DE$  是  $\triangle ABC$  的中位线,

$\therefore DE \parallel AB,$

$\therefore \angle CDE = \angle CAB = 90^\circ,$

$\therefore \angle CDE = \angle A_1EF,$

$\therefore AC \parallel A_1E,$

$\therefore \angle ACB = \angle A_1EC,$

$\therefore \angle A_1CB = \angle A_1EC,$

$\therefore A_1C = A_1E = 4,$

在  $\text{Rt}\triangle A_1CB$  中,

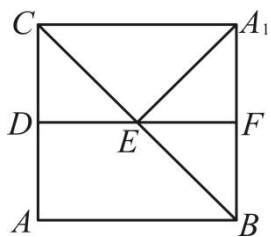
$\because E$  是斜边  $BC$  的中点,

$\therefore BC = 2A_1E = 8,$

由勾股定理得,  $AB^2 = BC^2 - AC^2,$

$\therefore AB = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3};$

②当  $\angle A_1FE = 90^\circ$  时, 如图,



$$\therefore \angle ADF = \angle A = \angle DFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle A_1BC$  与  $ABC$  关于  $BC$  所在直线对称,

$$\therefore \angle ABC = \angle CBA_1 = 45^\circ,$$

$\therefore ABC$  是等腰直角三角形,

$$\therefore AB = AC = 4,$$

综上所述,  $AB$  的长为  $4\sqrt{3}$  或 4.

故答案为:  $4\sqrt{3}$  或 4.

### 三、解答题(本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 解下列关于  $x$  的方程:

$$(1) 6 - bx^2 = x^2 + 2 (b \neq -1)$$

$$(2) \sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$$

**【答案】** (1)  $b > -1$  时,  $x = \pm \frac{2\sqrt{b+1}}{b+1}$ ;  $b < -1$  时, 无解.

$$(2) x = 5$$

**【解析】**

**【分析】** 本题主要考查解一元二次方程的能力, 熟练掌握解一元二次方程的几种常用方法: 直接开平方法、因式分解法、公式法、配方法, 结合方程的特点选择合适、简便的方法是解题的关键.

先变形, 再利用直接开平方法求解可得

(1) 先移项, 再合并同类项, 然后利用直接开平方法即可解答;

(2) 先移项, 再两边同时平方, 去掉根号, 化为一元二次方程, 最后根据二次根式有意义的条件, 即可解答.

**【小问 1 详解】**

解:  $6 - bx^2 = x^2 + 2 (b \neq -1)$

$$x^2 + bx^2 - 4 = 0$$

$$(b+1)x^2 = 4$$

$$x^2 = \frac{4}{b+1}$$

当  $b+1 > 0$  (即  $b > -1$ ) 时,  $x = \pm \frac{2\sqrt{b+1}}{b+1}$ ;

当  $b+1 < 0$  (即  $b < -1$ ) 时, 无解.

【小问 2 详解】

解:  $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$

$$\sqrt{3x+1} = \sqrt{x+4} + 1$$

平方得:  $3x+1 = x+4 + 2\sqrt{x+4} + 1$

化简:  $x-2 = \sqrt{x+4}$

再平方、整理得:  $x^2 - 5x = 0$

解得:  $x=0$  或  $x=5$

$$\because x-2 = \sqrt{x+4}, \sqrt{x+4} \geq 0$$

$$\therefore x \geq 2.$$

$\therefore x=5$  是原方程的解.

20. 解方程组: 
$$\begin{cases} x+2y=12 \\ x^2-4xy+4y^2-4=0 \end{cases}$$

【答案】 
$$\begin{cases} x=5 \\ y=\frac{7}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=7 \\ y=\frac{5}{2} \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题考查的是二元二次方程的解法, 掌握解法步骤是解本题的关键, 先把方程组化为

$$\begin{cases} x+2y=12 \\ x-2y+2=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+2y=12 \\ x-2y-2=0 \end{cases}, \text{ 再解二元一次方程组即可.}$$

【详解】解： 
$$\begin{cases} x+2y=12 \text{①} \\ x^2-4xy+4y^2-4=0 \text{②} \end{cases},$$

由②得：  $(x-2y)^2-4=0,$

$\therefore (x-2y+2)(x-2y-2)=0,$

$\therefore x-2y+2=0$  或  $x-2y-2=0,$

$\therefore \begin{cases} x+2y=12 \\ x-2y+2=0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x+2y=12 \\ x-2y-2=0 \end{cases},$

解得： 
$$\begin{cases} x=5 \\ y=\frac{7}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=7 \\ y=\frac{5}{2} \end{cases}.$$

21. 在疫情防控常态化背景下，每周需要对面积为 4800 平方米的仓库进行一次全面消毒工作。最初采用人工操作完成消毒任务。为提高效率采用机器人消毒，机器人消毒每分钟消毒面积比人工操作多 60 平方米，并且提前 40 分钟完成消毒任务。求人工操作每分钟消毒面积为多少平方米。

【答案】 60 平方米

【解析】

【分析】根据题意得出“人工操作所需的时间－机器从消毒所需的时间＝40 分钟”，设人工操作每分钟消毒面积为  $x$  平方米，则机器人消毒每分钟消毒面积为  $(x+60)$  平方米，则可列出方程  $\frac{4800}{x} - \frac{4800}{x+60} = 40$ ，求解后即可。

【详解】解：设人工操作每分钟消毒面积为  $x$  平方米，则机器人消毒每分钟消毒面积为  $(x+60)$  平方米，根据题意得：

$$\frac{4800}{x} - \frac{4800}{x+60} = 40,$$

则  $40x^2 + 2400x - 288000 = 0,$

解得  $x_1 = -120$  (不合题意，舍去)，  $x_2 = 60,$

经检验，  $x = 60$  是原方程的解。

所以，人工操作每分钟消毒面积为 60 平方米。

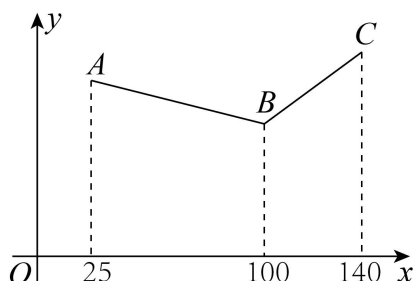
【点睛】 本题考查了分式方程的应用，根据题意找出等量关系，并列方程进行求解是解题的关键。

22. 某款轿车每行驶 100 千米的耗油量  $y$  升与其行驶速度  $x$  千米/小时之间的函数关系图像如图所示，其中线段  $AB$  的表达式为  $y = -\frac{1}{25}x + 13$  ( $25 \leq x \leq 100$ )，点  $C$  的坐标为 (140, 14)，即行驶速度为 140 千米/

小时该轿车每行驶 100 千米的耗油量是 14 升.

(1) 求线段  $BC$  的表达式;

(2) 如果从甲地到乙地全程为 260 千米, 其中有 60 千米限速 50 千米/小时的省道和 200 千米限速 120 千米/小时的高速公路, 那么在不考虑其他因素的情况下, 这款轿车从甲地行驶到乙地至少需要耗油多少升?



**【答案】** (1)  $y = \frac{1}{8}x - \frac{7}{2} (100 \leq x \leq 140)$ ; (2) 24.6 升.

**【解析】**

**【分析】** (1) 根据线段  $AB$  的表达式可得出点  $B$  坐标, 利用待定系数法即可得线段的解析式;

(2) 根据一次函数的性质可得在省道和高速公路上行驶时耗油量最小时的速度, 根据解析式即可得出每行驶 100 千米的耗油量, 进而可得答案.

**【详解】** 解: (1)  $\because$  线段  $AB$  的表达式为  $y = -\frac{1}{25}x + 13 (25 \leq x \leq 100)$ ,

$\therefore$  当  $x = 100$  时,  $y = -\frac{1}{25} \times 100 + 13 = 9$ , 即  $B(100, 9)$ .

令  $BC$  的表达式为  $y = kx + b$ ,

$\because$  点  $C$  的坐标为  $(140, 14)$ ,

$$\therefore \begin{cases} 9 = 100k + b \\ 14 = 140k + b \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = \frac{1}{8} \\ b = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

$\therefore$  线段  $BC$  的表达式为  $y = \frac{1}{8}x - \frac{7}{2} (100 \leq x \leq 140)$ .

(2)  $\because$  在  $y = -\frac{1}{25}x + 13 (25 \leq x \leq 100)$  中,  $-\frac{1}{25} < 0$ ,

$\therefore y$  随  $x$  的增大而减小,

$\therefore$  省道限速 50 千米/小时,

∴ 当  $x=50$  时, 耗油量最低, 即  $y=-\frac{1}{25} \times 50 + 13 = 11$ ,

∴ 在  $y=\frac{1}{8}x-\frac{7}{2}(100 \leq x \leq 140)$  中,  $\frac{1}{8} > 0$ ,

∴  $y$  随  $x$  的增大而增大,

∴ 高速公路限速 120 千米/小时,

∴ 当  $x=100$  时, 耗油量最低, 即  $y=\frac{1}{8} \times 100 - \frac{7}{2} = 9$ ,

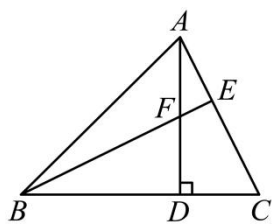
∴ 有 60 千米的省道和 200 千米的高速公路,

∴ 从甲地行驶到乙地至少需要耗油  $11 \times \frac{60}{100} + 9 \times \frac{200}{100} = 24.6$  (升).

答: 至少耗油 24.6 升.

【点睛】 本题考查一次函数的性质及待定系数法求一次函数解析式, 正确识图并熟练掌握一次函数的性质是解题关键.

23. 已知, 如图,  $AD$  为  $\triangle ABC$  的高,  $E$  为  $AC$  上一点,  $BE$  交  $AD$  于  $F$ , 且有  $BF=AC$ ,  $FD=CD$ .



(1) 求证:  $BE \perp AC$

(2) 过点  $A$  作  $AH \parallel BC$  交  $BE$  的延长线于点  $H$ , 连接  $DE$ , 如果  $AH^2 = 2BD^2$ , 画出符合题意的图形, 并证明:  $DE = \frac{1}{2}AC$ .

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的判定与性质, 勾股定理, 直角三角形斜边中线的性质.

(1) 通过“HL”证明  $\text{Rt}\triangle BDF \cong \text{Rt}\triangle ADC$ , 易得  $\angle EBC = \angle CAD$ , 结合  $\angle CAD + \angle C = 90^\circ$ , 由锐角互余的三角形是直角三角形, 即可作答.

(2) 根据题意做出图形, 由勾股定理得出  $AB^2 = 2BD^2$ , 则  $AH = AB$ , 进而推出  $\angle H = \angle CBE$ , 进而点  $E$  为  $AC$  中点, 最后根据直角三角形斜边上中线的性质得出  $DE = \frac{1}{2}AC$ .

【小问 1 详解】

证明:  $\because AD$  为  $\triangle ABC$  的高,

$\therefore \angle BDF = \angle ADC = 90^\circ$ .

在  $\text{Rt}\triangle BDF$  和  $\text{Rt}\triangle ADC$  中,

$$\begin{cases} BF = AC \\ FD = CD \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BDF \cong \text{Rt}\triangle ADC (\text{HL}).$$

$$\therefore \angle FBD = \angle CAD, \text{ 即 } \angle EBC = \angle CAD.$$

$$\because \text{在 } \text{Rt}\triangle ADC \text{ 中, } \angle CAD + \angle C = 90^\circ,$$

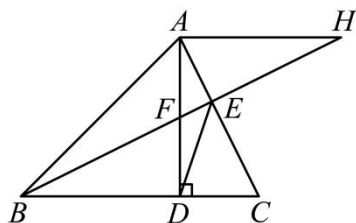
$$\therefore \text{在 } \triangle BCE \text{ 中, } \angle EBC + \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BEC = 90^\circ,$$

$$\therefore BE \perp AC.$$

【小问 2 详解】

解: 作图如图所示,



证明: 由 (1) 可知,  $\text{Rt}\triangle BDF \cong \text{Rt}\triangle ADC$ ,

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2 = 2BD^2,$$

$$\therefore AH^2 = 2BD^2,$$

$$\therefore AH = AB,$$

$$\therefore \angle H = \angle ABH,$$

$$\because AH \parallel BC,$$

$$\therefore \angle H = \angle CBE,$$

$$\therefore \angle ABH = \angle CBE, \text{ 即 } BE \text{ 平分 } \angle ABC,$$

由 (1) 可知  $BE \perp AC$ ,

$$\therefore \angle BEC = \angle BEA = 90^\circ,$$

在  $\triangle ABE$  和  $\triangle CBE$  中,

$$\begin{cases} \angle BEA = \angle BEC \\ BE = BE \\ \angle ABE = \angle CBE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBE (ASA),$$

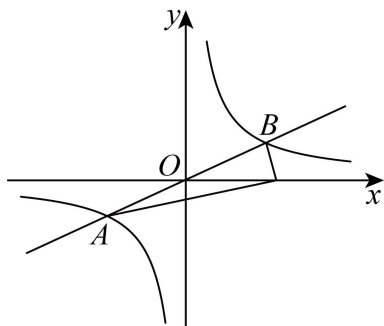
$$\therefore AE = CE, \text{ 点 } E \text{ 为 } AC \text{ 中点},$$

$$\because AD \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 的高},$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2} AC.$$

24. 如图，平面直角坐标系  $xOy$  中，直线  $l_1: y = kx$  与反比例函数  $y = \frac{2}{x}$  的图像交于点  $A(a, -1)$  和点  $B$



(1) 求  $k$  的值:

(2) 将直线  $l_1$  沿  $x$  轴方向平移  $m$  ( $m > 0$ ) 个单位后得到直线  $l_2$ . 直线  $l_2$  与  $x$  轴交于点  $C$ .

①如果点  $C$  在  $x$  轴的正半轴上，连接  $AC$ ，且  $\triangle ABC$  是以  $AB$  为斜边的直角三角形，求  $m$  的值:

②如果  $\triangle ABC$  的面积为 3，求平移后直线  $l_2$  的函数关系式

**【答案】** (1)  $k = \frac{1}{2}$

(2) ①  $m = \sqrt{5}$ ; ②  $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$  或  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ .

**【解析】**

**【分析】** 本题考查了一次函数和反比例函数综合，熟练掌握一次函数和反比例函数的图象和性质是解题的关键.

(1) 用待定系数法即可解答.

(2) 先求出  $AB$  的长度，根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，即可解答;

(3) 根据三角形面积求出点  $C$  的坐标，再进行分类讨论即可.

**【小问 1 详解】**

解:  $\because$  点  $A(a, -1)$  在反比例函数  $y = \frac{2}{x}$  上,

$$\therefore a = -2$$

代入  $y = kx$  得:  $-1 = -2k$ ,

解得:  $k = \frac{1}{2}$ ;

【小问 2 详解】

解: ①由 (1) 可知  $A(-2, -1)$ ,

$\therefore B(2, 1)$ ,

$\therefore AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{5}$ ,

$\therefore$  点  $C$  在  $x$  轴的正半轴上,

$\therefore$  直线  $l_1$  沿  $x$  轴正方向平移  $m(m > 0)$  个单位后得到直线  $l_2$ ,

$\therefore$  直线  $l_2: y = \frac{1}{2}(x - m)$ ,  $C(m, 0)$ ,

$\therefore \triangle ABC$  是以  $AB$  为斜边的直角三角形, 点  $O$  是  $AB$  中点,

$\therefore OC = \frac{1}{2}AB = \sqrt{5}$ ,

$\therefore C(\sqrt{5}, 0)$

$\therefore m = \sqrt{5}$ ;

②  $\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}OC \times (y_B - y_A) = OC = 3$ ,

$\therefore C(3, 0)$  或  $C(-3, 0)$ ,

$\therefore m = \pm 3$ ,

$\therefore$  直线  $l_2: y = \frac{1}{2}(x - 3) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$  或  $y = \frac{1}{2}(x + 3) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ .

25. 如图, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $BC = 2\sqrt{3}$ ,  $\angle BAC = 30^\circ$ ,  $D$  是射线  $CA$  上一点(不与点  $A$ 、 $C$  重合), 过点  $D$  作直线  $AB$  的垂线, 垂足为点  $E$ ,  $M$  是  $BD$  的中点

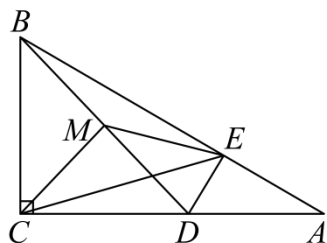
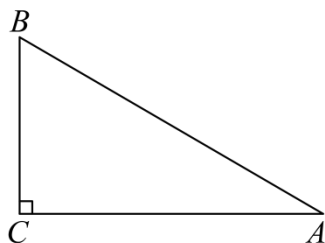


图1



备用图

(1) 求证:  $CM = EM$ ;

(2) 当点  $D$  在边  $CA$  上时, 如果设  $AD = x$ ,  $CM = y$ , 求  $y$  与  $x$  的函数解析式, 并写出函数的定义域;

(3) 当  $\angle ABD = 15^\circ$  时, 求  $\triangle CME$  的面积.

【答案】(1) 见解析 (2)  $y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 12x + 48} (x > 0)$

(3) 当  $D$  在  $CA$  上时,  $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ; 当  $D$  在  $CA$  延长线上时,  $S = 9 + 6\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 根据直角三角形斜边中线的性质即可证明;

(2) 根据勾股定理得出  $AC = 6$ , 则  $CD = 6 - x$ , 根据勾股定理得出  $BD = \sqrt{12 + (6 - x)^2}$ , 即可解答;

(3) 根据题意进行分类讨论: ①当  $D$  在  $CA$  上时, ②当  $D$  在  $CA$  延长线上时.

【小问 1 详解】

证明:  $\because$  在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $M$  是  $BD$  的中点,

$$\therefore CM = \frac{1}{2}BD.$$

$\because$  在  $\text{Rt}\triangle BDE$  中,  $\angle BED = 90^\circ$ ,  $M$  是  $BD$  的中点,

$$\therefore ME = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore CM = ME.$$

【小问 2 详解】

解:  $\because$  在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $BC = 2\sqrt{3}$ ,

$$\therefore AB = 2BC = 4\sqrt{3}.$$

由勾股定理得  $AC = 6$ ,

$$\because AD = x,$$

$$\therefore CD = 6 - x,$$

在  $\text{Rt}\triangle BCD$  中,  $\angle BCD = 90^\circ$ ,

$$\therefore BD^2 = BC^2 + CD^2,$$

$$\therefore BD = \sqrt{12 + (6 - x)^2},$$

$$\because CM = \frac{1}{2}BD, \quad CM = y,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 12x + 48},$$

$$\because x^2 - 12x + 48 = (x - 6)^2 + 12 > 0,$$

$$\therefore x > 0,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 12x + 48} \quad (x > 0);$$

【小问3详解】

$$\text{解: } \because \angle ACB = 90^\circ, BC = 2\sqrt{3}, \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = 2BC = 4\sqrt{3}, AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 6,$$

①当  $D$  在  $CA$  上时,

$$\because \angle ACB = 90^\circ, BC = 2\sqrt{3}, \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CBA = 60^\circ,$$

$$\because \angle ABD = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle CBD = 45^\circ,$$

$$\therefore BC = CD = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = 2\sqrt{6},$$

$$\text{由 (1) 可知 } CM = ME = \frac{1}{2}BD = \sqrt{6},$$

$$\because ME = BM = \frac{1}{2}BD, \angle ABD = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle EMD = 30^\circ,$$

$$\because CE = BM = \frac{1}{2}BD, \angle CBD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CMD = 90^\circ,$$

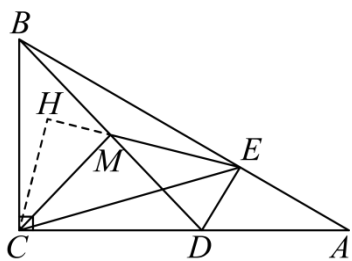
$$\therefore \angle CME = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle CMH = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ, \angle MCH = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore MH = \frac{1}{2}CM = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore CH = \sqrt{CM^2 - MH^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle CME} = \frac{1}{2}ME \cdot CH = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2};$$



②当  $D$  在  $CA$  延长线上时,

$$\because \angle ACB = 90^\circ, BC = 2\sqrt{3}, \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CBA = 60^\circ,$$

$$\because \angle ABD = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = 15^\circ,$$

$$\therefore AB = AD = 4\sqrt{3}, \text{ 则 } CD = AC + AD = 6 + 4\sqrt{3},$$

$$\therefore BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{6},$$

$$\text{由 (1) 可知 } CM = ME = \frac{1}{2}BD = 3\sqrt{2} + \sqrt{6},$$

$$\because ME = BM = \frac{1}{2}BD, \angle ABD = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle EMD = 30^\circ,$$

$$\because CE = BM = \frac{1}{2}BD, \angle CDB = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle CMB = 30^\circ,$$

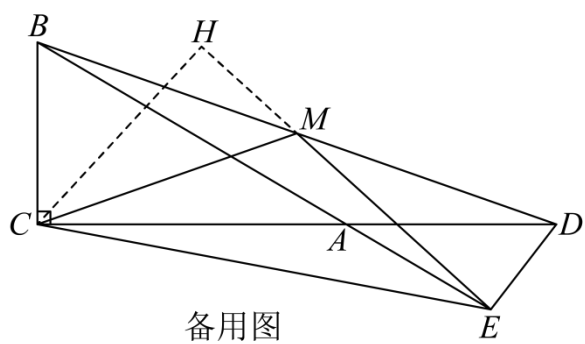
$$\therefore \angle CME = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle CMH = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ, \angle MCH = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore MH = \frac{1}{2}CM = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore CH = \sqrt{CM^2 - MH^2} = \frac{3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle CME} = \frac{1}{2}ME \cdot CH = \frac{1}{2} \times (3\sqrt{2} + \sqrt{6}) \times \frac{3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{2} = 9 + 6\sqrt{3};$$



备用图