

2025 学年第一学期八年级数学期中试卷

(考试时间: 90 分钟, 试卷满分: 100 分)

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 3 分, 共 18 分. 下列各题四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题卡的相应位置上.)

1. 下列说法正确的是 ()

A. 4 的平方根是 ± 2

B. 8 的立方根是 ± 2

C. -27 没有立方根

D. 9 的平方根是 3

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了平方根和立方根的定义, 熟练掌握平方根和立方根的定义是解题的关键. 根据平方根和立方根的定义进行选择即可.

【详解】A、4 的平方根是 ± 2 , 故 A 正确;
B、8 的立方根是 2, 故 B 错误;
C、-27 的立方根是 -3, 故 C 错误;
D、9 的平方根是 ± 3 , 故 D 错误;
故选: A.

2. 下列各式中, 是最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{18}$

B. $\sqrt{\frac{a}{2}}$

C. $\sqrt{a^2 + 4a^4}$

D. $\sqrt{a^2 - b^2}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了最简二次根式的定义, 能熟记最简二次根式的定义是解此题的关键, 满足以下两个条件的二次根式是最简二次根式, ①被开方数中的因数是整数, 因式是整式, ②被开方数中不含有能开得尽方的因数和因式. 根据最简二次根式的定义逐个判断即可.

【详解】解: A. $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, 不是最简二次根式, 故本选项不符合题意;
B. $\sqrt{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{2a}}{2}$, 不是最简二次根式, 故本选项不符合题意;
C. $\sqrt{a^2 + 4a^4} = |a|\sqrt{1 + 4a^2}$, 不是最简二次根式, 故本选项不符合题意;
D. $\sqrt{a^2 - b^2}$ 是最简二次根式, 故本选项符合题意.

故选：D.

3. 近年来我国芯片技术突飞猛进，某品牌手机自主研发的最新型号芯片，其晶体管栅极的宽度为0.00000014米，将数据“0.00000014”用科学记数法表示为（ ）

- A. 1.4×10^{-8} B. 1.4×10^{-7} C. 0.14×10^{-6} D. 1.4×10^{-9}

【答案】B

【解析】

【分析】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值. 据此解答即可.

【详解】解： $0.00000014 = 1.4 \times 10^{-7}$.

故选：B.

4. 下列二次根式中，与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{8}$ B. $\sqrt{12}$ C. $\sqrt{18}$ D. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查同类二次根式，解题的关键是掌握：判断两个根式是不是同类二次根式，首先要把它们化为最简二次根式，然后看被开方数是否相同. 据此解答即可.

【详解】解：A. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ，与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式，故此选项不符合题意；

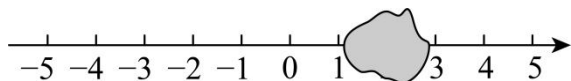
B. $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ，与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式，故此选项符合题意；

C. $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ，与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式，故此选项不符合题意；

D. $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式，故此选项不符合题意.

故选：B.

5. 如图，数轴的一部分被阴影覆盖了，则被阴影覆盖的数可能是（ ）



- A. $-\sqrt{3}$ B. $\sqrt{7}$ C. $\sqrt{11}$ D. 以上都不对

【答案】B

【解析】

【分析】 本题主要考查的是估算无理数的大小，根据平方根的定义，对选项中的无理数进行正确的估算是解决本题的关键.

根据图中阴影部分可知，这个无理数在 1 到 3 之间，结合选项进行排除即可.

【详解】 解：根据题意得：被阴影覆盖的数在 1 和 3 之间，

$$\therefore 1 < 3 < 4, 4 < 7 < 9, 9 < 11 < 16,$$

$$\therefore 1 < \sqrt{3} < 2, 2 < \sqrt{7} < 3, 3 < \sqrt{11} < 4,$$

$$\therefore -2 < -\sqrt{3} < -1,$$

$\therefore$ 符合题意的为 B.

故选：B

6. 若关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 满足 $a - b + c = 0$ ，称此方程为“贺岁”方程. 已知方程

$a^2x^2 - 2024ax + 1 = 0 (a \neq 0)$ 是“贺岁”方程，则 $a^2 + 2025a - \frac{a}{2024a+1}$ 的值为 ()

A. -2024

B. 2024

C. -2025

D. 2025

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的解、代数式求值等知识点，掌握整体代入的方法是解题的关键.

利用新定义得到“贺岁”方程的一个解为 $x = -1$ ，则 $a^2 + 2024a + 1 = 0$ ，即 $a^2 + 2024a = -1$ 、

$2024a + 1 = -a^2$ ，然后对原式变形后再整体代入计算即可.

【详解】 解：根据题意得“贺岁”方程的一个解为 $x = -1$ ，

$\therefore$ 方程 $a^2x^2 - 2024ax + 1 = 0 (a \neq 0)$ 是“贺岁”方程，

$$\therefore a^2 + 2024a + 1 = 0, \text{ 即 } a^2 + 2024a = -1, 2024a + 1 = -a^2,$$

$$\therefore a^2 + 2025a - \frac{a}{2024a+1}$$

$$= (a^2 + 2024a) + a - \frac{a}{2024a+1}$$

$$= (a^2 + 2024a) + \frac{2024a^2 + a}{2024a + 1} - \frac{a}{2024a + 1}$$

$$= (a^2 + 2024a) + \frac{2024a^2}{2024a + 1}$$

$$= -1 + \frac{2024a^2}{-a^2}$$

$$= -1 - 2024$$

$$= -2025.$$

故选 C.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 2 分, 共 24 分.)

7. 比较大小: $\sqrt{3}$ _____ 2 (填 “>”, “<” 或 “=”).

【答案】<

【解析】

【分析】求出 $2 = \sqrt{4}$, 根据 $\sqrt{4} > \sqrt{3}$ 即可求出答案.

【详解】解: $\because 2 = \sqrt{2^2} = \sqrt{4}$,

$$\therefore \sqrt{3} < 2,$$

故答案为: <.

【点睛】本题考查了实数的大小比较的应用, 关键是求出 $2 = \sqrt{4}$, 题目比较典型, 难度不大.

8. 在实数 $\frac{22}{7}$, $-\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{9}$, 0, π , $\sqrt{25}$ 中是无理数的有 _____ 个.

【答案】3

【解析】

【分析】本题考查无理数的定义, 注意带根号的要开方开不尽的才是无理数, 无限不循环小数是无理数. 根据无理数的定义进行解答即可.

【详解】解: 在实数 $\frac{22}{7}$, $-\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{9}$, 0, π , $\sqrt{25} = 5$ 中, 无理数有: $-\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{9}$, π , 共有 3 个,

故答案为: 3.

9. 将 $0.\dot{1}2\dot{3}$ 化成分数: $0.\dot{1}2\dot{3} =$ _____.

【答案】 $\frac{41}{333}$

【解析】

【分析】 本题考查一元一次方程的应用，列出准确的一元一次方程是解题的关键。设 $x = 0.\dot{1}2\dot{3}$ ，则 $1000x = 123.\dot{1}2\dot{3}$ ，即可得方程 $999x = 123$ ，解一元一次方程即可。

【详解】 解：设 $x = 0.\dot{1}2\dot{3}$ ，

则 $1000x = 123.\dot{1}2\dot{3}$ ，

两式相减得 $1000x - x = 123.\dot{1}2\dot{3} - 0.\dot{1}2\dot{3}$ ，

即 $999x = 123$ ，

故 $x = \frac{41}{333}$ 。

故答案为： $\frac{41}{333}$ 。

10. 一个正数的两个平方根为 $2a+1$ 和 $5-a$ ，则 $a =$ _____。

【答案】 -6

【解析】

【分析】 根据一个正数两个平方根互为相反数计算即可。

【详解】 解： $\because$ 一个正数的两个平方根为 $2a+1$ 和 $5-a$ ，

$\therefore (2a+1) + (5-a) = 0$ ，

解得 $a = -6$ ，

故答案为： -6 。

【点睛】 本题考查平方根，理解平方根的定义，掌握一个正数两个平方根互为相反数是正确解答的前提。

11. 若二次根式 $\frac{\sqrt{x+1}}{2x-1}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围为_____。

【答案】 $x \geq -1$ 且 $x \neq \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件，分式有意义的条件，熟记二次根式的被开方数是非负数、分母不为零是解题的关键。根据二次根式的被开方数是非负数、分母不为零分别列出不等式，解不等式，即可求解。

【详解】 解：由题意，二次根式 $\sqrt{x+1}$ 在实数范围内有意义，

故 $x+1 \geq 0$,

解得 $x \geq -1$;

$\because$ 分式 $\frac{1}{2x-1}$ 有意义,

故 $2x-1 \neq 0$,

解得 $x \neq \frac{1}{2}$;

因此, x 的取值范围为 $x \geq -1$ 且 $x \neq \frac{1}{2}$.

故答案为: $x \geq -1$ 且 $x \neq \frac{1}{2}$.

12. 写出 $\sqrt{2a-b}$ 的一个有理化因式_____.

【答案】 $\sqrt{2a-b}$

【解析】

【分析】 本题主要考查分母有理化的方法, 分母有理化常常是乘二次根式本身 (分母只有一项) 或与原分母组成平方差公式. 根据二次根式的性质, 求解即可.

【详解】 解: $\because (\sqrt{2a-b}) \times (\sqrt{2a-b}) = 2a-b$,

$\therefore \sqrt{2a-b}$ 的一个有理化因式为 $\sqrt{2a-b}$,

故答案为: $\sqrt{2a-b}$ (答案不唯一)

13. 不等式 $\sqrt{2}x < x+1$ 的解集是_____.

【答案】 $x < \sqrt{2}+1$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次不等式, 分母有理化, 熟知不等式的基本性质是解答此题的关键. 通过移项将含 x 的项移到不等式左边, 常数项移到右边, 然后合并同类项, 再根据系数的正负性判断不等号方向, 最后有理化分母得到解集.

【详解】 解: $\sqrt{2}x < x+1$,

移项, 得 $\sqrt{2}x - x < 1$,

合并同类项, 得 $x(\sqrt{2}-1) < 1$,

由于 $\sqrt{2}-1 > 0$, 不等号方向不变,

$$\therefore x < \frac{1}{\sqrt{2}-1},$$

有理化分母，得 $x < \sqrt{2}+1$.

故答案为: $x < \sqrt{2}+1$.

14. 如果 $a + \sqrt{a^2 - 6a + 9} = 3$ 成立，那么实数 a 的取值范围_____.

【答案】 $a \leq 3$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质 $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, a > 0 \\ 0, a = 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$ ，即可求解.

【详解】 解: $a + \sqrt{a^2 - 6a + 9} = 3$ 变形得, $\sqrt{(a-3)^2} = 3-a$,

$$\therefore a-3 \leq 0,$$

$$\therefore a \leq 3,$$

故答案为: $a \leq 3$.

【点睛】 本题主要考查二次根式的性质，理解并掌握二次根式的性质是解题的关键.

15. 已知 $\sqrt{2.14} = 1.463$, $\sqrt{21.4} = 4.626$, $\sqrt[3]{0.214} = 0.5981$, $\sqrt[3]{2.14} = 1.289$, 则 214 的立方根是_____.

【答案】 5.981

【解析】

【分析】 本题考查立方根，算术平方根，熟练掌握其性质是解题的关键. 根据立方根的性质：被开立方数的小数点向左（或向右）移动三位，那么其立方根的小数点向左（或向右）移动一位即可求得答案.

【详解】 解: 由 $214 = 0.214 \times 1000$, 得 $\sqrt[3]{214} = \sqrt[3]{0.214 \times 1000} = \sqrt[3]{0.214} \times \sqrt[3]{1000}$;

$$\therefore \sqrt[3]{0.214} = 0.5981, \sqrt[3]{1000} = 10,$$

$$\text{故 } \sqrt[3]{214} = 0.5981 \times 10 = 5.981$$

故答案为: 5.981.

16. 若关于 x 的方程 $(a-1)x^{a^2+1} - 3x - 1 = 0$ 是一元二次方程，则 a 的值是_____.

【答案】 -1.

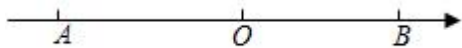
【解析】

【分析】 结合一元二次方程满足最高次数为 2 且二次项系数不为 0，建立方程，计算，即可.

【详解】根据题意得： $\begin{cases} a^2 + 1 = 2 \\ a - 1 \neq 0 \end{cases}$ ，解得： $a = -1$ 。故答案是： -1 。

【点睛】考查一元二次方程的定义，抓住最高次数为2且二次项系数不为0，即可，难度中等。

17. 如图，点 A 在数轴的负半轴，点 B 在数轴的正半轴，且点 A 对应的数是 $2x-1$ ，点 B 对应的数是 x^2+x ，已知 $AB=5$ ，则 x 的值为_____。



【答案】 $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$

【解析】

【分析】根据数轴上点的位置可得 $2x-1 < 0 < x^2+x$ ，即可得到 $AB = x^2+x - (2x-1) = 5$ ，由此解方程，再根据 $2x-1 < 0$ 即 $x < \frac{1}{2}$ 进行求解即可。

【详解】解：由数轴上点的位置可得 $2x-1 < 0 < x^2+x$ ，

$$\therefore AB = x^2+x - (2x-1) = 5 \text{ 即 } x^2-x-4=0,$$

$$\text{解得 } x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2},$$

$$\because 2x-1 < 0 \text{ 即 } x < \frac{1}{2},$$

$$\therefore x = \frac{1-\sqrt{17}}{2},$$

$$\text{故答案为: } \frac{1-\sqrt{17}}{2}.$$

【点睛】本题主要考查了数轴上两点的距离，解一元二次方程，解题的关键在于能够熟练掌握数轴上两点的距离以及解一元二次方程的方法。

18. 二次根式除法可以这样做：如果 $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 7+4\sqrt{3}$ ，像这样通过分子、分母同乘一

个式子把分母中的根号化去或者把根号中的分母化去，叫做分母有理化。有下列结论：

①将式子 $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ 进行分母有理化，可以对其分子、分母同时乘以 $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ；

②若 a 是 $\sqrt{2}$ 的小数部分, 则 $\frac{3}{a}$ 的值为 $\sqrt{2}+1$

③比较两个二次根式的大小: $\frac{1}{\sqrt{6}-2} > \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

④计算: $\frac{2}{3+\sqrt{3}} + \frac{2}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} + \frac{2}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}} + \cdots + \frac{2}{99\sqrt{97}+97\sqrt{99}} = 1 - \frac{\sqrt{11}}{33}$

以上结论正确的是_____. (写出所有正确的序号)

【答案】①③④

【解析】

【分析】 本题考查了利用分式的基本性质、平方差公式进行分母有理化.

①类比示例, 利用分式的基本性质进行分母有理化;

②估计无理数的整数部分, 求出小数部分 $a = \sqrt{2} - 1$, 进而分母有理化进行化简;

③通过分母有理化, 比较两个二次根式的大小;

④通过分母有理化找到题中无理式求和的运算规律, 从而化简求出值.

【详解】 解: ① $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})=5-2=3$,

故将式子 $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ 进行分母有理化, 可以对其分子、分母同时乘以 $\sqrt{2}+\sqrt{5}$, 故①正确;

② $\because a$ 是 $\sqrt{2}$ 的小数部分,

$\therefore a = \sqrt{2} - 1$,

故 $\frac{3}{a} = \frac{3}{\sqrt{2}-1} = \frac{3(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 3(\sqrt{2}+1)$, 故②错误;

③ $\frac{1}{\sqrt{6}-2} = \frac{\sqrt{6}+2}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)} = \frac{\sqrt{6}+2}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$,

$(\sqrt{6}+2)^2 = 10+4\sqrt{6}$, $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 = 8+2\sqrt{15}$,

$\because 4\sqrt{6} = \sqrt{96}$, $2\sqrt{15} = \sqrt{60}$,

故 $10+4\sqrt{6} > 8+2\sqrt{15}$,

$\therefore (\sqrt{6}+2)^2 > (\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$,

$$\text{故 } \frac{\sqrt{6}+2}{2} > \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{即 } \frac{1}{\sqrt{6}-2} > \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}, \text{ 故③正确;}$$

$$\text{④ } \frac{2}{3+\sqrt{3}} = \frac{2(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \frac{2(3-\sqrt{3})}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\frac{2}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} = \frac{2(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})}{(5\sqrt{3}+3\sqrt{5})(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})} = \frac{2(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})}{5 \times 3 \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\frac{2}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}} = \frac{2(7\sqrt{5}-5\sqrt{7})}{(7\sqrt{5}+5\sqrt{7})(7\sqrt{5}-5\sqrt{7})} = \frac{2(7\sqrt{5}-5\sqrt{7})}{7 \times 5 \times 2} = \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{7}}{7},$$

$$\frac{2}{99\sqrt{97}+97\sqrt{99}} = \frac{2(99\sqrt{97}-97\sqrt{99})}{(99\sqrt{97}+97\sqrt{99})(99\sqrt{97}-97\sqrt{99})} = \frac{2(99\sqrt{97}-97\sqrt{99})}{99 \times 97 \times 2} = \frac{\sqrt{97}}{97} - \frac{\sqrt{99}}{99},$$

$$\text{故 } \frac{2}{3+\sqrt{3}} + \frac{2}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} + \frac{2}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}} + \cdots + \frac{2}{99\sqrt{97}+97\sqrt{99}}$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{7}}{7} + \cdots + \frac{\sqrt{97}}{97} - \frac{\sqrt{99}}{99}$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{99}}{99}$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{11}}{33}, \text{ 故④正确.}$$

故答案为: ①③④.

三、简答题 (19, 20, 22, 23 每题 5 分, 21, 24 每题 6 分, 共 32 分)

19. 计算: $\sqrt{12} + \sqrt{20} + \sqrt{2} \times \sqrt{24} - \sqrt{5}$.

【答案】 $6\sqrt{3} + \sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式混合运算, 解题的关键是掌握相关的运算法则. 先算乘法, 把二次根式化为最简二次根式, 再合并同类二次根式.

【详解】解： $\sqrt{12} + \sqrt{20} + \sqrt{2} \times \sqrt{24} - \sqrt{5}$

$$= 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + \sqrt{2} \times 2\sqrt{6} - \sqrt{5}$$

$$= 2\sqrt{3} + \sqrt{5} + 4\sqrt{3}$$

$$= 6\sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

20. 计算： $(\sqrt{5}-1)^2 + \frac{4}{\sqrt{5}+3}$.

【答案】 $9-3\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的混合运算，运用完全平方公式以及分母有理化后，再进行二次根式的加减运算即可得出答案.

【详解】解： $(\sqrt{5}-1)^2 + \frac{4}{\sqrt{5}+3}$

$$= 5 - 2\sqrt{5} + 1 + \frac{4(\sqrt{5}-3)}{(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-3)}$$

$$= 5 - 2\sqrt{5} + 1 + \frac{4(\sqrt{5}-3)}{-4}$$

$$= 5 - 2\sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} + 3$$

$$= 9 - 3\sqrt{5}$$

21. 计算： $\sqrt{xy} \div \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y} + \sqrt{2xy} \div \sqrt{\frac{1}{2x}}$

【答案】 $3x\sqrt{y} - y\sqrt{x}$.

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算，利用二次根式的性质和因式分解的方法得到

$x-y = (\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$ ，再把除法化为乘法，然后约分即可求解，掌握运算法则是解题的关键.

【详解】解： 原式 $= \sqrt{xy} \div \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} + \sqrt{2xy} \times \sqrt{2x}$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{xy} \times \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + 2x\sqrt{y} \\
&= \sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + 2x\sqrt{y} \\
&= x\sqrt{y} - y\sqrt{x} + 2x\sqrt{y} \\
&= 3x\sqrt{y} - y\sqrt{x}.
\end{aligned}$$

22. 解方程: $2(x-1)^2 + \sqrt{3}(1-x) = 0$.

【答案】 $x_1 = 1, \quad x_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了求解一元二次方程，解决本题的关键是掌握提公因式法和十字相乘法求解. 根据因式分解法求解一元二次方程即可.

【详解】 解: $2(x-1)^2 + \sqrt{3}(1-x) = 0$,

整理, 得 $2(x-1)^2 - \sqrt{3}(x-1) = 0$,

提公因式, 得 $(x-1)[2(x-1) - \sqrt{3}] = 0$,

即 $x-1=0$ 或 $2(x-1) - \sqrt{3} = 0$,

解得 $x_1 = 1, \quad x_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

23. 用配方法解方程: $2x^2 - 4x - 1 = 0$

【答案】 $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$

【解析】

【分析】 根据配方法解一元二次方程的方法步骤求解即可得到答案.

【详解】 解: $2x^2 - 4x - 1 = 0$,

移项得 $2x^2 - 4x = 1$,

系数化为 1 得 $x^2 - 2x = \frac{1}{2}$,

配方得 $x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{2} + 1$,

$$\text{因式分解得 } (x-1)^2 = \frac{3}{2},$$

$$\text{即 } x-1 = \pm\sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$\therefore x_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

【点睛】 本题考查配方法解一元二次方程的方法步骤，熟练掌握配方法解一元二次方程是解决问题的关键.

$$24. \text{ 当 } a = \frac{2}{3}, \text{ 化简代数式 } \frac{a-1}{\sqrt{a}-1} + \sqrt{\frac{a^2+1}{a}} - 2, \text{ 并求值.}$$

$$\text{【答案】 } \frac{1}{a}\sqrt{a}+1, \quad \frac{\sqrt{6}}{2}+1$$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的化简求值，首先判断出 $a-1 < 0$ ，然后对二次根式进行化简，代入数值计算是解题的关键.

$$\text{【详解】 解: } \because a = \frac{2}{3},$$

$$\therefore 0 < a < 1,$$

$$\therefore a-1 < 0,$$

$$\begin{aligned} & \frac{a-1}{\sqrt{a}-1} + \sqrt{\frac{a^2+1}{a}} - 2 \\ &= \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}-1} + \sqrt{\frac{(a-1)^2}{a}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{a}+1 + \frac{1-a}{a}\sqrt{a}$$

$$= \sqrt{a}+1 + \frac{1-a}{a}\sqrt{a}$$

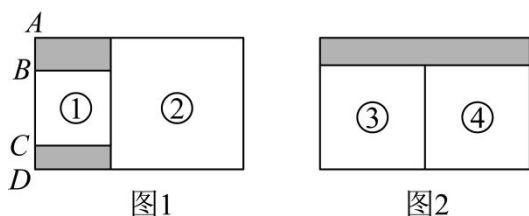
$$= \frac{1}{a}\sqrt{a}+1,$$

$$\text{当 } a = \frac{2}{3} \text{ 时, 原式} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}+1 = \frac{\sqrt{6}}{2}+1.$$

四、解答题 (25, 26 题 8 分, 27 题 10 分, 共 26 分)

25. 情景: 实践小组成员利用两块相同的长方形木板各切割两个正方形木板.

操作: 甲组成员的切割方式如图 1 所示, 小正方形① (一边 BC 与长方形边重合) 的面积为 27cm^2 , 小正方形② (三边与长方形边重合) 的面积为 75cm^2 , $AB = 2\text{cm}$.



(1) 求 CD 的长.

探究: 乙组成员的切割方式如图 2 所示, 从长方形木板上切下两块完全相同的最大的正方形木板③④.

(2) 求剩余部分 (阴影) 的面积 S .

【答案】 (1) CD 的长为 $(2\sqrt{3}-2)\text{cm}$ (2) 剩余部分 (阴影) 的面积 $S = 24\text{cm}^2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式混合运算的实际应用, 熟练掌握二次根式混合运算的运算顺序和运算法则并能正确根据图形, 得出数量关系是解决此题的关键.

(1) 根据小正方形的面积, 可求出边长, 然后计算线段的和差即可得解;

(2) 先求出大长方形的长面积, 再求出小正方形的面积, 然后进行计算即可得解.

【详解】 (1) 解: $\because$ 小正方形① (一边 BC 与长方形边重合) 的面积为 27cm^2 , 小正方形② (三边与长方形边重合) 的面积为 75cm^2 ,

$\therefore$ 小正方形①的边长 $BC = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}(\text{cm})$, 小正方形②的边长 $AD = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}(\text{cm})$,

$\because AB = 2\text{cm}$,

$\therefore CD = AD - AB - BC = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 2 = 2\sqrt{3} - 2(\text{cm})$,

$\therefore CD$ 的长为 $(2\sqrt{3}-2)\text{cm}$;

(2) 解: 由(1)知大长方形的长为 $3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 8\sqrt{3}\text{cm}$, 宽为 $5\sqrt{3}\text{cm}$,

$\therefore$ 大长方形的面积为 $= 8\sqrt{3} \times 5\sqrt{3} = 120(\text{cm}^2)$,

$\because$ 从长方形木板上切下两块完全相同的最大的正方形木板③④,

$\therefore$ 切下两块完全相同的最大的正方形边长为 $8\sqrt{3} \div 2 = 4\sqrt{3}(\text{cm})$,

$\therefore$ 切下两块完全相同的最大的正方形面积为 $2 \times (4\sqrt{3})^2 = 2 \times 48 = 96 (cm^2)$,

$\therefore$ 剩余部分 (阴影) 的面积 $S = 120 - 96 = 24 (cm^2)$.

26. 学习了 $\sqrt{a^2} = |a|$ 后, 数学老师出了一道化简题: $a + \sqrt{(1-a)^2} (a > 1)$. 下面是小亮和小芳的解答过程.

小亮: 解: 原式 $= a + 1 - a = 1$;

小芳: 解: 原式 $= a + |1-a|$, $\because a > 1$, $\therefore$ 原式 $= a + a - 1 = 2a - 1$,

(1) _____ 的解法是正确的;

(2) 化简: $\left(\sqrt{ab} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right) \cdot \sqrt{ab}$, 其中 $a < 0$, $b < 0$.

【答案】(1) 小芳 (2) $ab + b$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的混合运算.

(1) 利用二次根式的性质得到 $a + \sqrt{(1-a)^2} = a + |1-a|$, 然后根据 a 的范围去绝对值后合并得到原式 $= 2a - 1$, 从而可判断小芳的解法正确;

(2) 先根据二次根式的乘法法则运算, 再根据二次根式的性质计算, 然后根据 a 、 b 的取值范围去绝对值即可.

【小问 1 详解】

解: 当 $a > 1$ 时, $1-a < 0$, 则 $a + \sqrt{(1-a)^2} = a + |1-a| = a + a - 1 = 2a - 1$,

所以小芳的解法正确,

故答案为: 小芳;

【小问 2 详解】

解: $\left(\sqrt{ab} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right) \cdot \sqrt{ab}$

$$= \sqrt{(ab)^2} - \sqrt{\frac{b}{a} \cdot ab}$$

$$= |ab| - |b|,$$

$$\because a < 0, b < 0,$$

$$\therefore ab > 0, |b| = -b,$$

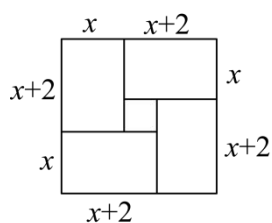
$$\therefore \text{原式} = ab + b.$$

27. 综合与实践：阅读材料，并解决以下问题.

(1) 学习研究：北师大版教材九年级上册第 39 页介绍了我国数学家赵爽在其所著的《勾股圆方图注》中关于一元二次方程的几何解法：以 $x^2 + 2x - 35 = 0$ 为例，求解过程如下：

①变形：将方程 $x^2 + 2x - 35 = 0$ 变形为 $x(x + 2) = 35$ ；

②构图：画四个长为 $x + 2$ ，宽为 x 的矩形，按如图 (1) 所示构造一个“空心”大正方形；

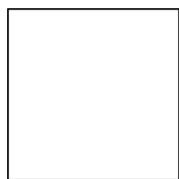


图(1)

③解答：则图中大正方形的面积从整体看可表示为 $(x + x + 2)^2$ ，从局部看还可表示为四个矩形与中间小正方形面积之和，即 $4x(x + 2) + 2^2 = 4 \times 35 + 4 = 144$ ，因此，可得新的一元二次方程 $(x + x + 2)^2 = 144$ ， $\therefore x$ 表示边长， $\therefore 2x + 2 = 12$ ，即 $x = 5$ 。

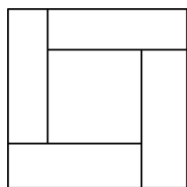
这种数形结合方法虽然只能得到原方程的其中一个正根。但是从新方程 $(x + x + 2)^2 = 144$ 可以得到原方程的另一个根是_____。

(2) 类比迁移：根据赵爽几何解法的方法求解方程 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 的一个正根（写出完整的求解过程，并在画图区画出示意图、标明各边长）。



画图区

(3) 拓展应用：一般地对于形如： $x^2 + ax + b = 0$ 一元二次方程可以构造图 (2) 来解，已知图 2 是由四个面积为 3 的相同矩形构成，中间围成的正方形面积为 4。那么 $a =$ _____， $b =$ _____，方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的一个正根为_____。



图(2)

【答案】(1) -7 ;

(2) $x=4$, 图形见详解;

(3) $a=2, b=-3, x=1$.

【解析】

【分析】(1) 运用直接开平方法解方程 $(x+x+2)^2=144$, 即可得到方程的另一个根.

(2) 将方程 $x^2-3x-4=0$ 变形为 $x(x-3)=4$, 画四个长为 x , 宽为 $x-3$ 的矩形, 构造一个“空心”大正方形; 仿照例题求解即可;

(3) 由中间围成的正方形面积为 4, 可得中间正方形的边长为 2. 设长方形的宽为 x , 则长为 $x+2$, 由题意得 $x(x+2)=3$, 整理得 $x^2+2x-3=0$, 即可求得 a 和 b 的值. 仿照例题构造大正方形, 即可求出 x 的值.

本题主要考查学生的阅读理解能力, 综合运用知识的能力. 读懂例题, 正确的构造出大正方形是解题的关键.

【小问 1 详解】

由 $(x+x+2)^2=144$ 得

$$(2x+2)^2=144$$

$$2x+2=\pm 12$$

$$\therefore x_1=5, x_2=-7$$

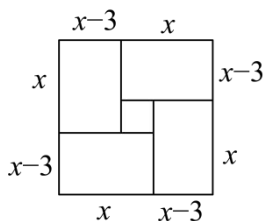
$\therefore$ 原方程的另一个根是 -7 .

故答案为: -7

【小问 2 详解】

将方程 $x^2-3x-4=0$ 变形为 $x(x-3)=4$,

画四个长为 x , 宽为 $x-3$ 的矩形, 按如图所示构造一个“空心”大正方形,



则图中大正方形的面积从整体看可表示为 $(x+x-3)^2$, 从局部看还可表示为四个矩形与中间小正方形面积

之和，即 $4x(x-3)+3^2=4\times 4+9=25$ ，因此，可得新的一元二次方程 $(x+x-3)^2=25$ ，

$\therefore x$ 表示边长，

$$\therefore 2x-3=5,$$

即 $x=4$ 。

【小问 3 详解】

$\therefore$ 中间围成的正方形面积为 4，

$\therefore$ 中间正方形的边长为 2，

设长方形的宽为 x ，则长为 $x+2$ ，

由题意得 $x(x+2)=3$ ，

整理得 $x^2+2x-3=0$ ，

$$\therefore a=2, \quad b=-3.$$

如图中大正方形的面积从整体看可表示为 $(x+x+2)^2$ ，从局部看还可表示为四个矩形与中间小正方形面积

之和，即 $4x(x+2)+2^2=4\times 3+4=16$ ，因此，可得新的一元二次方程 $(x+x+2)^2=16$ ，

$\therefore x$ 表示边长，

$$\therefore 2x+2=4,$$

即 $x=1$ 。

$\therefore$ 方程 $x^2+ax+b=0$ 的一个正根为 $x=1$ 。

故答案为： $\therefore a=2, \quad b=-3. \quad x=1$ 。

