

2025-2026 学年八年级上学期期中模拟卷 01

数学·全解全析

(考试时间: 90 分钟 试卷满分: 100 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。
4. 测试范围: 沪教版新教材八年级上册第 19~20 章 (实数+二次根式)。

第一部分 (选择题 共 18 分)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分。在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的)

1. 在实数 3.14、0、 $\sqrt{8}$ 、 $\frac{\pi}{2}$ 、 $\frac{22}{7}$ 、 $\sqrt{\frac{4}{9}}$ 中, 无理数有 ()

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

【答案】C

【详解】解: $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$,

$\therefore$ 在实数 3.14、0、 $\sqrt{8}$ 、 $\frac{\pi}{2}$ 、 $\frac{22}{7}$ 、 $\sqrt{\frac{4}{9}}$ 中, 无理数有 $\sqrt{8}$, $\frac{\pi}{2}$, 一共 2 个,

故选: C.

2. 下列说法正确的是 ()

- A. 1 的平方根与立方根相同 B. 实数与数轴上的点一一对应
C. 两个无理数的和还是无理数 D. 对于实数 a , 若 $\sqrt{a^2} = a$, 则 $a > 0$

【答案】B

【详解】解: A、因为 $(\pm 1)^2 = 1$, 所以 1 的平方根是 ± 1 , 因为 $1^3 = 1$, 所以 1 的立方根是 1, 由于 1 的平方根与立方根不相同, 所以选项 A 错误;

B、实数与数轴上的点一一对应, 即每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示, 所以选项 B 正确;

C、例如 $\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$ 都是无理数, 它们的和为 $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$, 而 0 是有理数, 所以选项 C 错误;

D、根据二次根式的性质， $\sqrt{a^2}=|a|$ ，当 $a \geq 0$ 时， $|a|=a$ ；当 $a < 0$ 时， $|a|=-a$ 。已知 $\sqrt{a^2}=a$ ，则 $a \geq 0$ ，而不是 $a > 0$ ，所以选项 D 错误。

故选：B。

3. 下列二次根式中，是最简二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{\frac{1}{2}a}$ B. $\sqrt{a^3}$ C. $\sqrt{35a}$ D. $\sqrt{a^2+2a+1}$

【答案】C

【详解】解：A、 $\sqrt{\frac{1}{2}a}=\frac{\sqrt{2a}}{2}$ ，故 A 不符合题意；

B、 $\sqrt{a^3}=a\sqrt{a}$ ，故 B 不符合题意；

C、 $\sqrt{35a}$ 是最简二次根式，故 C 符合题意；

D、 $\sqrt{a^2+2a+1}=|a+1|$ ，故 D 不符合题意。

故选：C。

4. 若 $\sqrt{x^3+4x^2}=-x\sqrt{x+4}$ ，则 x 的取值范围是（ ）

- A. $x \leq 0$ B. $x \geq -4$ C. $-4 \leq x \leq 0$ D. $-4 \leq x < 0$

【答案】C

【详解】解： $\because \sqrt{x^3+4x^2}=\sqrt{x^2(x+4)}=-x\sqrt{x+4}$ ，

$$\therefore \begin{cases} x \leq 0 \\ x+4 \geq 0 \end{cases},$$

$$\therefore -4 \leq x \leq 0;$$

故选：C。

5. 下列各组二次根式中，属于同类二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 和 $\sqrt{\frac{3}{2}}$ B. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 和 $\sqrt{0.2}$
C. $\sqrt{4ab}$ 和 $\sqrt{2ab}$ D. $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{a^2}$

【答案】A

【详解】A、 $\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 和 $\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 被开方数相同，故是同类二次根式，符合题意；

B、 $\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 和 $\sqrt{0.2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 被开方数不同，故不是同类二次根式，不符合题意；

C、 $\sqrt{4ab} = 2\sqrt{ab}$ 和 $\sqrt{2ab}$ 被开方数不同，故不是同类二次根式，不符合题意；

D、 $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{a^2} = |a|$ 被开方数不同，故不是同类二次根式，不符合题意；

故选：A.

6. 若 $a + |a| = 0$ ，则 $\sqrt{(a+1)^2} + \sqrt{(a-1)^2}$ 的值是 ()

A. 2

B. $-2a$

C. 2 或 $-2a$

D. $2a$

【答案】C

【详解】解：∵ $a + |a| = 0$ ，

$$\therefore |a| = -a,$$

$$\therefore |a| \geq 0$$

$$\therefore -a \geq 0$$

$$\therefore a \leq 0,$$

$$\text{则 } \sqrt{(a+1)^2} + \sqrt{(a-1)^2}$$

$$= |a+1| + |a-1|$$

$$= |a+1| + 1 - a$$

当 $-1 \leq a \leq 0$ 时，则 $|a+1| + 1 - a = a+1+1-a = 2$ ；

当 $a < -1$ 时，则 $|a+1| + 1 - a = -a-1+1-a = -2a$ ；

故选：C

第二部分（非选择题 共 82 分）

二、填空题（本大题共 12 小题，每小题 2 分，满分 24 分）

7. $\sqrt{64}$ 的值是_____.

【答案】8

【详解】解：∵ $8^2 = 64$ ，

$$\text{故 } \sqrt{64} = 8,$$

故答案为：8.

8. 已知 $a < 0$ ，那么 $\sqrt{9a^2}$ 可化简为_____.

【答案】 $-3a$

【详解】解：原式 $= 3|a|$

$= -3a$ ；

故答案为： $-3a$.

9. 比较大小： $-\sqrt{15}$ _____ -4 . (填“>”、“=”或“<”)

【答案】 $>$

【详解】解： $\because 4 = \sqrt{16} > \sqrt{15}$,

$\therefore -\sqrt{15} > -\sqrt{16}$,

$\therefore -\sqrt{15} > -4$.

故答案为： $>$

10. 已知数轴上两点 A、B，对应的实数分别是 $\sqrt{2}$ 和 $-3\sqrt{2}$ ，则线段 AB 的长为_____.

【答案】 $4\sqrt{2}$

【详解】 $\because$ 数轴上点 A、B 所对应的实数分别是 $\sqrt{2}$ 和 $-3\sqrt{2}$,

$\therefore$ A、B 两点间的距离为： $|\sqrt{2} - (-3\sqrt{2})| = 4\sqrt{2}$.

故答案为： $4\sqrt{2}$.

11. 用科学记数法表示： $0.001026 =$ _____.

【答案】 1.026×10^{-3}

【详解】解：数据 0.001026 可以用科学记数法表示为 1.026×10^{-3} ,

故答案为： 1.026×10^{-3} .

12.  若 $6.24 \approx 2.498^2$, $62.4 \approx 7.899^2$, 则 $\sqrt{0.624} \approx$ _____ , $\sqrt{62400} \approx$ _____.

【答案】 0.7899 249.8

【详解】解： $\because 6.24 \approx 2.498^2$, $62.4 \approx 7.899^2$,

$\therefore \sqrt{6.24} \approx 2.498$, $\sqrt{62.4} \approx 7.899$,

$\therefore \sqrt{0.624} \approx 0.7899$, $\sqrt{62400} \approx 249.8$.

故答案为： 0.7899 ; 249.8 .

13. 近似数 1.010×10^6 精确到_____位.

【答案】千

【详解】解：近似数 1.010×10^6 精确到千位.

故答案为：千.

14. 若 $\sqrt{x+y-2} + (y+z-1)^2 + |x+z-3| = 0$ ，则 $x = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $y = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $z = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 2 0 1

【详解】解： $\sqrt{x+y-2} + (y+z-1)^2 + |x+z-3| = 0$ ，

$$\therefore \sqrt{x+y-2} \geq 0, (y+z-1)^2 \geq 0, |x+z-3| \geq 0,$$

$$\therefore x+y-2=0, y+z-1=0, x+z-3=0,$$

解得： $x=2$ ， $y=0$ ， $z=1$ ；

故答案为：2；0；1.

15.  已知 $\sqrt[3]{1.12} \approx 1.038$ ， $\sqrt[3]{11.2} \approx 2.237$ ， $\sqrt[3]{112} \approx 4.820$ ， $\sqrt[3]{a} \approx -0.4820$ ，则 $a = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 -0.112

【详解】解： $\because \sqrt[3]{1.12} \gg 1.038$ ， $\sqrt[3]{11.2} \approx 2.237$ ， $\sqrt[3]{112} \approx 4.820$ ， $\sqrt[3]{a} \approx -0.4820$ ，

$$\therefore \sqrt[3]{-0.112} \gg -0.4820,$$

$$\therefore a = -0.112,$$

故答案为：-0.112.

16. 不等式 $x < \sqrt{2}x + \sqrt{2}$ 的解集为_____.

【答案】 $x > -2 - \sqrt{2}$

【详解】解： $x < \sqrt{2}x + \sqrt{2}$

$$\therefore (1 - \sqrt{2})x < \sqrt{2}$$

$$\therefore x > \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})} = -2 - \sqrt{2}$$

$$\therefore x > -2 - \sqrt{2}$$

17. 若 $\sqrt{11}$ 的整数部分为 a ， $5 - \sqrt{6}$ 小数部分为 b ，则 $a - b$ 的值为_____.

【答案】 $\sqrt{6}$

【详解】解：∵ $\sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16}$,

$$\therefore 3 < \sqrt{11} < 4,$$

$$\therefore a = 3,$$

$$\therefore \sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9},$$

$$\therefore 2 < \sqrt{6} < 3,$$

$$\therefore -3 < -\sqrt{6} < -2,$$

$$\therefore 5-3 < 5-\sqrt{6} < 5-2 \text{ 即 } 2 < 5-\sqrt{6} < 3$$

$$\therefore b = 5 - \sqrt{6} - 2 = 3 - \sqrt{6},$$

$$\therefore a - b = 3 - (3 - \sqrt{6}) = \sqrt{6},$$

故答案为： $\sqrt{6}$.

18. **【新考向】**定义一种运算, 对于任意角 α 和 β , $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$, 已知 $\tan 45^\circ = 1$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, 那么 $\tan 105^\circ \cdot \tan 15^\circ$ 的值是_____.

【答案】 -1

【详解】解：∵ $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$, $\tan 45^\circ = 1$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$$\therefore \tan 105^\circ = \tan (45^\circ + 60^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 60^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 60^\circ} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{1 - 3} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3},$$

$$\tan 60^\circ = \tan (15^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 15^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 15^\circ \tan 45^\circ}, \text{ 即 } \sqrt{3} = \frac{\tan 15^\circ + 1}{1 - \tan 15^\circ}$$

$$\therefore \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan 15^\circ = \tan 15^\circ + 1$$

$$\therefore \tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\therefore \tan 105^\circ \cdot \tan 15^\circ = -(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = -1,$$

故答案为： -1.

三.解答题 (本大题共 8 小题, 58 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

19. (4 分) 计算: $\sqrt{75} - \frac{2}{3}\sqrt{27} - (\sqrt{3} - 1)^0 + \frac{3}{\sqrt{3} + 1}$.

【详解】解: $\sqrt{75} - \frac{2}{3}\sqrt{27} - (\sqrt{3} - 1)^0 + \frac{3}{\sqrt{3} + 1}$

$$\begin{aligned}
&= 5\sqrt{3} - \frac{2}{3} \times 3\sqrt{3} - 1 + \frac{3(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \cdots \cdots (1 \text{ 分}) \\
&= 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 1 + \frac{3\sqrt{3}-3}{2} \cdots \cdots (2 \text{ 分}) \\
&= 3\sqrt{3} - 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \cdots \cdots (3 \text{ 分}) \\
&= \frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} \cdots \cdots (4 \text{ 分})
\end{aligned}$$

20. (4 分) 计算: $\left(\sqrt{24} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \times \sqrt{3} - (3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})$.

【详解】解: $\left(\sqrt{24} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \times \sqrt{3} - (3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})$

$$\begin{aligned}
&= \left(2\sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \times \sqrt{3} - [3^2 - (2\sqrt{2})^2] \cdots \cdots (1 \text{ 分}) \\
&= 2\sqrt{6} \times \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3} - (9 - 8) \cdots \cdots (2 \text{ 分}) \\
&= 6\sqrt{2} - \sqrt{2} - 1 \cdots \cdots (3 \text{ 分}) \\
&= 5\sqrt{2} - 1 \cdots \cdots (4 \text{ 分})
\end{aligned}$$

21. (4 分) 已知一个数的两个不同的平方根是 $3a+1$ 和 $a+11$, 求这个数的立方根.

【详解】解: $\because$ 一个数的两个不同的平方根是 $3a+1$ 和 $a+11$,

$$\therefore 3a+1+a+11=0, \text{ 解得: } a=-3, \cdots \cdots (2 \text{ 分})$$

$$\therefore \text{这个数是 } (3a+1)^2 = [3 \times (-3)+1]^2 = 64,$$

$$\therefore \text{这个数的立方根是 } \sqrt[3]{64} = 4 \cdots \cdots (4 \text{ 分})$$

22. (6 分) 先化简, 后求值: $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{a-4\sqrt{ab}+4b}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}}$, 其中 $a=\frac{1}{2}$, $b=2$.

【详解】解: 原式 $= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{(\sqrt{a}-2\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}} \cdots \cdots (1 \text{ 分})$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{a} - 2\sqrt{b} \cdots \cdots (3 \text{ 分}) \\
&= 2\sqrt{a} - 3\sqrt{b} \cdots \cdots (4 \text{ 分})
\end{aligned}$$

当 $a=\frac{1}{2}$, $b=2$ 时,

原式 $= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2} - 3\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$. …… (6 分)

23. (6 分) 观察下列等式, 并回答问题:

第 1 个 $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$;

第 2 个 $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}$;

第 3 个 $|\sqrt{3} - \sqrt{4}| = \sqrt{4} - \sqrt{3}$;

第 4 个 $|\sqrt{4} - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - \sqrt{4}$;

……

(1) 化简: $|\sqrt{35} - 6| =$ _____; 这是第 _____ 个等式.

(2) 第 n 个等式是 _____. (用含 n 的式子表示)

(3) 比较 $\frac{\sqrt{24}-1}{4}$ 与 1 的大小.

【详解】(1) 解: 根据前 4 个式子可得: $|\sqrt{35} - 6| = |\sqrt{35} - \sqrt{36}| = \sqrt{36} - \sqrt{35} = 6 - \sqrt{35}$,
这是第 35 个等式. …… (2 分)

(2) 解: 由前 4 个等式可得第 n 个等式为 $|\sqrt{n} - \sqrt{n+1}| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. …… (4 分)

(3) 解: $\because \frac{\sqrt{24}-1}{4} - 1 = \frac{\sqrt{24}-1}{4} - \frac{4}{4} = \frac{\sqrt{24}-5}{4} = \frac{\sqrt{24}-\sqrt{25}}{4} < 0$,

$\therefore \frac{\sqrt{24}-1}{4} < 1$. …… (6 分)

24. (11 分) 阅读材料: 像 $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 2$; $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a (a \geq 0)$; $(\sqrt{b} + 1)(\sqrt{b} - 1) = b - 1 (b \geq 0)$... 两个含有二次根式的代数式相乘, 积不含有二次根式, 我们称这两个代数式互为有理化因式. 例如 $\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{3}$, $\sqrt{2} + 1$ 与 $\sqrt{2} - 1$, $3 + 3\sqrt{5}$ 与 $3 - 3\sqrt{5}$ 等都是互为有理化因式.

在进行二次根式计算时, 利用有理化因式, 可以化去分母中的根号.

例如: $\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 3 + 2\sqrt{2}$.

解答下列问题:

(1) $2\sqrt{3} - 5$ 与 _____ 互为有理化因式, 将 $\frac{3}{2\sqrt{5}}$ 分母有理化得 _____;

(2) 计算下列式子的值: $\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2023}}$;

(3) 已知正整数 a, b 满足 $\frac{a}{\sqrt{2}-1} - \frac{b}{\sqrt{2}} = 2 - 3\sqrt{2}$, 求 a, b 的值.

【详解】(1) 解: $2\sqrt{3}-5$ 与 $2\sqrt{3}+5$ 互为有理化因式,

$$\frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3 \times \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10},$$

故答案为: $2\sqrt{3}+5; \frac{3\sqrt{5}}{10}$ (3 分)

$$\begin{aligned} (2) \text{ 解: } & \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2023}} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} + \cdots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}{(\sqrt{2025}+\sqrt{2023})(\sqrt{2025}-\sqrt{2023})} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} + \cdots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2025}-1}{2} \\ &= 22; \text{ (7 分)} \end{aligned}$$

$$(3) \text{ 解: } \because \frac{a}{\sqrt{2}-1} - \frac{b}{\sqrt{2}} = a(\sqrt{2}+1) - \frac{\sqrt{2}}{2}b = a + \left(a - \frac{1}{2}b\right)\sqrt{2},$$

$$\text{且 } \frac{a}{\sqrt{2}-1} - \frac{b}{\sqrt{2}} = 2 - 3\sqrt{2},$$

$$\therefore a + \left(a - \frac{1}{2}b\right)\sqrt{2} = 2 - 3\sqrt{2},$$

$$\therefore \begin{cases} a = 2 \\ a - \frac{1}{2}b = -3 \end{cases},$$

解这个方程组, 得 $\begin{cases} a = 2 \\ b = 10 \end{cases}$,

$\therefore a = 2, b = 10$ (11 分)

25. (11 分) 观察下列等式

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{1}+\sqrt{2})^2} = \sqrt{1} + \sqrt{2};$$

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} = \sqrt{2} + \sqrt{3};$$

$$\sqrt{7+2\sqrt{12}} = \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{4})^2} = \sqrt{3} + \sqrt{4};$$

.....

请你直接写出以下计算结果:

(1)请你猜测 $\sqrt{13+2\sqrt{42}} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\sqrt{21+2\sqrt{110}} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2)针对上述各式显示的规律, 请你猜测

$$\sqrt{(2n-1)+2\sqrt{n^2-n}} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (n \geq 2, n \text{ 为整数});$$

(3)利用上述规律计算:

$$\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} + \frac{1}{\sqrt{7+2\sqrt{12}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)+2\sqrt{n^2-n}}} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (n \geq 2, n \text{ 为整数}).$$

【详解】(1) 解: 根据题意可得:

$$\sqrt{13+2\sqrt{42}} = \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{7})^2} = \sqrt{6} + \sqrt{7},$$

$$\sqrt{21+2\sqrt{110}} = \sqrt{(\sqrt{10} + \sqrt{11})^2} = \sqrt{10} + \sqrt{11},$$

故答案为: $\sqrt{6} + \sqrt{7}$, $\sqrt{10} + \sqrt{11}$. …… (4 分)

(2) 解: $\sqrt{(2n-1)+2\sqrt{n^2-n}} = \sqrt{(\sqrt{n-1} + \sqrt{n})^2} = \sqrt{n-1} + \sqrt{n},$

故答案为: $\sqrt{n-1} + \sqrt{n}$. …… (6 分)

(3) 解: 根据题意可得:

$$\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} + \frac{1}{\sqrt{7+2\sqrt{12}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)+2\sqrt{n^2-n}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}$$

$$= -(\sqrt{1} - \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - \sqrt{4}) - \cdots - (\sqrt{n-1} - \sqrt{n})$$

$$= -1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{4} - \cdots - \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$$

$$= -1 + \sqrt{n},$$

故答案为: $-1 + \sqrt{n}$. …… (11 分)

26. **新考向** (12 分) 配方法是中学数学的重要方法, 用配方法可求最大 (小) 值. 对于任意正实数 a, b ,

可作如下变形 (提示: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$);

$$\therefore a+b = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 2\sqrt{ab},$$

$$\text{又} \because (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0,$$

$$\therefore (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 2\sqrt{ab} \geq 0 + 2\sqrt{ab}, \text{ 即 } a + b \geq 2\sqrt{ab}.$$

当且仅当 $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, 即 $a = b$ 时等号成立.



图1

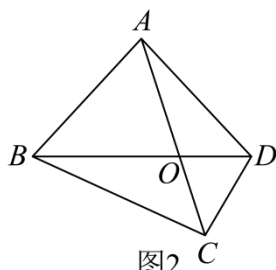


图2

(1) 若 $x > 0$, 代数式 $x + \frac{9}{x}$ 的最小值为_____, 此时 $x =$ _____.

(2) 某园林设计师要对园林的一个区域进行设计改造, 一面利用墙体将该区域用篱笆围成中间隔有一道篱笆的矩形花圃, 如图 1 所示, 为了围成面积为 108m^2 的花圃, 所用的篱笆至少为多少米?

(3) 如图 2, 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O , $\triangle AOB$ 、 $\triangle COD$ 的面积分别为 9 和 4, 求四边形 $ABCD$ 面积的最小值.

【详解】(1) 解: 由题意, 设 $a = x$, $b = \frac{9}{x}$,

$$\therefore \text{由 } a + b \geq 2\sqrt{ab}, \text{ 得 } x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{9}{x}} = 6,$$

$\therefore$ 当且仅当 $x = \frac{9}{x}$, 即 $x = 3$ (负值舍去) 时, 代数式取到最小值, 最小值为 6.

故答案为: 6; 3; …… (4 分)

(2) 解: 由题意, 设花圃的宽为 x 米, 则长为 $\frac{108}{x}$ 米,

$$\therefore \text{所用的篱笆} = 3x + \frac{108}{x},$$

$$\text{又令 } a = 3x, \quad b = \frac{108}{x},$$

$$\therefore \text{由 } a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

$$\therefore 3x + \frac{108}{x} \geq 2\sqrt{3x \cdot \frac{108}{x}} = 36.$$

$\therefore$ 当且仅当 $3x = \frac{108}{x}$, 即 $x = 6$ (负值舍去) 时, 代数式取到最小值, 最小值为 36.

答: 所用的篱笆至少为 36 米. …… (8 分)

(3) 解: 由题意, 设 $S_{\triangle COB} = m$,

$\therefore \triangle COB$ 与 $\triangle COD$ 底边上的高相等, $\triangle AOB$ 与 $\triangle AOD$ 底边上的高相等,

$$\therefore \frac{OB}{OD} = \frac{S_{\triangle COB}}{S_{\triangle COD}} = \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOD}},$$

$$\therefore \frac{m}{4} = \frac{9}{S_{\triangle AOD}}.$$

$$\therefore S_{\triangle AOD} = \frac{36}{m}.$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = 9 + 4 + m + \frac{36}{m} = 13 + m + \frac{36}{m}.$$

$$\text{又} \therefore m + \frac{36}{m} \geq 2\sqrt{m \times \frac{36}{m}} = 12,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} \geq 13 + 12 = 25,$$

$$\therefore \text{当 } m = \frac{36}{m} \text{ 时, 即 } m = 6 \text{ (负值舍去) 时取等号.}$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 面积的最小值为 } 25. \cdots \cdots (12 \text{ 分})$$