

# 龙茗中学 2025 学年第一学期八年级数学学科期中测试卷

(考试时间: 90 分钟, 总分: 100 分)

## 一、选择题 (本大题共 6 小题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列说法: ①如果一个数的立方根等于它本身, 那么它一定是 1 或 0; ②平方根和立方根都等于它自身的数是 1 和 0; ③互为相反数的两个数的立方根也是互为相反数; ④一个数的算术平方根一定是正数; ⑤ $|-4|$  没有平方根. 其中正确的个数是 ( )

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查平方根、立方根和算术平方根的概念, 需注意特殊数 0 和负数的处理.

逐一判断每个说法的正误: ①立方根等于本身的数包括 0、1、-1, 但说法漏了 -1, 错误; ②平方根和立方根都等于自身的数只有 0, 但说法包括 1, 错误; ③互为相反数的两个数的立方根也互为相反数, 正确; ④算术平方根为非负数, 0 的算术平方根为 0, 不是正数, 错误; ⑤ $|-4| = 4$ , 有平方根, 错误. 因此仅有一个正确.

【详解】①立方根等于本身的数有 0、1、-1, 但说法限定为 1 或 0, 漏了 -1, 故①错误;

②平方根等于本身的数只有 0 (因为平方根定义, 1 的平方根为  $\pm 1 \neq 1$ ), 立方根等于本身的数有 0、1、-1, 故②错误;

③设  $a$  与  $b$  互为相反数, 即  $b = -a$ , 则  $\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$ , 故互为相反数的两个数的立方根也是互为相反数, 故③正确;

④算术平方根定义为非负数, 0 的算术平方根为 0, 不是正数, 故④错误;

⑤因为  $|-4| = 4$ , 4 的平方根为  $\pm 2$ , 所以  $|-4|$  有平方根, 故说法⑤错误.

仅③正确, 正确的个数为 1 个,

故选: A.

2. 下列说法: ①在实数范围内, 一个数如果不是有理数, 则一定是无理数; ②数轴上的点与有理数一一对应; ③无理数都是无限小数; ④带根号的数都是无理数. ⑤如果两个实数的和为无理数, 则这两个实数必有一个无理数其中错误的共有 ( )

- A. 1 个                      B. 2 个                      C. 3 个                      D. 4 个

【答案】B

### 【解析】

【分析】 本题考查实数的分类和性质，掌握实数的基本概念是解题关键.

实数包括有理数和无理数；数轴上的点与实数一一对应，并非仅与有理数对应；带根号的数不一定是无理数；两个实数的和为无理数时，至少有一个是无理数，据此判断即可.

【详解】 解：  $\because$  实数分为有理数和无理数，

$\therefore$  如果不是有理数，则一定是无理数，①正确；

$\because$  数轴上的点与实数一一对应，但有理数不能覆盖所有点，

$\therefore$  ②错误；

$\because$  无理数是无限不循环小数，

$\therefore$  都是无限小数，③正确；

$\because$  带根号的数可能是有理数（如  $\sqrt{4}=2$ ），

$\therefore$  ④错误；

$\because$  两个有理数的和是有理数，

$\therefore$  如果和为无理数，则至少有一个是无理数，⑤正确.

$\therefore$  错误的有②和④，共 2 个.

故选 B.

3. 以下各组二次根式中，是同类二次根式的是（ ）

A.  $\sqrt{a^2b^2}$  与  $\sqrt{ab}$

B.  $\sqrt{\frac{16}{x}}$  与  $\sqrt{8x}$

C.  $\sqrt{xy}$  与  $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}$

D.  $\sqrt{\frac{2s}{5}}$  与  $\sqrt{\frac{5}{2s}}$

【答案】 D

### 【解析】

【分析】 本题主要考查同类二次根式的判断，同类二次根式需化简后被开方数相同. 选项 D 中两个二次根式化简后都被开方数为  $10s$ ，因此是同类二次根式；其他选项化简后被开方数均不同.

【详解】 解： A:  $\sqrt{a^2b^2}=|ab|$ ， $\sqrt{ab}$  被开方数为  $ab$ ，不符合题意；

B:  $\sqrt{\frac{16}{x}}=\frac{4\sqrt{x}}{x}$ ，化为最简二次根式后被开方数为  $x$ ， $\sqrt{8x}=2\sqrt{2x}$ ，被开方数为  $2x$ ，不符合题意；

C:  $\sqrt{xy}$  被开方数为  $xy$ ， $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}=\sqrt{\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}}=\frac{\sqrt{y^2-x^2}}{|xy|}$  被开方数不同，不符合题意；

D:  $\sqrt{\frac{2s}{5}}=\frac{\sqrt{2s}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2s}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10s}}{5}$ ， $\sqrt{\frac{5}{2s}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2s}}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{2s}}{\sqrt{2s}\times\sqrt{2s}}=\frac{\sqrt{10s}}{2s}$ ，两者被开方数均为  $10s$ ，

是同类二次根式，符合题意.

故选: D.

4. 关于  $x$  的方程  $(a-1)x^2 + \sqrt{a+1}x + 2 = 0$  是一元二次方程, 则  $a$  的取值范围是( )

A.  $a \neq 1$

B.  $a \geq -1$  且  $a \neq 1$

C.  $a > -1$  且  $a \neq 1$

D.  $a \neq \pm 1$

【答案】 B

【解析】

【分析】 直接利用一元二次方程的定义分析得出答案.

【详解】  $\because$  关于  $x$  的方程  $(a-1)x^2 + \sqrt{a+1}x + 2 = 0$  是一元二次方程,

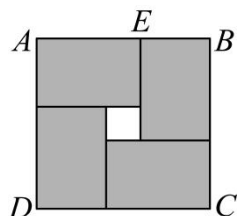
$\therefore a-1 \neq 0, a+1 \geq 0,$

解得:  $a \geq -1$ , 且  $a \neq 1$ .

故选 B.

【点睛】 此题主要考查了一元二次方程的定义, 正确把握定义是解题关键.

5. 把四张一模一样的长方形纸片按如图所示的方式摆放, 形成大正方形  $ABCD$ , 它的面积是 50. 图中空白部分是一个小正方形. 如果  $AE = 3\sqrt{2}$ , 那么这个小正方形的周长为 ( )



A.  $2\sqrt{2}$

B.  $4\sqrt{2}$

C.  $6\sqrt{2}$

D.  $8\sqrt{2}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查了算术平方根的应用以及正方形周长的计算, 熟练掌握算术平方根的定义和正方形周长公式是解题的关键.

先根据大正方形面积求出边长, 再结合  $AE$  的长度求出长方形的宽, 进而得到小正方形的边长, 最后计算其周长.

【详解】 解:  $\because$  大正方形  $ABCD$  的面积是 50,

$\therefore$  大正方形的边长  $AB = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ ,

$$\therefore AE = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{长方形的宽为 } AB - AE = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{小正方形的边长为 } 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{小正方形的周长为 } 4 \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2},$$

故答案为：B.

6. 如果关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  有两个实数根，且其中一个根是另一根的一半，则称这样的方程为“半根方程”。以下关于半根方程的说法，正确的是（ ）

A. 若方程  $(x-2)(mx-n) = 0$  是半根方程，则  $4m^2 + 5mn + n^2 = 0$ ；

B. 一元二次方程  $x^2 - x - 2 = 0$  是半根方程；

C. 一元二次方程  $x^2 - 4 = 0$  是半根方程；

D. 如果一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  是半根方程，则系数满足  $2b^2 = 9ac$ 。

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了解一元二次方程，熟练掌握半根方程的定义是解题的关键。

根据“半根方程”的定义（一根是另一根的一半），验证各选项。选项 B 和 C 的方程根不满足半根关系；选项 A 中推导出的关系式不成立；选项 D 通过根与系数关系推导出正确结论。

【详解】解：A：方程  $(x-2)(mx-n) = 0$  的根为  $x = 2$  和  $x = \frac{n}{m}$ ，

若为半根方程，则  $\frac{n}{m} = 1$  或  $4$ ，代入  $4m^2 + 5mn + n^2$  均不为零，故错误。

B：方程  $x^2 - x - 2 = 0$  的根为  $x = 2$  和  $x = -1$ ，不满足半根关系，故错误。

C：方程  $x^2 - 4 = 0$  的根为  $x = 2$  和  $x = -2$ ，不满足半根关系，故错误。

D： $\because$  设方程两根为  $r$  和  $s$ ，且  $s = \frac{r}{2}$ ，

根据根与系数关系： $r + s = -\frac{b}{a}$ ， $r \cdot s = \frac{c}{a}$ ，

则  $r + \frac{r}{2} = -\frac{b}{a}$ ，即  $r = -\frac{2b}{3a}$ ，

又  $r \cdot \frac{r}{2} = \frac{c}{a}$ ，即  $\frac{r^2}{2} = \frac{c}{a}$ ，

$$\text{则 } \frac{\left(-\frac{2b}{3a}\right)^2}{2} = \frac{c}{a}, \text{ 整理得: } \frac{2b^2}{9a^2} = \frac{c}{a},$$

故  $2b^2 = 9ac$ ,  $\therefore$  选项 D 正确.

因此, 只有 D 正确.

故选: D.

## 二、填空题 (本大题共 12 小题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7.  $6\frac{1}{4}$  的平方根为\_\_\_\_\_;

【答案】  $\pm\frac{5}{2}$

【解析】

【分析】 该题考查了平方根, 先将带分数转换为假分数, 再求其平方根.

【详解】 解:  $6\frac{1}{4} = \frac{25}{4}$ ,

$$\therefore \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}, \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4},$$

$\therefore \frac{25}{4}$  的平方根为  $\pm\frac{5}{2}$ .

即  $6\frac{1}{4}$  的平方根为  $\pm\frac{5}{2}$ .

故答案为:  $\pm\frac{5}{2}$ .

8. 比较大小:  $\frac{\pi}{3}$  \_\_\_\_\_  $\frac{\sqrt{10}}{3}$ .

【答案】  $<$

【解析】

【分析】 本题主要考查了实数的大小比较, 熟练掌握无理数的估算方法是解题的关键. 先分别估算  $\pi$  和  $\sqrt{10}$  的大小, 再比较分子大小, 进而得出两个分数的大小关系.

【详解】 解:  $\because \pi \approx 3.14, \sqrt{10} \approx 3.16$

$$\therefore \pi < \sqrt{10}$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} < \frac{\sqrt{10}}{3}$$

故答案为：<.

9. 写出  $\sqrt{x}-2$  的一个有理化因式\_\_\_\_\_.

【答案】  $\sqrt{x}+2$

【解析】

【分析】 根据平方差公式，即可得到答案.

【详解】  $\because (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)=x-4$ ,

$\therefore \sqrt{x}+2$  是  $\sqrt{x}-2$  的一个有理化因式,

故答案是:  $\sqrt{x}+2$ .

【点睛】 本题主要考查二次根式的有理化，熟练掌握平方差公式，是解题的关键.

10. 等式  $\sqrt{\frac{x+2}{x^2}} = -\frac{\sqrt{x+2}}{x}$  成立的条件是\_\_\_\_\_.

【答案】  $-2 \leq x < 0$

【解析】

【分析】 根据二次根式有意义的条件列出不等式组，解出不等式组即可. 本题考查了二次根式的除法法则

成立的条件  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} (a \geq 0, b > 0)$ ，及  $\sqrt{a^2} = |a|$ . 熟练掌握二次根式的性质是解题的关键.

【详解】 解:  $\because \sqrt{\frac{x+2}{x^2}} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{x+2}}{|x|}$ ，且  $\sqrt{\frac{x+2}{x^2}} = -\frac{\sqrt{x+2}}{x}$ ，

$$\therefore \frac{\sqrt{x+2}}{|x|} = -\frac{\sqrt{x+2}}{x},$$

根据二次根式有意义的条件得  $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$ ，

解得  $-2 \leq x < 0$ ，

故答案为:  $-2 \leq x < 0$ .

11. 在实数  $\sqrt{7}$ 、 $-3$ 、 $0$ 、 $\pi$ 、 $1.\dot{1}2\dot{1}$ 、 $\frac{22}{7}$ 、 $3.1415$ 、 $\sqrt{9}$ 、 $1.2020020002\dots$  (位数无限，每两个2之间依次增加一个0). 无理数有\_\_\_\_\_个.

【答案】 3

**【解析】**

**【分析】** 该题考查了无理数，根据无理数的定义，无限不循环小数是无理数，逐一判断每个实数.

**【详解】** 解：  $\sqrt{7}$  是无理数；  $-3$  是整数，是有理数；  $0$  是整数，是有理数；  $\pi$  是无理数；  $1.\dot{1}2\dot{1}$  是循环小数，是有理数；  $\frac{22}{7}$  是分数，是有理数；  $3.1415$  是有限小数，是有理数；  $\sqrt{9} = 3$ ，是有理数；  $1.2020020002\ldots$  (位数无限，每两个  $2$  之间依次增加一个  $0$ ) 是无限不循环小数，是无理数. 因此无理数有  $3$  个.  
故答案为：  $3$ .

12. 如果  $m$  是方程  $2x^2 + x - 5 = 0$  的一个根，则  $6m^2 + 3m - 2025 =$  \_\_\_\_\_;

**【答案】**  $-2010$

**【解析】**

**【分析】** 该题考查了一元二次方程的解，由于  $m$  是方程  $2x^2 + x - 5 = 0$  的一个根，代入方程可得  $2m^2 + m - 5 = 0$ ，即  $2m^2 + m = 5$ . 所求表达式  $6m^2 + 3m - 2025$  可变形为  $3(2m^2 + m) - 2025$ ，代入已知值计算即可.

**【详解】** 解：因为  $m$  是方程  $2x^2 + x - 5 = 0$  的一个根，

所以  $2m^2 + m - 5 = 0$ ,

即  $2m^2 + m = 5$ .

则  $6m^2 + 3m - 2025 = 3(2m^2 + m) - 2025 = 3 \times 5 - 2025 = 15 - 2025 = -2010$ .

故答案为：  $-2010$ .

13. 如果平均每人每天食用粮食  $0.5\text{kg}$ ，那么按照 2020 年我国人口普查的数据：全国约有  $14.4$  亿人，那么上述人口一天约食用 \_\_\_\_\_ 千克的粮食 (用科学记数法表示).

**【答案】**  $7.2 \times 10^8$

**【解析】**

**【分析】** 本题主要考查了科学记数法的表示方法，有理数的乘法. 熟练掌握科学记数法的表示形式为  $a \times 10^n$  的形式，其中  $1 \leq |a| < 10$ ,  $n$  为整数，要正确确定  $a$  的值以及  $n$  的值是解决此题的关键. 先根据题意计算，再用科学记数法表示即可.

**【详解】** 解：  $\because$  平均每人每天食用粮食  $0.5\text{kg}$ ，全国人口约  $14.4$  亿  $= 14.4 \times 10^8$  人，

∴总粮食食用量为： $0.5 \times 14.4 \times 10^8 = 7.2 \times 10^8$  (kg) 粮食，

故答案为： $7.2 \times 10^8$ .

14. 写出一个一元二次方程使它有一个根为 2，且两根之和是  $-\frac{9}{2}$ ，这个一元二次方程是\_\_\_\_\_ (只要写出一个)

【答案】  $2x^2 + 9x - 26 = 0$

【解析】

【分析】该题考查了一元二次方程根与系数关系，设一元二次方程的一个根为 2，根据根与系数的关系，由两根之和求出另一个根，再根据两根之积构造方程.

【详解】解：设另一个根为  $m$ ，

由根与系数的关系，两根之和为  $-\frac{b}{a} = 2 + m = -\frac{9}{2}$ ，

解得  $m = -\frac{13}{2}$ .

两根之积为  $\frac{c}{a} = 2 \times \left(-\frac{13}{2}\right) = -13$ .

取  $a = 2$  (为了消除分母)，

则  $b = -a \times$  两根之和  $= -2 \times \left(-\frac{9}{2}\right) = 9$ ， $c = a \times$  两根之积  $= 2 \times (-13) = -26$ ，

故方程为： $2x^2 + 9x - 26 = 0$ .

故答案为： $2x^2 + 9x - 26 = 0$  (答案不唯一).

15. 在实数范围内因式分解： $2x^2 + 4x + 1 =$ \_\_\_\_\_

【答案】  $(\sqrt{2}x + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{2}x + \sqrt{2} - 1)$

【解析】

【分析】本题考查配方法将代数式变形为完全平方式及平方差公式进行因式分解，熟记公式结构是本题的解题关键.

先提取公因数，再配方，最后利用平方差公式求解即可.

【详解】解： $2x^2 + 4x + 1$

$= 2(x^2 + 2x) + 1$

$$\begin{aligned}
&= 2[(x+1)^2 - 1] + 1 \\
&= 2(x+1)^2 - 1 \\
&= [\sqrt{2}(x+1)]^2 - 1^2 \\
&= [\sqrt{2}(x+1)+1][\sqrt{2}(x+1)-1] \\
&= (\sqrt{2}x + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{2}x + \sqrt{2} - 1),
\end{aligned}$$

故答案为:  $(\sqrt{2}x + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{2}x + \sqrt{2} - 1)$ .

16. 若实数  $a$ ,  $b$  分别满足  $a^2 - 4a + 3 = 0$ ,  $b^2 - 4b + 3 = 0$ , 且  $a \neq b$ , 则  $(a+1)(b+1)$  的值为\_\_\_\_\_.

【答案】 8

【解析】

【分析】先根据题意可以把  $a$ 、 $b$  看作是一元二次方程  $x^2 - 4x + 3 = 0$  的两个实数根, 利用根与系数的关系得到  $a+b=4$ ,  $ab=3$ , 再代入代数式进行求解即可.

【详解】解:  $\because a$ 、 $b$  分别满足  $a^2 - 4a + 3 = 0$ ,  $b^2 - 4b + 3 = 0$

$\therefore$  可以  $a$ 、 $b$  看作是一元二次方程  $x^2 - 4x + 3 = 0$  的两个实数根,

$\therefore a+b=4$ ,  $ab=3$ ,

$\therefore (a+1)(b+1) = ab + a + b + 1 = 3 + 4 + 1 = 8$ ,

故答案为: 8.

【点睛】本题主要考查了代数式求值, 一元二次方程根与系数的关系, 熟知一元二次方程根与系数的关系是解题的关键.

17. 已知 3 是关于  $x$  的方程  $x^2 - (m+1)x + 2m = 0$  的一个根, 并且这个方程的两个实数根恰好是等腰

$ABC$  的两条边的边长, 则  $ABC$  的周长是\_\_\_\_\_.

【答案】 10 或 11 或 10

【解析】

【分析】把  $x=3$  代入已知方程求得  $m$  的值, 然后通过解方程求得该方程的两根, 即等腰  $ABC$  的两条边长, 由三角形三边关系和三角形的周长公式进行解答即可.

【详解】解: 将  $x=3$  代入方程  $x^2 - (m+1)x + 2m = 0$  中得:  $9 - 3(m+1) + 2m = 0$ ,

解得:  $m=6$ ,

则原方程为  $x^2 - 7x + 12 = 0$ ,

解得:  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 4$ ,

∵ 这个方程的两个实数根恰好是等腰  $ABC$  的两条边长,

∴ ①当  $ABC$  的腰为 4 时,  $ABC$  的周长为  $4 + 4 + 3 = 11$ ,

②当  $ABC$  的腰为 3 时,  $ABC$  的周长为  $3 + 3 + 4 = 10$ ,

综上所述,  $ABC$  的周长为 10 或 11,

故答案为: 10 或 11.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的解, 三角形三边的关系, 熟练掌握能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解, 又因为只含有一个未知数的方程的解也叫做这个方程的根, 所以, 一元二次方程的解也称为一元二次方程的根.

18. 定义: 用  $(a, b)$  表示一个数对, 其中  $a$  为任意数,  $b \geq 0$ . 记  $\sqrt[3]{a} = m$ ,  $-\sqrt{b} = n$ , 将数对  $(m, n)$  和  $(n, m)$  称为数对  $(a, b)$  的一对“开方对称数对”. 例如: 数对  $(8, 25)$  的开方对称数对为  $(2, -5)$  和  $(-5, 2)$ . 若数对  $(a, b)$  的一个开方对称数对是  $(-4, 5)$ , 则  $a + b$  的值是\_\_\_\_\_.

【答案】 141

【解析】

【分析】 本题主要考查了立方根、算术平方根的定义, 熟练掌握“开方对称数对”的定义以及立方根、算术平方根的运算规则是解题的关键.

根据“开方对称数对”的定义, 分两种情况讨论, 判断哪种情况符合条件, 进而求出  $a$ 、 $b$  的值, 最后计算  $a + b$ .

【详解】 情况一: 若  $(m, n) = (-4, 5)$ ,

$$\because m = \sqrt[3]{a},$$

$$\therefore a = (-4)^3 = -64.$$

$$\because n = -\sqrt{b},$$

$$\therefore \sqrt{b} = -5, \text{ 但 } b \geq 0 \text{ 时 } \sqrt{b} \geq 0, \text{ 矛盾, 无解.}$$

情况二: 若  $(n, m) = (-4, 5)$

$$\because n = -\sqrt{b},$$

$$\therefore -\sqrt{b} = -4, \text{ 即 } \sqrt{b} = 4, \text{ 故 } b = 4^2 = 16.$$

$$\therefore m = \sqrt[3]{a},$$

$$\therefore \sqrt[3]{a} = 5,$$

$$\therefore a = 5^3 = 125.$$

$$\therefore a + b = 125 + 16 = 141.$$

故答案为: 141.

### 三、计算题 (每题 6 分, 共 5 题, 满分 30 分)

19. 计算:  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} - \sqrt{1\frac{7}{9}} - \sqrt{18}$

【答案】  $-\frac{1}{3} - 3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题涉及二次根式的混合运算, 先根据分母有理化、二次根式的性质化简, 最后合并同类项得到结果.

【详解】 解:  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} - \sqrt{1\frac{7}{9}} - \sqrt{18}$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \sqrt{2} - 1 - \sqrt{\frac{16}{9}} - 3\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) + \sqrt{2} - 1 - \frac{4}{3} - 3\sqrt{2}$$

$$= 2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 - \frac{4}{3} - 3\sqrt{2}$$

$$= -\frac{1}{3} - 3\sqrt{2}.$$

20. 计算:  $\frac{2}{b}\sqrt{ab^2} \times \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \div 3\sqrt{\frac{b}{a}} (b > 0)$

【答案】  $-a^2\sqrt{a}$

【解析】

【分析】 先根据二次根式有意义的条件判断  $a$  的符号, 然后根据二次根式的乘除混合运算, 根号里面和外面分别计算, 最后再化简二次根式即可求解. 本题考查了二次根式的乘除混合运算, 熟练掌握运算是解题的关键.

【详解】解：由题意可得  $ab^2 \geq 0$ ,  $a^3b \geq 0$ ,  $\frac{b}{a} \geq 0$ ,

$$\therefore b > 0,$$

$$\therefore a > 0,$$

$$\therefore \frac{2}{b}\sqrt{ab^2} \times \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \div 3\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$= \left[\frac{2}{b} \times \left(-\frac{3}{2}\right) \div 3\right] \cdot \sqrt{ab^2 \cdot a^3b \div \frac{b}{a}}$$

$$= -\frac{1}{b}\sqrt{a^5b^2}$$

$$= -\frac{1}{b} \cdot a^2b\sqrt{a}$$

$$= -a^2\sqrt{a}.$$

21. 解方程:  $3x(2x-1)+1-2x=0$

【答案】  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}$

【解析】

【分析】此题考查了解一元二次方程——因式分解法，熟练掌握因式分解法解一元二次方程是解本题的关键.

利用因式分解法求解即可.

【详解】解:  $3x(2x-1)+1-2x=0$ ,

$$\therefore 3x(2x-1)-(2x-1)=0,$$

$$\therefore (2x-1)(3x-1)=0,$$

$$\therefore 2x-1=0 \text{ 或 } 3x-1=0,$$

解得:  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}$ .

22. 解方程:  $-3x^2+4x+\frac{2}{3}=0$  (配方法)

【答案】  $x_1 = \frac{2+\sqrt{6}}{3}$ ,  $x_2 = \frac{2-\sqrt{6}}{3}$

【解析】

【分析】先将常数项移到右边，再将二次项系数化为1，两边同时加上一次项系数一半的平方，将左边配成完全平方公式，再直接开平方求解即可.

本题主要考查用配方法解一元二次方程，熟练掌握配方法解一元二次方程的步骤是解题的关键.

【详解】解：移项，得  $-3x^2 + 4x = -\frac{2}{3}$ ,

方程两边同除以  $-3$  得  $x^2 - \frac{4}{3}x = \frac{2}{9}$ ,

两边同时加  $\frac{4}{9}$ ，得  $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$ ,

配方，得  $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$ ,

两边同时开方，得  $x - \frac{2}{3} = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$ ,

解得  $x_1 = \frac{2 + \sqrt{6}}{3}$ ,  $x_2 = \frac{2 - \sqrt{6}}{3}$ .

23. 若  $a$ 、 $b$  是实数，且  $b = \sqrt{4a-1} + \sqrt{1-4a} + 4$ ，求  $\left[ \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - (\sqrt{b}-\sqrt{a}) \right] \times (\sqrt{a} + \sqrt{b})$  的值.

【答案】  $\frac{5}{2}$

【解析】

【分析】本题主要考查了二次根式有意义的条件，求不等式的解集，二次根式的混合运算，解题的关键是掌握以上性质和运算法则.

根据二次根式有意义的条件求出  $a, b$  的值，根据二次根式的运算法则化简代数式，然后代数求值即可.

【详解】解：根据二次根式有意义的条件得，

$$4a-1 \geq 0, 1-4a \geq 0,$$

$$\therefore a \geq \frac{1}{4}, \text{ 且 } a \leq \frac{1}{4},$$

$$\therefore a = \frac{1}{4},$$

$$\therefore b = 4,$$

$$\left[ \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - (\sqrt{b}-\sqrt{a}) \right] \times (\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$\begin{aligned}
&= [\sqrt{a} + \sqrt{b} - (\sqrt{b} - \sqrt{a})] \times (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \\
&= 2\sqrt{a} \times (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \\
&= 2a + 2\sqrt{ab}
\end{aligned}$$

将  $a = \frac{1}{4}$ ,  $b = 4$  代入上式得,

$$\text{原式} = 2 \times \frac{1}{4} + 2\sqrt{4 \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.$$

#### 四、解答题 (24-26 每题 6 分, 27 题 7 分, 28 题 9 分, 共 5 题, 34 分)

24. 数学活动课上, 同学们将数轴进行折叠、旋转等几何变换. 请阅读下列素材, 完成各题.

[素材 1] 灵动小组绘制了一条“灵动数轴” (如图), 其中点  $A$  表示的数为  $a$ , 点  $B$  表示的数为  $b$ , 点  $C$  表示的数为  $c$ . 已知  $a, b, c$  满足  $|a + \sqrt{3}| + (6 + c)^2 = -\sqrt{b - 7}$



(1) 在“灵动数轴”中,  $a =$  \_\_\_\_\_,  $b =$  \_\_\_\_\_,  $c =$  \_\_\_\_\_.

(2) 折叠“灵动数轴”, 使点  $B$  与点  $C$  重合, 求此时与点  $A$  重合的点所表示的数.

**【答案】** (1)  $-\sqrt{3}; 7; -6$

(2)  $1 + \sqrt{3}$

**【解析】**

**【分析】** 本题主要考查了数轴, 非负数的应用, 算术平方根的性质, 理解题意是解题的关键.

(1) 利用非负数的性质解答即可;

(2) 利用对称性求得折痕处对应的数为 0.5, 则利用点  $A$  对应的数与点  $A$  重合的点距离 0.5 的长度相等解答即可;

**【小问 1 详解】**

$$\text{解: } \because |a + \sqrt{3}| + (6 + c)^2 = -\sqrt{b - 7},$$

$$\therefore |a + \sqrt{3}| + \sqrt{(6 + c)^2} + \sqrt{b - 7} = 0,$$

$$\therefore a + \sqrt{3} = 0, 6 + c = 0, b - 7 = 0,$$

$$\therefore a = -\sqrt{3}, b = 7, c = -6,$$

故答案为:  $-\sqrt{3}; 7; -6$ ;

【小问 2 详解】

解:  $\because$  点  $B$  与点  $C$  重合,

$$\therefore \text{折痕处对应的数为 } \frac{-6+7}{2} = 0.5,$$

$$\therefore \text{与点 } A \text{ 重合的点所表示的数为 } 0.5 \times 2 + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}.$$

25. 已知: 关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 4x - 2m + 5 = 0$  有两个实数根  $x_1, x_2$ .

(1) 求实数  $m$  的取值范围;

(2) 若  $x_1x_2 + x_1 + x_2 = m^2 + 6$ , 求  $m$  的值.

【答案】(1)  $m \geq \frac{1}{2}$ ;

(2)  $m$  的值为 1.

【解析】

【分析】(1) 计算一元二次方程根的判别式  $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-2m + 5) = 8m - 4 \geq 0$ , 进而即可求解;

(2) 利用根与系数的关系  $x_1 + x_2 = 4$ ,  $x_1x_2 = -2m + 5$ , 然后代入求解即可;

此题考查了根据一元二次方程的根的判别式判断一元二次方程的根的情况, 一元二次方程根与系数的关系, 正确理解一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  根的判别式  $\Delta = b^2 - 4ac$ , 当  $\Delta > 0$  时, 方程有两个不相等的实数根; 当  $\Delta = 0$  时, 方程有两个相等的实数根; 当  $\Delta < 0$  时, 方程没有实数根; 熟记: 一元二次方程

$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  的两个根为  $x_1, x_2$ , 则  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ,  $x_1x_2 = \frac{c}{a}$  是解题的关键.

【小问 1 详解】

解:  $\because$  关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 4x - 2m + 5 = 0$  有两个实数根  $x_1, x_2$ ,

$$\therefore \Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-2m + 5) = 8m - 4 \geq 0,$$

解得:  $m \geq \frac{1}{2}$ ;

【小问 2 详解】

解:  $\because$  关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 4x - 2m + 5 = 0$  有两个实数根  $x_1, x_2$ ,

$$\therefore x_1 + x_2 = 4, \quad x_1x_2 = -2m + 5,$$

$$\therefore x_1x_2 + x_1 + x_2 = m^2 + 6,$$

$$\therefore -2m + 5 + 4 = m^2 + 6, \text{ 整理得 } m^2 + 2m - 3 = 0,$$

$$\text{解得: } m = 1, \quad m = -3,$$

$$\text{由 (1) 得: } m \geq \frac{1}{2},$$

$$\therefore m = 1,$$

$$\therefore m \text{ 的值为 } 1.$$

26. 已知关于  $x$  的方程  $(2+k)x^2 + 6kx + 4k + 1 = 0$  有两个相等的实数根, 求  $k$  的值和此时方程的根.

**【答案】**  $k = 2$  或  $k = -\frac{1}{5}$ , 方程的根为:  $x = -\frac{3}{2}$  或  $x = \frac{1}{3}$

**【解析】**

**【分析】** 根据题意得:  $2+k \neq 0$  且  $b^2 - 4ac = 0$  解方程可得  $k$  的值, 再代入列出关于  $x$  的方程, 求解可得.

**【详解】** 解: 根据题意, 得:  $2+k \neq 0$ , 即  $k \neq -2$ ,

$$b^2 - 4ac = (6k)^2 - 4(2+k)(4k+1) = 0,$$

$$\text{解得: } k = 2 \text{ 或 } k = -\frac{1}{5},$$

$$\text{当 } k = 2 \text{ 时, 方程为 } 4x^2 + 12x + 9 = 0,$$

$$\text{解得: } x = -\frac{3}{2},$$

$$\text{当 } k = -\frac{1}{5} \text{ 时, 方程为 } \frac{9}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{1}{5} = 0,$$

$$\text{解得: } x = \frac{1}{3},$$

$$\therefore k = 2 \text{ 或 } k = -\frac{1}{5}, \quad x = -\frac{3}{2} \text{ 或 } x = \frac{1}{3}.$$

**【点睛】** 本题考查了根的判别式与一元二次方程的定义, 解题的关键是掌握  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  的根与  $b^2 - 4ac$  有如下关系: 当  $b^2 - 4ac > 0$  时, 方程有两个不相等的实数根; 当  $b^2 - 4ac = 0$  时, 方程有两个相等的实数根; 当  $b^2 - 4ac < 0$  时, 方程无实数根.

27. 阅读下面材料: 已知  $x_1, x_2$  是一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的两实数根, 若满足  $|x_1 - x_2| = 1$ , 则此类方程称为“差根方程”. 在学习了求根公式法解方程后, 小聪同学发现:

$$|x_1 - x_2| = \left| \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right| = \left| \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \right| = 1. \text{ 最后得到“差根方程”中 } a, b, c \text{ 之间的}$$

$$\text{关系是 } b^2 - 4ac = a^2.$$

(1) 请通过计算判断方程  $x^2 + 7x + 12 = 0$  是否是“差根方程”.

(2) 若方程  $x^2 + 2x - k + 1 = 0$  是“差根方程”，请求出  $k$  的值以及方程的两个根.

(3) 若关于  $x$  的“差根方程”  $a(x+m)^2 + b = 0$  的一个根是  $x = 3$  ( $a, m, b$  均为常数,  $a \neq 0$ ), 则方程  $a(x+m+4)^2 = -b$  是“差根方程”吗?若是, 请求出它的根; 若不是, 请说明理由.

**【答案】** (1) 方程  $x^2 + 7x + 12 = 0$  是“差根方程”

$$(2) \quad k = \frac{1}{4}; \quad x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{3}{2}$$

(3) 方程  $a(x+m+4)^2 = -b$  是“差根方程”. 它的根是  $x_1 = -1, x_2 = -2$  或  $x_1 = 0, x_2 = -1$ .

**【解析】**

**【分析】** 本题考查了解一元二次方程、一元二次方程根与系数的关系, 理解“差根方程”的定义是解此题的关键.

(1) 利用因式分解法求出方程的解, 再结合“差根方程”的定义判断即可得解;

(2) 由题意可得  $|x_1 - x_2| = 1$ , 从而可得  $(x_1 - x_2)^2 = 1$ , 由一元二次方程根与系数的关系可得  $x_1 + x_2 = -2$ ,  $x_1 \cdot x_2 = 1 - k$ , 再利用完全平方公式的变形计算可得  $k = \frac{1}{4}$ , 最后解方程即可得解;

(3) 由“差根方程”的定义计算可得  $a = -4b$ , 从而可得  $m_1 = -\frac{5}{2}, m_2 = -\frac{7}{2}, (x+m+4)^2 = \frac{1}{4}$ , 求解并判断即可得解.

**【小问 1 详解】**

解:  $\because x^2 + 7x + 12 = 0$ ,

$$\therefore (x+3)(x+4) = 0,$$

$$\therefore x+3=0 \text{ 或 } x+4=0,$$

$$\therefore x_1 = -3, \quad x_2 = -4,$$

$$\therefore |x_1 - x_2| = |-3 - (-4)| = 1,$$

$\therefore$  方程  $x^2 + 7x + 12 = 0$  是“差根方程”;

**【小问 2 详解】**

解:  $\because$  方程  $x^2 + 2x - k + 1 = 0$  是“差根方程”,

$$\therefore |x_1 - x_2| = 1,$$

$$\therefore (x_1 - x_2)^2 = 1,$$

$$\because x_1 + x_2 = -2, \quad x_1 \cdot x_2 = 1 - k,$$

$$\therefore (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4(x_1 \cdot x_2) = (-2)^2 - 4 \times (1 - k) = 1,$$

$$\text{解得: } k = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{方程为 } x^2 + 2x + \frac{3}{4} = 0,$$

$$\therefore x^2 + 2x = -\frac{3}{4},$$

$$\therefore x^2 + 2x + 1 = -\frac{3}{4} + 1,$$

$$\therefore (x + 1)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\therefore x + 1 = \pm \frac{1}{2},$$

$$\therefore x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{3}{2};$$

【小问 3 详解】

解:  $\because$  关于  $x$  的“差根方程”  $a(x + m)^2 + b = 0$  的一个根是  $x = 3$  ( $a, m, b$  均为常数,  $a \neq 0$ ),

$$\therefore ax^2 + 2amx + am^2 + b = 0,$$

$$\therefore (2am)^2 - 4 \times a \times (am^2 + b) = a^2,$$

$$\therefore a = -4b,$$

$$\text{即 } -4b(x + m)^2 + b = 0,$$

$$\therefore (x + m)^2 = \frac{1}{4},$$

$\because$  关于  $x$  的“差根方程”  $a(x + m)^2 + b = 0$  的一个根是  $x = 3$  ( $a, m, b$  均为常数,  $a \neq 0$ ),

$$\therefore (3 + m)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\therefore m_1 = -\frac{5}{2}, \quad m_2 = -\frac{7}{2}.$$

将  $a = -4b$  代入方程  $a(x + m + 4)^2 = -b$  可得:  $(x + m + 4)^2 = \frac{1}{4},$

解得:  $x_1 = -m - \frac{7}{2}$ ,  $x_2 = -m - \frac{9}{2}$ ,

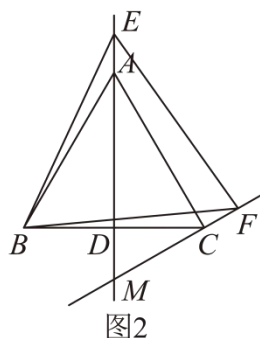
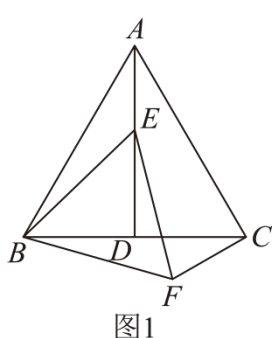
$$\therefore |x_1 - x_2| = \left| -m - \frac{7}{2} - \left( -m - \frac{9}{2} \right) \right| = 1,$$

$\therefore$  方程  $a(x+m+4)^2 = -b$  是“差根方程”, 它的根为  $x_1 = -m - \frac{7}{2}$ ,  $x_2 = -m - \frac{9}{2}$ .

即  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -2$  或  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -1$ .

$\therefore$  方程  $a(x+m+4)^2 = -b$  是“差根方程”. 它的根是  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -2$  或  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -1$ .

28. 已知  $AD$  为等边  $ABC$  的角平分线,  $ABC$  的边长为 6, 动点  $E$  在直线  $AD$  上 (不与点  $A$  重合), 连接  $BE$ . 以  $BE$  为一边在  $BE$  的下方作等边  $\triangle BEF$ , 连接  $CF$ .



(1) 如图 1, 若点  $E$  在线段  $AD$  上,

①求证:  $\triangle ABE \cong \triangle CBF$ ;

②当  $DE = 2AE$ ,  $S_{\triangle ABC} = 9\sqrt{3}$  时, 求点  $F$  到  $BC$  的距离;

(2) 设直线  $AE$ 、 $CF$  交于点  $M$ , 求两直线的夹角 (即  $\angle AMC$ ) 的度数; 若点  $E$  在  $AD$  的反向延长线 (如图 2), 且直线  $AE$ 、 $CF$  交于点仍记为  $M$ . 这两条直线的夹角是否发生变化. 说明理由

**【答案】** (1) ①见详解; ②  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)  $\angle AMC = 60^\circ$ , 不会发生变化, 理由见详解

**【解析】**

**【分析】** 本题考查三角形全等的性质和判定, 等边三角形的性质, 解题关键是通过全等证明角度相等, 推出特殊角度的三角形, 将面积用公式用底和高表示出来, 直接求高然后代值判断即可.

(1) ①直接利用 SAS 证明三角形全等即可;

②通过三角形的中线和线段之间的比例关系, 得到  $S_{\triangle BCF} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ , 再通过三角形面积公式计算即可;

(2) ①同 (1) ①证出  $\triangle ABE \cong \triangle CBF$ , 再利用角度之间的关系进行计算即可;

②证出  $\triangle ABE \cong \triangle CBF$ ，再利用角度之间的关系进行计算即可；

【小问 1 详解】

解：①证明： $\because \triangle ABC$  和  $\triangle BEF$  均为等边三角形，

$$\therefore AB = CB, EB = FB, \angle EBF = \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EBA = \angle FBC,$$

在  $\triangle ABE$  和  $\triangle CBF$  中，

$$\begin{cases} AB = CB \\ \angle ABE = \angle CBF \\ EB = FB \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBF (\text{SAS}).$$

$$\textcircled{2} \because DE = 2AE,$$

$$\therefore S_{\triangle BDE} = 2S_{\triangle ABE},$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABD},$$

$\because AD$  是等边三角形  $ABC$  的角平分线，

$$\therefore BD = CD,$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABD} = \frac{1}{6}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{6} \times 9\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3},$$

$$\because \triangle ABE \cong \triangle CBF,$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle BCF} = \frac{3}{2}\sqrt{3},$$

设点  $F$  到  $BC$  的距离是为  $d$ ，

$$\therefore S_{\triangle BCF} = \frac{1}{2}BC \times d = \frac{1}{2} \times 6 \times d = \frac{3}{2}\sqrt{3},$$

$$\therefore d = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

故点  $F$  到  $BC$  的距离是为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

【小问 2 详解】

解：如图 1，若点  $E$  在线段  $AD$  上，同 (1) ①可证  $\triangle ABE \cong \triangle CBF (\text{SAS})$ ，

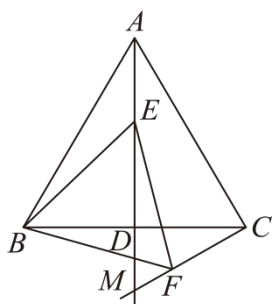


图1

$$\therefore \angle EAB = \angle FCB,$$

$$\text{又} \because \angle EAB + \angle ABD = \angle FCB + \angle AMC,$$

$$\therefore \angle AMC = \angle ABD = 60^\circ.$$

如图 2, 若点  $E$  在  $AD$  的反向延长线, 这两条直线的夹角不会发生变化.

同 (1) ①可证  $\triangle ABE \cong \triangle CBF$  (SAS),

$$\therefore \angle AEB = \angle CFB,$$

$$\text{又} \because \angle AEB + \angle EBF = \angle CFB + \angle AMC,$$

$$\therefore \angle AMC = \angle EBF = 60^\circ.$$