

上海市虹口区欧阳学校 2025-2026 学年上学期八年级期中数学试卷

一、选择题（本大题共 6 题，每题 2 分，共 12 分）

1. 下列各数中，无理数是（ ）

- A. 0 B. $\frac{22}{7}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 0.1010010001

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了无理数的定义，无限不循环小数即为无理数，据此逐个分析，即可作答.

【详解】解：∵0 是整数， $\frac{22}{7}$ 是分数，0.1010010001 是有限小数，

∴它们都不是无理数，

∵ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是无限不循环小数，

∴ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是无理数，

故选：C.

2. 下列二次根式中，最简二次根式是（ ）

- A. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ B. $\sqrt{8}$ C. $\sqrt{x^2+1}$ D. $\sqrt{x^2}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据最简二次根式的概念判断即可.

【详解】解：A、 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，被开方数含分母，不是最简二次根式，不符合题意；

B、 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ，被开方数中含能开得尽方的因数，不是最简二次根式，不符合题意；

C、 $\sqrt{x^2+1}$ ，是最简二次根式，符合题意；

D、 $\sqrt{x^2} = |x|$ ，被开方数中含能开得尽方的因式，不是最简二次根式，不符合题意；

故选：C.

【点睛】本题考查的是最简二次根式的概念，被开方数不含分母、被开方数中不含能开得尽方的因数或因式的二次根式，叫做最简二次根式.

3. 下列根式中，与 $2\sqrt{3}$ 是同类二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{18}$ B. $\sqrt{\frac{3}{2}}$ C. $\sqrt{75}$ D. $\sqrt{0.3}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的性质、同类二次根式的判断，关键是熟知同类二次根式：一般地，把几个二次根式化为最简二次根式后，如果它们的被开方数相同，就把这几个二次根式叫做同类二次根式，据此逐项判断即可.

【详解】解：A、 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ，故 $\sqrt{18}$ 与 $2\sqrt{3}$ 不是同类二次根式，不符合题意；

B、 $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，故 $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 与 $2\sqrt{3}$ 不是同类二次根式，不符合题意；

C、 $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ ，故 $\sqrt{75}$ 与 $2\sqrt{3}$ 是同类二次根式，符合题意；

D、 $\sqrt{0.3} = \sqrt{\frac{3}{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$ ，故 $\sqrt{0.3}$ 与 $2\sqrt{3}$ 不是同类二次根式，不符合题意，

故选：C.

4. 下列方程是关于 x 的一元二次方程的是（ ）

- A. $2x+1=3$ B. $x^2+y=2$ C. $ax^2+bx+c=0$ D. $3x^2+2x=4$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程的定义：①等号两边是整式，②只含有一个未知数，③未知数的最高次数为2.

直接根据一元二次方程的定义逐个判定即可得到答案.

【详解】解：由题意可得，

A. $2x+1=3$ 是一元一次方程，不符合题意；

B. $x^2+y=2$ 含有两个未知数，不是一元二次方程，不符合题意；

C. 当 $a=0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 不是一元二次方程，不符合题意；

D. $3x^2+2x=4$ 是一元二次方程，符合题意；

故选：D.

5. 关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2 + x + m^2 - 4 = 0$ 有一个根为 0, 则 m 的值是 ()

A. -2

B. 2

C. ± 2

D. 0

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的定义和一元二次方程的解: 能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解.

将 $x=0$ 代入方程 $(m-2)x^2 + x + m^2 - 4 = 0$ 计算即可.

【详解】 解: 把 $x=0$ 代入方程 $(m-2)x^2 + x + m^2 - 4 = 0$

得 $m^2 - 4 = 0$,

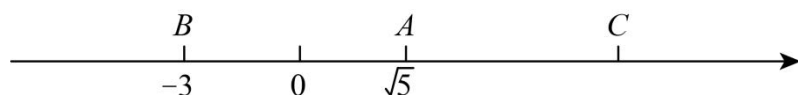
解得 $m = \pm 2$,

又因为 $m-2 \neq 0$, 即 $m \neq 2$,

所以 $m = -2$,

故选: A.

6. 如图, 在数轴上, 点 B 与点 C 关于点 A 对称, A 、 B 两点对应的实数分别是 $\sqrt{5}$ 和 -3 , 那么点 C 所对应的实数是 ()



A. $\sqrt{5} + 3$

B. $\sqrt{5} - 3$

C. $2\sqrt{5} - 3$

D. $2\sqrt{5} + 3$

【答案】 D

【解析】

【分析】 设点 C 所对应的实数是 x , 根据中心对称的性质, 即对称点到对称中心的距离相等, 即可列方程求解.

【详解】 解: 设点 C 所对应的实数是 x .

则有 $x - \sqrt{5} = \sqrt{5} - (-3)$,

解得 $x = 2\sqrt{5} + 3$, 故 D 正确.

故选: D.

【点睛】 本题主要考查的是数轴上两点间距离的定义, 根据题意列出关于 x 的方程是解答此题的关键.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 2 分，共 24 分）

7. 16 的平方根是_____.

【答案】 ± 4

【解析】

【分析】 本题考查了平方根，平方根的定义，一个正数有两个平方根，它们互为相反数，据此求解即可.

【详解】 解： $\because 4^2 = 16, (-4)^2 = 16,$

$\therefore 16$ 的平方根是 ± 4 .

故答案为： ± 4 .

8. 比较大小： $\sqrt{80}$ _____ 9.

【答案】 $<$

【解析】

【分析】 本题考查了实数的大小比较，根据 $9 = \sqrt{81}$ 即可解答，熟知 (1) 任意两个实数都可以比较大小. 正实数都大于 0，负实数都小于 0，正实数大于一切负实数，两个负实数比大小，绝对值大的反而小是解题的关键.

【详解】 解： $\because 9 = \sqrt{81}, 80 < 81$

$\therefore \sqrt{80} < \sqrt{81},$

$\therefore \sqrt{80} < 9,$

故答案为： $<$.

9. 某种颗粒的半径约为 0.000025 米，用科学记数法表示这个数为_____ 米.

【答案】 2.5×10^{-5}

【解析】

【分析】 绝对值小于 1 的正数也可以利用科学记数法表示，一般形式为 $a \times 10^{-n}$ ，与较大数的科学记数法不同的是其所使用的是负指数幂，指数由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

【详解】 $0.000025 = 2.5 \times 10^{-5}$

故答案为： 2.5×10^{-5} .

10. 已知 $\sqrt{20.24} \approx 4.499$ ， $\sqrt{202.4} \approx 14.227$ ，则 $\sqrt{202400} \approx$ _____.

【答案】 449.9

【解析】

【分析】根据题意，得 $\sqrt{202400} = \sqrt{20.24 \times 100^2} = \sqrt{20.24} \times 100$ 计算即可.

本题考查了算术平方根的估算，熟练掌握规律和计算方法是解题的关键.

【详解】解：根据题意，得 $\sqrt{202400} = \sqrt{20.24 \times 100^2} = \sqrt{20.24} \times 100$ ，

又 $\sqrt{20.24} \approx 4.499$ ，

故 $\sqrt{202400} \approx 4.499 \times 100 = 449.9$ ，

故答案为：449.9.

11. 要使式子 $\frac{\sqrt{m+1}}{2}$ 有意义，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \geq -1$

【解析】

【分析】此题考查了二次根式有意义的条件，根据二次根式的被开方数有意义的条件即可求出 m 的范围，解题的关键是熟练掌握二次根式有意义的条件.

【详解】解： $\because \frac{\sqrt{m+1}}{2}$ 有意义，

$\therefore m+1 \geq 0$ ，

$\therefore m \geq -1$ ，

故答案为： $m \geq -1$.

12. 将根号外面的字母移入根号内，则有 $a\sqrt{\frac{-1}{a}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\sqrt{-a}$

【解析】

【分析】根据二次根式的性质进行求解即可.

【详解】解： $\because$ 二次根式 $a\sqrt{\frac{-1}{a}}$ 要有意义，

$\therefore \frac{-1}{a} \geq 0$ ，

$\therefore a < 0$ ，

$$\therefore a\sqrt{\frac{-1}{a}} = -\sqrt{\frac{-1}{a}} \cdot a^2 = -\sqrt{-a},$$

故答案为: $-\sqrt{-a}$.

【点睛】 本题主要考查了化简二次根式, 熟知二次根式的性质是解题的关键.

13. 分母有理化: $\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\sqrt{3}+1$

【解析】

【分析】 本题考查分母有理化 (把分母中的根号化去的过程称为分母有理化), 把分子分母同乘以 $(\sqrt{3}+1)$, 然后利用平方差公式计算即可. 解题的关键是根据分母有理化的意义找到分母有理化的因式.

【详解】 解: $\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1.$

故答案为: $\sqrt{3}+1$.

14. 方程 $x^2-8=0$ 的根是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $x_1=2\sqrt{2}, x_2=-2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 根据直接开平方解一元二次方程即可.

【详解】 解: $x^2-8=0,$

移项得: $x^2=8,$

$\therefore x=\pm 2\sqrt{2},$

$\therefore x_1=2\sqrt{2}, x_2=-2\sqrt{2},$

故答案为: $x_1=2\sqrt{2}, x_2=-2\sqrt{2}.$

【点睛】 本题考查了解一元二次方程, 熟练掌握一元二次方程的几种解法是解本题的关键.

15. 写一个关于 x 的一元二次方程使其满足: 二次项系数为 2, 两根之和是 $\frac{5}{2}$, 两根之积是 $\frac{1}{2}$, 这样的方程是: $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $2x^2 - 5x + 1 = 0$

【解析】

【分析】 此题考查了一元二次方程根与系数的关系的应用.

根据一元二次方程的根与系数的关系, 设方程为 $2x^2 + bx + c = 0$, 由两根之和和两根之积的条件列出方程求解 b 和 c 即可.

【详解】 解: 设一元二次方程为 $2x^2 + bx + c = 0$,

则两根之和为 $-\frac{b}{2} = \frac{5}{2}$, 两根之积为 $\frac{c}{2} = \frac{1}{2}$,

解得 $b = -5$, $c = 1$,

$\therefore$ 该方程为: $2x^2 - 5x + 1 = 0$,

故答案为: $2x^2 - 5x + 1 = 0$.

16. 若一元二次方程 $2x^2 - x - \frac{1}{2}k = 0$ 没有实数解, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < -\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 此题考查了一元二次方程根的判别式, 正确求出根的判别式是关键.

根据一元二次方程无实数根的条件, 判别式小于零, 计算判别式并解不等式.

【详解】 解: 方程 $2x^2 - x - \frac{1}{2}k = 0$ 中, $a = 2$, $b = -1$, $c = -\frac{1}{2}k$,

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}k\right) = 1 + 4k$.

由于一元二次方程 $2x^2 - x - \frac{1}{2}k = 0$ 没有实数解,

$\therefore \Delta < 0$,

即 $1 + 4k < 0$,

解得 $k < -\frac{1}{4}$.

故答案为: $k < -\frac{1}{4}$.

17. 一个等腰三角形的两条边长分别是方程 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 的两根, 则该等腰三角形的周长是_____.

【答案】 10 或 11##11 或 10

【解析】

【分析】先利用因式分解法解方程得到 $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, 再利用三角形三边的关系得到答案.

【详解】解: $x^2 - 7x + 12 = 0$,

$$(x-3)(x-4) = 0,$$

$$x-3=0 \text{ 或 } x-4=0,$$

$$\therefore x_1 = 3, x_2 = 4,$$

$\therefore$ 等腰三角形的腰为 3, 底边为 4 或等腰三角形的腰为 4, 底边为 3,

$\therefore$ 等腰三角形的周长为 $3+3+4=10$ 或 $4+4+3=11$.

故答案为: 10 或 11.

【点睛】本题考查了解一元二次方程, 三角形三边的关系, 掌握因式分解法解一元二次方程是解题的关键.

18. 观察下列各式:

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} = 1+\frac{1}{1 \times 2} = 1+\left(1-\frac{1}{2}\right),$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} = 1+\frac{1}{2 \times 3} = 1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right),$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}} = 1+\frac{1}{3 \times 4} = 1+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right),$$

请利用你发现的规律, 计算:

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{1}{2024^2}+\frac{1}{2025^2}}, \text{ 其结果为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $2024\frac{2024}{2025}$

【解析】

【分析】本题考查二次根式的性质与化简及数字变化的规律, 能用含 n 的等式表示出第 n 个式子是解题的关键.

观察题中所给式子各部分的变化规律即可解决问题.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{1}{2024^2}+\frac{1}{2025^2}} \\ &= 1+1-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+1+\frac{1}{2024}-\frac{1}{2025} \\ &= 1 \times 2024 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2024} - \frac{1}{2025} \end{aligned}$$

$$= 2024 + 1 - \frac{1}{2025}$$

$$= 2024 \frac{2024}{2025}.$$

故答案为: $2024 \frac{2024}{2025}.$

三、简答题 (本大题共 5 题, 每小题 6 分, 共 30 分)

19. 计算: $\sqrt{27} \div \sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{3}} \times \sqrt{18} + \sqrt{24}.$

【答案】 $3 + \sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的混合运算, 掌握二次根式的运算法则是解题关键.

根据二次根式的运算法则运算即可.

【详解】 解: 原式 $= \sqrt{27 \div 3} - \sqrt{\frac{1}{3} \times 18} + 2\sqrt{6}$

$$= 3 - \sqrt{6} + 2\sqrt{6}$$

$$= 3 + \sqrt{6}.$$

20. 计算: $12\sqrt{a^2b^3} \div \frac{3}{2}\sqrt{a^3b} \times \sqrt{\frac{a^3}{b}}$

【答案】 $8a\sqrt{b}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的乘除混合运算, 熟练掌握运算法则是解题的关键. 直接根据二次根式的乘除计算法则进行计算求解即可.

【详解】 解: $12\sqrt{a^2b^3} \div \frac{3}{2}\sqrt{a^3b} \times \sqrt{\frac{a^3}{b}}$

$$= \left(12 \times \frac{2}{3} \times 1 \right) \sqrt{a^2b^3 \times \frac{1}{a^3b} \times \frac{a^3}{b}}$$

$$= 8\sqrt{a^2b}$$

$$= 8a\sqrt{b}.$$

21. 解不等式: $\sqrt{3}x + 2 < 2x - \sqrt{3}.$

【答案】 $x > 7 + 4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 根据一元一次不等式的解法、二次根式分母有理化的方法即可得.

【详解】 解: $\sqrt{3}x + 2 < 2x - \sqrt{3}$,

$$\sqrt{3}x - 2x < -2 - \sqrt{3},$$

$$(\sqrt{3} - 2)x < -2 - \sqrt{3},$$

$$(2 - \sqrt{3})x > 2 + \sqrt{3},$$

$$x > \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}},$$

$$x > 7 + 4\sqrt{3}.$$

【点睛】 本题考查了解一元一次不等式和二次根式的分母有理化, 熟练掌握一元一次不等式的解法是解题关键.

22. 解方程: $x(x-1) = 2(x-1)$.

【答案】 $x_1 = 1, x_2 = 2$

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程, 利用因式分解法求解, 即可解题.

【详解】 解: $x(x-1) = 2(x-1)$

$$x(x-1) - 2(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x-1=0 \text{ 或 } x-2=0,$$

解得 $x_1 = 1, x_2 = 2$.

23. 用配方法解方程 $2x^2 - 4x - 3 = 0$.

【答案】 $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}, x_2 = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$

【解析】

【分析】 此题考查了一元二次方程的解法. 利用配方法解一元二次方程即可.

【详解】解： $\because 2x^2 - 4x - 3 = 0$,

$$\therefore x^2 - 2x = \frac{3}{2},$$

$$\therefore (x-1)^2 = \frac{5}{2},$$

$$\therefore x-1 = \pm \frac{\sqrt{10}}{2},$$

$$\therefore x_1 = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}, x_2 = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

四、解答题 (第 24、25、26 题 8 分, 第 27 题 10 分, 共 34 分)

24. 已知 $x = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, 求 $\frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$ 的值.

【答案】 $\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查分式的化简求值和二次根式的分母有理化, 掌握完全平方式的因式分解, 分式的约分和二次根式的分母有理化方法是解题关键.

先因式分解, 再约分化简分式, 再化简 x 的值, 最后代入求值即可.

【详解】解: $\frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} = \frac{x^2 - 2x + 1 + 1}{x-1} = \frac{(x-1)^2 + 1}{x-1} = x-1 + \frac{1}{x-1},$

$$\therefore x = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3},$$

$$\therefore x-1 = 2-\sqrt{3}-1 = 1-\sqrt{3},$$

$$\therefore x-1 + \frac{1}{x-1} = 1-\sqrt{3} + \frac{1}{1-\sqrt{3}} = 1-\sqrt{3} + \frac{1+\sqrt{3}}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = 1-\sqrt{3} - \frac{1+\sqrt{3}}{2} = \frac{1-3\sqrt{3}}{2}.$$

25. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2m+1)x + m^2 + m = 0$.

(1) 求证: 不论 m 为任何实数, 方程总有两个不相等的实数根.

(2) 若方程两个实数根的平方和等于 5, 求 m 的值及方程的两根.

【答案】 (1) 见解析 (2) $m=1$, 根为 $-1, -2$; 或 $m=-2$, 根为 $1, 2$

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程根的判别式和根与系数的关系 (韦达定理), 掌握根的判别式的计算及应用和根与系数的关系, 并灵活转化是解题关键.

(1) 根据根的判别式与 0 的关系判断即可;

(2) 先将平方和 $x_1^2 + x_2^2$ 转化为 $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$, 再通过根与系数的关系 (韦达定理), 得到关于 m 的方程, 解出 m , 并求出方程的根即可.

【小问 1 详解】

证明: $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 + m) = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 4m = 1 > 0$,

$\therefore$ 不论 m 为任何实数, 方程总有两个不相等的实数根;

【小问 2 详解】

解: 设方程的两根为 a, b ,

由韦达定理可知, $a + b = -(2m+1), ab = m^2 + m$,

方程两个实数根的平方和等于 5, 即 $a^2 + b^2 = 5$,

又 $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$,

$\therefore [-(2m+1)]^2 - 2(m^2 + m) = 5$,

整理, 得 $m^2 + m - 2 = 0$,

解得 $m = 1$ 或 $m = -2$,

当 $m = 1$ 时, 方程为 $x^2 + 3x + 2 = 0$, 解得 $x_1 = -1, x_2 = -2$;

当 $m = -2$ 时, 方程为 $x^2 - 3x + 2 = 0$, 解得 $x_1 = 1, x_2 = 2$;

综上, $m = 1$, 根为 $-1, -2$; 或 $m = -2$, 根为 $1, 2$.

26. 小李同学探索 $\sqrt{86}$ 的近似值的过程如下:

$\because$ 面积为 86 的正方形的边长是 $\sqrt{86}$, 且 $9 < \sqrt{86} < 10$,

$\therefore$ 设 $\sqrt{86} = 9 + x$, 其中 $0 < x < 1$, 画出示意图, 如图所示.

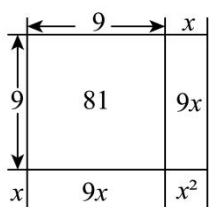
根据示意图, 可得图中正方形的面积 $S_{\text{正方形}} = 81 + 2 \times 9x + x^2$,

又 $\because S_{\text{正方形}} = 86$,

$\therefore 81 + 2 \times 9x + x^2 = 86$.

当 $x^2 < 1$ 时, 可忽略 x^2 , 得 $81 + 18x \approx 86$, 解得 $x \approx 0.28$,

$\therefore \sqrt{86} \approx 9.28$.



(1) 填空: $\sqrt{149}$ 的整数部分的值为_____;

(2) 仿照上述方法, 探究 $\sqrt{149}$ 的近似值 (结果精确到 0.01) (答题要求: 画出示意图, 标明数据, 并写出求解过程)

【答案】 (1) 12 (2) 12.21

【解析】

【分析】 本题考查估算无理数的大小, 掌握算术平方根的定义是正确解答的关键

(1) 根据算术平方根的定义进行计算即可;

(2) 根据题目所提供的方法进行解答即可.

【小问 1 详解】

解: $\because 144 < 149 < 169$,

$\therefore \sqrt{144} < \sqrt{149} < \sqrt{169}$,

即 $12 < \sqrt{149} < 13$,

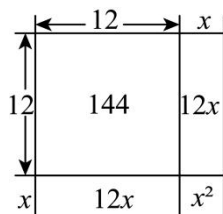
$\therefore \sqrt{149}$ 的整数部分的值为 12,

故答案为: 12;

【小问 2 详解】

解: $\because$ 面积为 149 的正方形的边长是 $\sqrt{149}$, 且 $12 < \sqrt{149} < 13$,

$\therefore$ 设 $\sqrt{149} = 12 + x$, 其中 $0 < x < 1$, 画出示意图, 如图所示.



根据示意图, 可得图中正方形的面积 $S_{\text{正方形}} = 144 + 2 \times 12x + x^2$,

又 $\because S_{\text{正方形}} = 149$,

$$\therefore 144 + 2 \times 12x + x^2 = 149.$$

当 $x^2 < 1$ 时, 可忽略 x^2 , 得 $144 + 24x \approx 149$, 解得 $x \approx 0.21$,

$$\therefore 149 \approx 12.21.$$

27 请阅读下列材料:

已知方程 $x^2 + x - 3 = 0$, 求一个一元二次方程, 使它的根分别是已知方程根的 2 倍.

解: 设所求方程的根为 y , 则 $y = 2x$, 所以 $x = \frac{y}{2}$,

把 $x = \frac{y}{2}$ 代入已知方程, 得 $\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{y}{2} - 3 = 0$,

化简, 得 $y^2 + 2y - 12 = 0$, 故所求方程为 $y^2 + 2y - 12 = 0$,

这种利用方程根的代换求新方程的方法, 我们称为“换根法”.

(1) 已知方程 $x^2 + x - 2 = 0$, 求一个一元二次方程, 使它的根分别是已知方程根的相反数.

(2) 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx = c$ ($ac \neq 0$) 有一个实数根为 2025, 则方程 $cx^2 + bx = a$ 一定有实数根 _____.

(3) 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两个实数根分别为 3、-2, 求一元二次方程 $ay^2 - (2a - b)y + a - b + c = 0$ 的两根.

【答案】 (1) $y^2 - y - 2 = 0$

(2) $-\frac{1}{2025}$

(3) $y_1 = 4, y_2 = -1$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的解, 解答该题的关键是弄清楚“换根法”的具体解题方法.

(1) 利用题中解法, 设所求方程的根为 y , 则 $y = -x$, 即 $x = -y$, 把 $x = -y$ 代入已知方程即可;

(2) 根据方程根的定义得到 $2025^2 a + 2025b = c$, 则 $\frac{c}{2025^2} - \frac{b}{2025} = a$, 即可求出答案;

(3) 一元二次方程整理可得: $a(y-1)^2 + b(y-1) + c = 0$, 再与一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 比较即可.

【小问 1 详解】

解：设所求方程的根是 y ，则 $y = -x$ ，

所以 $x = -y$ ，

把 $x = -y$ 代入 $x^2 + x - 2 = 0$ ，

得 $y^2 - y - 2 = 0$ ；

【小问 2 详解】

解：∵ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx = c$ ($ac \neq 0$) 有一个实数根为 2025，

$$\therefore 2025^2 a + 2025b = c,$$

$$\therefore a + \frac{b}{2025} = \frac{c}{2025^2}$$

$$\therefore \frac{c}{2025^2} - \frac{b}{2025} = a,$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2025} \text{ 是方程 } cx^2 + bx = a \text{ 的实数根.}$$

$$\text{故答案为: } -\frac{1}{2025}.$$

【小问 3 详解】

解：∵ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两个实数根分别为 3、-2，

$$\therefore -\frac{b}{a} = 3 + (-2) = 1, \frac{c}{a} = 3 \times (-2) = -6,$$

$$\therefore b = -a, \quad c = -6a,$$

$$\therefore \text{方程 } ay^2 - (2a - b)y + a - b + c = 0$$

$$\text{化为: 方程 } ay^2 - 3ay - 4a = 0,$$

$$\text{整理得 } y^2 - 3y - 4 = 0,$$

$$\text{因式分解得 } (y - 4)(y + 1) = 0,$$

$$\text{解得 } y_1 = 4, \quad y_2 = -1.$$