

2025 学年第一学期期中素质调研

八年级数学试卷

(考试时间: 90 分钟满分 100 分)

★考生注意:

1. 本试卷含 3 个大题, 共 27 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.
3. 本次考试不能使用计算器.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题只有一个正确答案, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列各数中: -2 、 $\sqrt{2}$ 、 3.1416 、 $0.\dot{2}\dot{3}$ 、 $\frac{22}{7}$ 、 π 、 $0.373373337\cdots$ (位数无限且相邻两个“7”之间依次增加 1 个“3”) 中, 无理数有 () 个.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查无理数, 根据无理数的定义 (无限不循环小数), 逐一判断各数是否为无理数.

【详解】解: $\because -2$ 是整数, 属于有理数;

$\sqrt{2}$ 是开方开不尽的数, 是无理数;

3.1416 是有限小数, 是有理数;

$0.\dot{2}\dot{3}$ 是循环小数, 是有理数;

$\frac{22}{7}$ 是分数, 是有理数;

π 是无理数;

$0.373373337\cdots$ (位数无限且相邻两个“7”之间依次增加 1 个“3”) 是无限不循环小数, 是无理数.

$\therefore$ 无理数有 $\sqrt{2}$ 、 π 、 $0.373373337\cdots$, 共 3 个.

故选: C.

2. 下列代数式中, 其中 $\sqrt{x}+1$ 的一个有理化因式是 ()

A. $\sqrt{x+1}$ B. $\sqrt{x-1}$ C. $\sqrt{x}+1$ D. $\sqrt{x}-1$

【答案】D

【解析】

【分析】根据有理化因式的定义进行求解即可. 两个含有根式的代数式相乘, 如果它们的积不含有根式, 那么这两个代数式相互叫做有理化因式.

【详解】解: $\because$ 由平方差公式, $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)=x-1$,

$\therefore \sqrt{x}+1$ 的一个有理化因式是 $\sqrt{x}-1$.

故选: D.

【点睛】本题主要考查了对有理化因式的理解, 正确选择两个二次根式, 使它们的积符合平方差公式是解答问题的关键.

3. 一元二次方程 $(1+3x)(x-3)=2x^2+1$ 化成一般形式后, 其二次项系数, 一次项系数, 常数项分别为 ()

A. 1, 8, 4

B. 1, -8, -4

C. 5, 8, 4

D. 5, -8, -4

【答案】B

【解析】

【分析】方程 $(1+3x)(x-3)=2x^2+1$ 经过展开、移项、整理可得一般形式, 接下来就可得到二次项系数、一次项系数和常数项.

【详解】解: 将 $(1+3x)(x-3)=2x^2+1$ 左边展开得:

$$x-3+3x^2-9x=2x^2+1,$$

移项、合并同类项得: $x^2-8x-4=0$,

$\therefore$ 二次项系数, 一次项系数, 常数项分别为 1, -8, -4,

故选: B.

【点睛】本题考查一元二次方程的一般形式 $ax^2+bx+c=0$ (a 、 b 、 c 为常数, $a \neq 0$), 其特征是等式左边是含一个未知数的二次三项式, 右边是 0, 其中 ax^2 叫做二次项, a 叫做二次项系数, bx 叫做一次项, b 叫做一次项系数, c 叫做常数项.

4. 已知方程 $x^2+2x-1=0$, 有一个根是 $-1+\sqrt{2}$, 则另外一个根是 ().

A. $1+\sqrt{2}$

B. $1-\sqrt{2}$

C. $\sqrt{2}-1$

D. $-1-\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程根与系数的关系，解题的关键是利用两根之和公式求出另一根.

设方程的另一个根为 x_1 ，根据一元二次方程根与系数的关系（两根之和等于 $-\frac{b}{a}$ ），求出 x_1 .

【详解】 解：对于方程 $x^2 + 2x - 1 = 0$ ，设另一个根为 x_1 ，

根据一元二次方程根与系数的关系，两根之和为 $-\frac{2}{1} = -2$ ，

已知一个根是 $-1 + \sqrt{2}$ ，则 $x_1 + (-1 + \sqrt{2}) = -2$ ，

解得 $x_1 = -2 + 1 - \sqrt{2} = -1 - \sqrt{2}$.

故选：D.

5. 下列命题是假命题的是（ ）

A. 数轴上的每一个点都有一个有理数与它对应

B. 负数没有平方根

C. 不带根号的数不一定是无理数

D. $-\sqrt{17}$ 是 17 的一个平方根

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查实数与数轴的关系、平方根、无理数的概念，解题的关键是准确理解这些数学概念的定义.

逐一分析每个选项，根据相关数学概念判断其真假.

【详解】 解：A、数轴上的点与实数——对应，不是与有理数——对应，存在数轴上的点（如 $\sqrt{2}$ 对应的点）没有有理数与之对应，所以该命题是假命题，符合题意；

B、根据平方根的定义，负数在实数范围内没有平方根，该命题是真命题，不符合题意；

C、不带根号的数不一定是无理数，例如 2 是有理数，该命题是真命题，不符合题意；

D、因为 $(-\sqrt{17})^2 = 17$ ，所以 $-\sqrt{17}$ 是 17 的一个平方根，该命题是真命题，不符合题意.

故选：A.

6. 已知方程 $x^2 - kx - 6 = 0$ 的两个根都是整数，则 k 的值有（ ）个.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程根与系数的关系，掌握分类讨论的思想是解题的关键.

利用根与系数的关系，列出所有整数根对，计算对应的 k 值.

【详解】 解： $\because$ 方程 $x^2 - kx - 6 = 0$ 的两个根都是整数，且积为 -6 ，设两个根分别为 p, q

$\therefore$ 所有可能的整数根的组合 (p, q) 为： $(1, -6), (-1, 6), (2, -3), (-2, 3), (3, -2), (-3, 2), (6, -1), (-6, 1)$.

又 $\because$ 根的和 $p + q = k$,

$\therefore$ 计算各对的和：

$$(1, -6): k = 1 + (-6) = -5$$

$$(-1, 6): k = -1 + 6 = 5$$

$$(2, -3): k = 2 + (-3) = -1$$

$$(-2, 3): k = -2 + 3 = 1$$

其余对的和与上述重复，

$\therefore$ 不同的 k 值为 $-5, 5, -1, 1$ ，共 4 个.

故选：D.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分）

7. 计算： $\sqrt{0.0016} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 0.04

【解析】

【分析】 本题考查算术平方根的计算，解题的关键是将被开方数转化为便于计算的形式.

将 0.0016 转化为某个数的平方形式，进而求出其算术平方根.

【详解】 解：

$$\text{因为 } 0.0016 = \frac{16}{10000},$$

$$\text{所以 } \sqrt{0.0016} = \sqrt{\frac{16}{10000}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{10000}} = \frac{4}{100} = 0.04.$$

故答案为：0.04.

8. 方程 $(x-5)^2 - 2(x-5) = 0$ 的根是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x_1 = 5, x_2 = 7$

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的因式分解法，解题的关键是通过因式分解将方程转化为两个一次方程求解.

将 $(x-5)$ 看作一个整体，对原方程进行因式分解，进而求出方程的根.

【详解】 解： $(x-5)^2 - 2(x-5) = 0$,

提取公因式 $(x-5)$ 得： $(x-5)[(x-5)-2] = 0$,

化简得： $(x-5)(x-7) = 0$,

得： $x-5=0$ 或 $x-7=0$,

解得： $x=5$ 或 $x=7$.

故答案为： $x_1 = 5, x_2 = 7$.

9. $\sqrt[3]{64}$ 的平方根是_____.

【答案】 ± 2

【解析】

【分析】 本题考查平方根和立方根的定义，此为基础且重要知识点，必须熟练掌握.

先求得 $\sqrt[3]{64} = 4$ ，根据平方根的定义即可求得答案.

【详解】 解： $\sqrt[3]{64} = 4$,

$\therefore \sqrt[3]{64}$ 的平方根是 ± 2 ,

故答案为： ± 2 .

10. 设 $3 \leq x \leq 5$ 化简： $|x-5| + \sqrt{x^2 - 6x + 9} =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查绝对值和二次根式的化简，解题的关键是根据 x 的取值范围判断绝对值内和根号内式子的正负性.

先将二次根式 $\sqrt{x^2 - 6x + 9}$ 化为完全平方式的形式，再根据 x 的取值范围分别化简绝对值和二次根式，最后进行计算.

【详解】解：∵因为 $3 \leq x \leq 5$,

∴所以 $|x-5|=5-x$,

$$\therefore \sqrt{x^2-6x+9} = \sqrt{(x-3)^2} = x-3,$$

$$\text{则 } |x-5| + \sqrt{x^2-6x+9} = (5-x) + (x-3) = 5-x+x-3 = 2.$$

故答案为: 2.

11. 根据实验数据, 钢轨温度每变化 1°C , 每一米钢轨就伸缩约 0.000012m . 如果一年中气温相差 40°C , 那么 100m 长的铁路最多可伸缩 _____ m . (用科学记数法表示)

【答案】 4.8×10^{-2}

【解析】

【分析】 本题考查了科学记数法, 根据题意, 钢轨的伸缩量与温度变化和钢轨长度成正比, 因此总伸缩量等于每度每米伸缩量、温度变化和钢轨长度的乘积, 即可求解.

【详解】 解: 总伸缩量 $= 0.000012 \times 40 \times 100 = 0.00048 \times 100 = 0.048 = 4.8 \times 10^{-2}$,

故答案为: 4.8×10^{-2} .

12. $\sqrt{-\frac{x}{x-3}}$ 是二次根式, 则 x 的取值范围是 _____.

【答案】 $0 \leq x < 3$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式以及分式有意义的条件, 掌握它们有意义的条件是解题的关键;

根据二次根式的定义, 被开方数必须是非负数, 因此需满足 $-\frac{x}{x-3} \geq 0$, 且分母 $x-3 \neq 0$, 分情况讨论.

【详解】 由二次根式的性质, 被开方数 $-\frac{x}{x-3} \geq 0$, 即 $\frac{x}{x-3} \leq 0$,

要使 $\frac{x}{x-3} \leq 0$ 成立, 则分子分母异号, $x-3 \neq 0$, 可分两种情况讨论:

当 $x \geq 0$ 且 $x-3 < 0$ 时, 解得 $0 \leq x < 3$;

当 $x \leq 0$ 且 $x-3 > 0$ 时, 即 $x \leq 0$ 且 $x > 3$, 此种情况无解;

因此, x 的取值范围是 $0 \leq x < 3$.

故答案为: $0 \leq x < 3$.

13. 已知方程 $(x-a)(x+3)=0$ 和方程 $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + b = 0$ 的根完全相同, 则 $a+b =$ _____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程；由于两个方程的根完全相同，先求第一个方程的根，再代入第二个方程求参数，最后求和.

【详解】 解：解方程 $(x-a)(x+3)=0$ ，得 $x_1=a$ ， $x_2=-3$.

将 $x=-3$ 代入方程 $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+b=0$,

$$\text{得 } \frac{1}{2} \times (-3)^2 - \frac{3}{2} \times (-3) + b = 0,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 9 + \frac{9}{2} + b = 0,$$

$$\frac{9}{2} + \frac{9}{2} + b = 0,$$

$$9 + b = 0,$$

所以 $b=-9$.

则第二个方程为 $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-9=0$,

两边乘以 2，得 $x^2-3x-18=0$.

$$\text{解此方程， } x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-18)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2},$$

所以 $x_1=6$ ， $x_2=-3$.

因此 $a=6$,

故 $a+b=6+(-9)=-3$.

故答案为：-3.

14. 已知 $x = \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$ ，则 $\frac{x^2-2x-3}{x-3} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $4+2\sqrt{2}$ ## $2\sqrt{2}+4$

【解析】

【分析】 本题考查分式的化简求值，分母有理化，先对 x 进行分母有理化，再将分式 $\frac{x^2-2x-3}{x-3}$ 因式分解

化简，最后代入 x 的值计算.

【详解】 解： $x = \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$

$$= \frac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}$$

$$= \frac{3+2\sqrt{2}}{9-8}$$

$$= 3+2\sqrt{2},$$

$$\frac{x^2-2x-3}{x-3} = \frac{(x-3)(x+1)}{x-3} = x+1,$$

代入 $x = 3+2\sqrt{2}$ 求值:

$$x+1 = 3+2\sqrt{2}+1 = 4+2\sqrt{2},$$

故答案为: $4+2\sqrt{2}$.

15. 如果 $\sqrt{5}-1$ 的整数部分是 a , 小数部分是 b , 那么 $\frac{a}{b}$ 的值是_____.

【答案】 $\sqrt{5}+2$

【解析】

【分析】 本题考查了估算无理数的大小, 估算无理数的大小, 得出 a, b 的值, 代入代数式求值即可.

【详解】 解: $\because 4 < 5 < 9,$

$$\therefore 2 < \sqrt{5} < 3,$$

$$\therefore 1 < \sqrt{5}-1 < 2,$$

$$\therefore a = 1, \quad b = \sqrt{5}-1-1 = \sqrt{5}-2,$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{5}-2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2) \times (\sqrt{5}+2)}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+2}{5-4}$$

$$= \sqrt{5}+2.$$

故答案为: $\sqrt{5}+2$.

16. 已知 n 是正整数, 且 $\sqrt{756n}$ 是整数, 则 $\sqrt{756n}$ 的最小值为_____.

【答案】 126

【解析】

【分析】 本题考查了算术平方根的应用, 解题的关键是掌握完全平方数的特征.

首先把被开方数分解质因数, 然后再确定 n 的值, 最后计算平方根.

【详解】 解: $\sqrt{756n} = \sqrt{6^2 \times 21n} = 6\sqrt{21n}$,

$\therefore \sqrt{756n}$ 是整数,

$\therefore$ 正整数 n 的最小值是 21, $\sqrt{756n} = 6\sqrt{21 \times 21} = 126$.

故答案为: 126.

17. 如果关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个实数根, 且其中一个根为另一个根的 2 倍, 则称这样的方程为“倍根方程”; 现有下列结论:

- (1) 若关于 x 的方程 $x^2 + ax + 2 = 0$ 是倍根方程, $a = \pm 3$;
- (2) 方程 $x^2 + 2x - 8 = 0$ 是倍根方程;
- (3) 若关于 x 的方程 $(x-2)(mx+n) = 0$, ($m \neq 0$) 是倍根方程, 则 $4m^2 + 5mn + n^2 = 0$;
- (4) 若 $q = 2p$, 则关于 x 的方程 $px^2 - q = 0$ ($p \neq 0$) 是倍根方程.

其中正确的结论有_____. (写出所有正确说法的序号)

【答案】 (1) (3)

【解析】

【分析】 本题考查了新定义方程, 一元二次方程的解, 根与系数的关系, 掌握相关知识是解题的关键.

(1) 把 $a = \pm 3$ 代入原方程, 再求出方程的解, 根据“倍根方程”的定义即可判断;

(2) 求出方程 $x^2 + 2x - 8 = 0$ 的解, 根据“倍根方程”的定义即可判断;

(3) 由 $(x-2)(mx+n) = 0$, 解得 $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{n}{m}$, 由方程 $(x-2)(mx+n) = 0$ 是“倍根方程”, 得到 $m+n=0$, $4m+n=0$, 即可求解;

(4) 把 $q = 2p$ 代入原方程中, 求解即可判断.

【详解】 解: (1) 当 $a = 3$ 时, $x^2 + 3x + 2 = 0$,

解得: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$,

$\therefore x^2 + 3x + 2 = 0$ 是“倍根方程”，

当 $a = -3$ 时， $x^2 - 3x + 2 = 0$ ，

解得： $x_1 = 2$ ， $x_2 = 1$ ，

$\therefore x^2 - 3x + 2 = 0$ 是“倍根方程”，故 (1) 符合题意；

(2) 方程 $x^2 + 2x - 8 = 0$ ，

解得： $x_1 = -4$ ， $x_2 = 2$ ，

$\therefore$ 方程 $x^2 + 2x - 8 = 0$ 不是“倍根方程”，故 (2) 不符合题意；

(3) $(x - 2)(mx + n) = 0$ ，

$\therefore x_1 = 2$ ， $x_2 = -\frac{n}{m}$ ，

$\therefore$ 方程 $(x - 2)(mx + n) = 0$ 是“倍根方程”，

$\therefore -\frac{n}{m} = 1$ 或 $-\frac{n}{m} = 4$ ，

$\therefore m + n = 0$ ， $4m + n = 0$ ，

$\therefore 4m^2 + 5mn + n^2 = (4m + n)(m + n) = 0$ ，故 (3) 符合题意；

(4) $\because q = 2p$ ， $p \neq 0$ ，

$\therefore$ 方程 $px^2 - q = px^2 - 2p = 0$ ，

$\therefore x^2 = 2$ ，

$\therefore x_1 = \sqrt{2}$ ， $x_2 = -\sqrt{2}$ ，

$\therefore px^2 - q = 0$ 不是“倍根方程”，故 (4) 不符合题意；

$\therefore$ 符合题意的有 (1) (3)，

故答案为：(1) (3)。

18. 阅读下面的材料，回答问题。

解方程 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ 。

这是一个一元四次方程，由这个方程的特点，可以采用“换元法”起到降次的目的，将其转化成一元二次方程求解，它的解法如下：

解：设 $x^2 = y$ ，那么 $x^4 = y^2$ ，于是原方程可变为 $y^2 - 5y + 4 = 0$ ，解得 $y_1 = 1$ ， $y_2 = 4$ 。

当 $y=1$ 时, $x^2=1$, $\therefore x=\pm 1$;

当 $y=4$ 时, $x^2=4$, $\therefore x=\pm 2$;

所以, 原方程有四个根, 分别为 $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$, $x_4=-2$.

请运用以上方法回答问题: 已知 $(x^2+6x+1)(x^2+6x+7)=7$, 求 x 的值为_____.

【答案】 $x=0$, $x=-6$, $x=-2$, $x=-4$

【解析】

【分析】 本题考查了换元法解一元二次方程; 通过观察方程, 发现含有重复表达式 x^2+6x , 因此采用换元法, 设 $y=x^2+6x$, 将原方程转化为关于 y 的一元二次方程, 求解 y 后再代回求解 x .

【详解】 解: 设 $y=x^2+6x$, 则原方程 $(x^2+6x+1)(x^2+6x+7)=7$ 可化为 $(y+1)(y+7)=7$.

展开得 $y^2+8y+7=7$, 即 $y^2+8y=0$.

因式分解得 $y(y+8)=0$, 解得 $y_1=0$, $y_2=-8$.

当 $y=0$ 时, $x^2+6x=0$, 即 $x(x+6)=0$, 解得 $x_1=0$, $x_2=-6$.

当 $y=-8$ 时, $x^2+6x=-8$, 即 $x^2+6x+8=0$, 判别式 $\Delta=6^2-4\times 1\times 8=4>0$, 解得 $x=\frac{-6\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{-6\pm 2}{2}$,

即 $x_3=-2$, $x_4=-4$.

经检验, 所有解均满足原方程.

故答案为: $x=0$, $x=-6$, $x=-2$, $x=-4$.

三、简答题 (本大题共 9 题, 19 到 24 每题 6 分, 25 题 8 分, 26 到 27 题 10 分, 满分 64 分)

19. 计算: $\left(3\sqrt{12}+\frac{1}{4}\sqrt{48}-3\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\div\sqrt{27}$

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式的混合运算, 原式先将括号内的进行化简合并, 再计算除法即可.

【详解】 解: $\left(3\sqrt{12}+\frac{1}{4}\sqrt{48}-3\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\div\sqrt{27}$
 $=\left(3\times 2\sqrt{3}+\frac{1}{4}\times 4\sqrt{3}-3\times\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\div 3\sqrt{3}$

$$= (6\sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{3}) \div 3\sqrt{3}$$

$$= 6\sqrt{3} \div 3\sqrt{3}$$

$$= 2.$$

20. 计算: $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{x-4\sqrt{xy}+4y}{\sqrt{x}-2\sqrt{y}}$

【答案】 $2\sqrt{x}-\sqrt{y}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了平方差公式，完全平方公式，分式的化简，二次根式的混合计算，解题的关键在于能够熟练掌握平方差公式和完全平方公式.

先将分子进行因式分解，然后约分，再进行加减计算.

【详解】 解: $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{x-4\sqrt{xy}+4y}{\sqrt{x}-2\sqrt{y}}$

$$= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{(\sqrt{x}-2\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}-2\sqrt{y}}$$

$$= \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x} - 2\sqrt{y}$$

$$= 2\sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

21. 用配方法解方程: $-x^2 + 4x - 3 = 0$.

【答案】 $x_1 = 1, x_2 = 3$

【解析】

【分析】 本题考查用配方法解一元二次方程，解题的关键是熟练掌握配方法的步骤.

先将方程二次项系数化为 1，然后把常数项移到等号右边，再在等式两边加上一次项系数一半的平方进行配方，最后求解方程.

【详解】 解: $x^2 - 4x + 3 = 0$,

$$x^2 - 4x = -3,$$

$$x^2 - 4x + 4 = -3 + 4, \text{ 即 } (x-2)^2 = 1,$$

$$x-2 = \pm 1,$$

当 $x-2=1$ 时, $x=3$,

当 $x-2=-1$ 时, $x=1$.

$\therefore$ 方程的解为 $x_1=1, x_2=3$.

22. 解方程: $(x-3)^2 + 2(x-3) - 24 = 0$.

【答案】 $x_1 = -3, x_2 = 7$.

【解析】

【分析】 先分解因式, 即可得出两个一元一次方程, 求出方程的解即可.

【详解】 解: $(x-3)^2 + 2(x-3) - 24 = 0$,

$$(x-3+6)(x-3-4) = 0,$$

$$x-3+6=0, \quad x-3-4=0,$$

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 7.$$

【点睛】 本题考查了解一元二次方程, 能选择适当的方法解方程是解此题的关键, 注意: 解一元二次方程的方法有: 直接开平方法, 公式法, 配方法, 因式分解法.

23. 解不等式: $x + \sqrt{6} < 3x + \sqrt{1.5}$.

【答案】 $x > \frac{\sqrt{6}}{4}$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式的运算及解一元一次不等式, 先化简二次根式, 再根据解不等式的步骤求解即可.

【详解】 解: $x + \sqrt{6} < 3x + \sqrt{1.5}$,

$$x + \sqrt{6} < 3x + \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$x - 3x < \frac{\sqrt{6}}{2} - \sqrt{6},$$

$$-2x < -\frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore x > \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

24. 已知 $x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, 求代数式 $x^2 + 3xy + y^2$ 的值.

【答案】 101

【解析】

【分析】 分母有理化得, $x = 5 - 2\sqrt{6}, y = 5 + 2\sqrt{6}$, 根据 $x^2 + 3xy + y^2 = (x+y)^2 + xy$, 代值求解即可.

【详解】解: $x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = 5 - 2\sqrt{6}, y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = 5 + 2\sqrt{6},$

$$\therefore x^2 + 3xy + y^2 = (x+y)^2 + xy = (5-2\sqrt{6}+5+2\sqrt{6})^2 + (5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6}) = 101,$$

$\therefore$ 代数式 $x^2 + 3xy + y^2$ 的值为 101.

【点睛】 本题考查了分母有理化, 完全平方公式, 二次根式的混合运算, 代数式求值等知识. 熟练掌握分母有理化, 完全平方公式, 二次根式的混合运算, 代数式求值是解题的关键.

25. 用 48 m 的篱笆在空地上围一个绿化场地, 现有两种方案: 一种是围成圆形; 另一种是围成长方形 (正方形是特殊的长方形). 请问选用哪一种方案围成的场地面积较大? 最大面积是多少? (结果保留 π)

【答案】 选用圆形方案围成的场地面积较大, 最大面积是 $\frac{576}{\pi} \text{ m}^2$.

【解析】

【分析】 本题主要考查实数的大小的比较在实际生活中的应用, 若围成正方形场地, 则边长为

$48 \div 4 = 12(\text{m})$, 面积为 $12 \times 12 = 144(\text{m}^2)$; 若围成圆形场地, 则圆的半径为 $\frac{48}{2\pi} \text{ m}$, 面积为 $\frac{576}{\pi} \text{ m}^2$,

然后比较大小即可解决问题.

【详解】解: 当围成正方形场地时: 面积 $= \left(\frac{48}{4}\right)^2 \text{ m}^2 = 144 \text{ m}^2$,

当围成圆形场地时: 面积 $= \pi \left(\frac{48}{2\pi}\right)^2 \text{ m}^2 = \frac{576}{\pi} \text{ m}^2$,

$$\therefore \frac{576}{\pi} \text{ m}^2 \approx 183.4 \text{ m}^2 > 144 \text{ m}^2,$$

$\therefore$ 围成圆的面积较大, 最大面积是 $\frac{576}{\pi} \text{ m}^2$.

26. 已知关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - (2k+4)x + k+7 = 0$.

(1) 如果这个方程的两个实数根是 x_1, x_2 , 且 $(x_1+2)(x_2+2) = 3$, 求 k 的值;

(2) 若等腰 ABC 的一边长 $a = 2$, 另两边长 b, c 恰好是这个方程的两个根, 求 ABC 的周长.

【答案】(1) $k = -\frac{5}{2}$

(2) 7

【解析】

【分析】 本题主要考查根与系数的关系，方程根的判别式及等腰三角形的性质，掌握方程根的判别式与方程根的情况的关系是解题的关键，注意分类讨论.

(1) 由根与系数的关系得出 $x_1 + x_2 = \frac{2k+4}{k}$ ， $x_1 \cdot x_2 = \frac{k+7}{k}$ ，再根据 $(x_1+2)(x_2+2)=3$ 得 $x_1 \cdot x_2 + 2(x_1+x_2) + 4 = 3$ ，代入解方程即可；

(2) 根据等腰三角形的性质分情况讨论求出 b, c 的长，并根据三角形三边关系检验，综合后求出 ABC 的周长.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 方程 $kx^2 - (2k+4)x + k+7 = 0$ 的两个实数根是 x_1, x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{2k+4}{k}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{k+7}{k},$$

$$\therefore (x_1+2)(x_2+2) = 3,$$

$$\therefore x_1 \cdot x_2 + 2(x_1+x_2) + 4 = 3,$$

$$\therefore \frac{k+7}{k} + 2 \times \frac{2k+4}{k} + 4 = 3,$$

$$\text{解得 } k = -\frac{5}{2},$$

当 $k = -\frac{5}{2}$ 时， $\Delta = (2k+4)^2 - 4k(k+7) = 16 - 12k = 46 > 0$ ，方程有两个实数根，符合题意；

【小问 2 详解】

解： 分两种情况：

①若 $b = c$ ，

$\therefore$ 方程 $kx^2 - (2k+4)x + k+7 = 0$ 有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (2k+4)^2 - 4k(k+7) = 0,$$

$$\text{解得 } k = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \text{此时方程为 } \frac{4}{3}x^2 - \frac{20}{3}x + \frac{25}{3} = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = x_2 = \frac{5}{2},$$

$\therefore ABC$ 的周长为 $2 + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 7$;

②若 $b \neq c$, 则 $b = a = 2$ 或 $c = a = 2$, 即方程有一根为 2,

$\therefore$ 把 $x = 2$ 代入方程 $kx^2 - (2k + 4)x + k + 7 = 0$, 得 $4k - 2(2k + 4) + k + 7 = 0$,

解得 $k = 1$,

$\therefore$ 此时方程为 $x^2 - 6x + 8 = 0$,

解得 $x_1 = 2$, $x_2 = 4$,

$\therefore$ 方程另一根为 4,

$\therefore 2, 2, 4$ 不能构成三角形, 此种情况舍去.

综上所述, ABC 的周长为 7.

27. 阅读材料, 回答下列问题:

(一) 已知 a, b 为非负实数, $\therefore a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$,

$\therefore a + b \geq 2\sqrt{ab}$, 当且仅当 “ $a = b$ ” 时, 等号成立. 这个结论就是著名的 “均值不等式”.

(二) 分数和分式有着很多的相似点, 如类比分数的基本性质, 我们得到了分式的基本性质. 小学里, 把分子比分母小的数叫真分数, 类似的, 我们把分子的次数小于分母的次数的分式称为真分式, 反之, 称为假分式. 对于任何一个假分式都可以化为整式与真分式的和的形式, 如

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1};$$

(1) 在① $\frac{2x+3}{x^2-1}$, ② $\frac{x^2+1}{x}$, ③ $\frac{x}{x^2-1}$, ④ $\frac{2x^4+3}{x^2}$ 这些分式中, 属于假分式的是_____ (填序号):

(2) 已知 $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$, 求代数式 $\frac{x^2}{x^4+1}$ 的值;

(3) 当 x 为何值时, $\frac{x+3\sqrt{x+2}+5}{\sqrt{x+2}+1}$ 有最小值? 求出该最小值.

【答案】 (1) ②④ (2) $\frac{1}{2}$

(3) 当 $x = -2$ 时, 最小值为 3

【解析】

【分析】 本题为新定义问题, 考查了分式的计算, 二次根式的变形, 完全平方公式的应用等知识, 理解题目中的相关材料, 并根据题意灵活应用是解题关键.

(1) 根据真分式、假分式的定义逐项判断即可求解;

(2) 先根据 $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$, 得到 $\frac{x^2+1}{x} = 2$, 进而得到 $x + \frac{1}{x} = 2$, 即可得到

$$\frac{x^4+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 2, \text{ 利用倒数的定义即可求出 } \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{1}{2};$$

(3) 先求出 $x \geq -2$, 再将 $\frac{x+3\sqrt{x+2}+5}{\sqrt{x+2}+1}$ 变形为 $\sqrt{x+2}+1+1+\frac{1}{\sqrt{x+2}+1}$ 根据 (一) 结论得到

$$= \sqrt{x+2}+1+1+\frac{1}{\sqrt{x+2}+1} \geq 2 \times \sqrt{(\sqrt{x+2}+1) \times \frac{1}{\sqrt{x+2}+1}} + 1 = 2+1=3, \text{ 即可求出当且仅当}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}+1} = \sqrt{x+2}+1, \text{ 即 } x = -2 \text{ 时, } \frac{x+3\sqrt{x+2}+5}{\sqrt{x+2}+1} \text{ 有最小值, 最小值为 } 3.$$

【小问 1 详解】

解: 在① $\frac{2x+3}{x^2-1}$, ② $\frac{x^2+1}{x}$ ③ $\frac{x}{x^2-1}$ ④ $\frac{2x^4+3}{x^2}$ 这些分式中, 属于假分式的是: ② $\frac{x^2+1}{x}$, ④ $\frac{2x^4+3}{x^2}$.

故答案为: ②④

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{x^2+1}{x} = 2,$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = 2,$$

$$\therefore \frac{x^4+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 2,$$

$$\therefore \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{1}{2}.$$

【小问 3 详解】

解: 由题意, $x+2 \geq 0$,

$$\therefore x \geq -2.$$

$$\text{原式} = \frac{x+2+3\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}+1} = \frac{(\sqrt{x+2}+1)^2 + \sqrt{x+2}+1+1}{\sqrt{x+2}+1}$$

$$= \sqrt{x+2}+1+1+\frac{1}{\sqrt{x+2}+1} \geq 2 \times \sqrt{(\sqrt{x+2}+1) \times \frac{1}{\sqrt{x+2}+1}} + 1$$

$$= 2 + 1 = 3 .$$

当且仅当 $\frac{1}{\sqrt{x+2}+1} = \sqrt{x+2}+1$, 即 $x = -2$ 时, 等号成立.

$\therefore$ 原式的最小值为 3.