

2025 学年度第一学期八年级期中考试数学学科试卷

A 卷

(考试时间 100 分钟, 满分 120 分)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

1. $\sqrt{4}$ 的平方根是 ()

A. 2

B. $\sqrt{2}$

C. ± 2

D. $\pm\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了平方根的定义, 熟记定义是解题的关键. 根据平方根的定义, 即可得到答案.

【详解】解: $\because \sqrt{4} = 2$,

$\therefore \sqrt{4}$ 的平方根是 $\pm\sqrt{2}$;

故选: D.

2. $5 - \sqrt{3}$ 的整数部分和小数部分分别是 ()

A. 0 和 $5 - \sqrt{3}$

B. 3 和 $2 - \sqrt{3}$

C. 3 和 $\sqrt{3} - 1$

D. 3 和 0.26794919

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了估算无理数的大小, 正确估计无理数的大小是解题的关键.

先估算 $\sqrt{3}$ 的值, 确定 $5 - \sqrt{3}$ 的整数部分, 然后小数部分为原数减整数部分, 据此即可解答.

【详解】解: $\because 1 < \sqrt{3} < 2$, 即 $-2 < -\sqrt{3} < -1$,

$\therefore 3 < 5 - \sqrt{3} < 4$,

$\therefore$ 整数部分为 3,

$\therefore$ 小数部分为 $5 - \sqrt{3} - 3 = 2 - \sqrt{3}$.

$\therefore 5 - \sqrt{3}$ 的整数部分为 3, 小数部分为 $2 - \sqrt{3}$.

故选 B.

3. 下列二次根式中, 属于最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{45}$

B. $\sqrt{\frac{xy}{3}}$

C. $\sqrt{a^2 - b^2}$

D. $\sqrt{a^2 + 2a + 1}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了最简二次根式. 根据最简二次根式的定义 (被开方数不含分母, 且不含能开得尽方的因数或因式), 逐一分析各选项, 即可作答.

【详解】解: A、 $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{3^2 \times 5}$, 含有能开得尽方的因数, 故不是最简二次根式;

B、 $\sqrt{\frac{xy}{3}}$ 含分母, 故不是最简二次根式;

C、 $\sqrt{a^2 - b^2}$ 属于最简二次根式,

D、 $\sqrt{a^2 + 2a + 1} = \sqrt{(a+1)^2}$ 含有能开得尽方的因式, 故不是最简二次根式;

故选: C

4. 下列各组两个二次根式是同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{27a^3b^2}$ 和 $\sqrt{12a}$

B. $5\sqrt{2x}$ 和 $5\sqrt{3x}$

C. $\sqrt{xy^2}$ 和 $\sqrt{x^2y}$

D. $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{\frac{1}{a^2}}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查同类二次根式的判断. 解题的关键在于, 需化简为最简二次根式后, 检查被开方数是否相同. 根据二次根式的化简, 化简后再判断出同类二次根式即可.

【详解】选项 A: 化简 $\sqrt{27a^3b^2} = \sqrt{9 \times 3 \times a^2 \times a \times b^2} = 3a|b|\sqrt{3a}$, 化简 $\sqrt{12a} = \sqrt{4 \times 3 \times a} = 2\sqrt{3a}$, 两式最简形式被开方数均为 $3a$, 为同类二次根式. 符合题意;

选项 B: $5\sqrt{2x}$ 和 $5\sqrt{3x}$, 被开方数分别为 $2x$ 和 $3x$, 故不是同类二次根式, 不符合题意;

选项 C: $\sqrt{xy^2} = |y|\sqrt{x}$ 和 $\sqrt{x^2y} = |x|\sqrt{y}$, 被开方数分别为 x 和 y , 故不是同类二次根式, 不符合题意;

选项 D: $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{|a|}$, $\sqrt{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{|a|}$ 化简后不是二次根式, 故不是同类二次根式, 不符合题意.

故选 A.

5. 下列方程中, 是关于 x 的一元二次方程的是 ()

A. $x^2 + \frac{2}{x} - 1 = 0$

B. $(x+1)^2 = (x-4)(3x+2)$

C. $(2x+3)^2 = (x-1)(4x+1)$

D. $x + \frac{2}{x} - 1 = 0$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查的是一元二次方程的定义，根据只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫一元二次方程解答此题即可.

【详解】 解： A、方程 $x^2 + \frac{2}{x} - 1 = 0$ 不是整式方程，故不是一元二次方程，不符合题意；

B、方程 $(x+1)^2 = (x-4)(3x+2)$ 化为 $2x^2 - 12x - 9 = 0$ ，故是一元二次方程，符合题意；

C、方程 $(2x+3)^2 = (x-1)(4x+1)$ 化为 $4x^2 + 12x + 9 = 4x^2 - 3x - 1$ ，即 $15x + 10 = 0$ ，是一元一次方程，故不是一元二次方程，不符合题意；

D、方程 $x + \frac{2}{x} - 1 = 0$ 不是整式方程，故不是一元二次方程，不符合题意，

故选： B.

6. 若关于 x 的方程 $x^2 - 2\sqrt{k}x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是 ()

A. $k = 0$

B. $k > 1$

C. $k \geq 0$

D. $k > -1$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式有意义的条件、一元二次方程根的判别式等知识点，掌握一元二次方程根的判别式与方程解的情况的关系是解题的关键.

由方程中有 $\sqrt{k}$ 得 $k \geq 0$ ；再根据题意可得判别式 $\Delta > 0$ 列不等式求得 k 的范围，再结合 $k \geq 0$ 即可解答.

【详解】 解： $\because$ 方程有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (-2\sqrt{k})^2 - 4 \times 1 \times (-1) > 0, \text{ 解得: } k > -1,$$

又 $\because$ 方程中 $\sqrt{k}$ 有意义，

$$\therefore k \geq 0,$$

$\therefore k$ 的取值范围是 $k \geq 0$.

故选： C.

二. 填空题 (本大题共 12 题，每小题 3 分，满分 36 分)

7. $-\frac{1}{64}$ 的立方根是_____.

【答案】 $-\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 根据立方根的定义解答即可.

【详解】 解: $\because \left(-\frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{1}{64}$

$\therefore -\frac{1}{64}$ 的立方根是 $-\frac{1}{4}$.

故答案为 $-\frac{1}{4}$.

【点睛】 此题主要考查了立方根定义, 求一个数的立方根, 应先找出所要求的这个数是哪一个数的立方. 由开立方和立方是互逆运算, 用立方的方法求这个数的立方根. 注意一个数的立方根与原数的符号相同.

8. $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ 的有理化因式可以是_____.

【答案】 $\sqrt{m} - \sqrt{n}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的有理化、平方差公式等知识点, 灵活运用平方差公式是解题的关键.

根据平方差公式确定 $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ 的有理化因式即可.

【详解】 解: $\because (\sqrt{m} + \sqrt{n})(\sqrt{m} - \sqrt{n}) = (\sqrt{m})^2 - (\sqrt{n})^2 = m - n$,

$\therefore \sqrt{m} + \sqrt{n}$ 的有理化因式可以是 $\sqrt{m} - \sqrt{n}$.

故答案为: $\sqrt{m} - \sqrt{n}$.

9. 比大小: $2\sqrt{5}$ _____ $3\sqrt{2}$ (填写 “>”、“=”、或 “<”).

【答案】 >

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的大小比较, 对于带根号的无理数的大小比较, 可以利用平方法先转化为有理数的大小比较.

通过比较两数的平方值, 根据平方后的大小关系推断原数的大小即可.

【详解】 解: $\because (2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$, $(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$, 且 $20 > 18$,

$\therefore 2\sqrt{5} > 3\sqrt{2}$.

故答案为>.

10. 将 $0.\dot{3}\dot{5}$ 化成最简分数是_____.

【答案】 $\frac{35}{99}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了小数化分数、一元一次方程的应用等知识点，灵活运用一元一次方程解决实际问题解题的关键.

将循环小数设为未知数，利用倍数相减消去循环部分，然后得到一元一次方程求解即可.

【详解】 解： 设 $x = 0.\dot{3}\dot{5}$ ， 则 $x = 0.353535\dots$.

由于循环节有两位， 将等式两边乘 100， 得 $100x = 35.\dot{3}\dot{5}$.

将两式相减： $100x - x = 35.\dot{3}\dot{5} - 0.\dot{3}\dot{5}$ ， 即 $99x = 35$ ，

所以 $x = \frac{35}{99}$. 由于 35 和 99 互质， 该分数已为最简形式.

故答案为 $\frac{35}{99}$.

11. 等式 $\sqrt{(x-2)(x-3)} = \sqrt{(x-2)} \cdot \sqrt{(x-3)}$ 成立的条件是_____.

【答案】 $x \geq 3$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义， 根据 $\sqrt{(x-2)(x-3)} = \sqrt{(x-2)} \cdot \sqrt{(x-3)}$ ， 得出 $x-2 \geq 0$ ， $x-3 \geq 0$ ， 再解得 $x \geq 3$ ， 即可作答.

【详解】 解： $\because \sqrt{(x-2)(x-3)} = \sqrt{(x-2)} \cdot \sqrt{(x-3)}$ ，

$\therefore x-2 \geq 0$ ， 且 $x-3 \geq 0$ ，

$\therefore x \geq 2$ 且 $x \geq 3$ ，

$\therefore x \geq 3$ ，

故答案为： $x \geq 3$.

12. 化简： $\sqrt{\frac{-2}{b}} (b < 0) =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{-2b}}{-b}$

【解析】

【分析】该题考查了二次根式的性质，由于 $b < 0$ ，被开方数 $\frac{-2}{b} > 0$ ，平方根有意义。化简时，将根号内的表达式变形，利用二次根式的性质和绝对值的意义进行化简。

【详解】解：因为 $b < 0$ ，所以 $\frac{-2}{b} > 0$ ，

$$\therefore \sqrt{\frac{-2}{b}} = \sqrt{\frac{-2b}{b^2}} = \frac{\sqrt{-2b}}{\sqrt{b^2}} = \frac{\sqrt{-2b}}{|b|},$$

$$\because b < 0, \therefore |b| = -b,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{-2b}}{|b|} = \frac{\sqrt{-2b}}{-b}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{-2b}}{-b}.$$

13. 不等式 $x \leq \sqrt{2}x + 1$ 的解集是_____.

【答案】 $x \geq -1 - \sqrt{2}$

【解析】

【分析】本题考查了解一元一次不等式，分母有理化，熟练掌握解一元一次不等式的步骤是解题的关键。通过移项和合并同类项将不等式化为标准形式，注意到系数为负数时不等号方向改变，并通过分母有理化简化表达式即可。

【详解】解： $x \leq \sqrt{2}x + 1$

$$x - \sqrt{2}x \leq 1$$

$$(1 - \sqrt{2})x \leq 1$$

$$x \geq \frac{1}{1 - \sqrt{2}}$$

$$x \geq \frac{1 \times (1 + \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})}$$

$$\therefore x \geq -1 - \sqrt{2}$$

$$\text{故答案为: } x \geq -1 - \sqrt{2}.$$

14. 关于 x 的一元二次方程 $3x^2 - 7x + m + 2 = 0$ 根的判别式的值是 6, 则此方程的解为_____.

【答案】 $x_1 = \frac{7+\sqrt{6}}{6}, x_2 = \frac{7-\sqrt{6}}{6}$

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程, 直接利用求根公式进行求解即可.

【详解】 解: $\because 3x^2 - 7x + m + 2 = 0$ 根的判别式的值是 $6 > 0$,

$$\therefore x = \frac{7 \pm \sqrt{6}}{2 \times 3} = \frac{7 \pm \sqrt{6}}{6},$$

$$\therefore x_1 = \frac{7+\sqrt{6}}{6}, x_2 = \frac{7-\sqrt{6}}{6};$$

故答案为: $x_1 = \frac{7+\sqrt{6}}{6}, x_2 = \frac{7-\sqrt{6}}{6}$.

15. 已知质量为 $7.9 \times 10^3 \text{ kg}$ 的铁的体积是 1 m^3 . 现有一个体积为 3 mm^3 的铁钉, 那么它的质量是_____千克 (结果用科学记数法表示).

【答案】 2.37×10^{-5}

【解析】

【分析】 本题考查了科学记数法. 先将体积单位从立方毫米转换为立方米, 再求质量, 最后用科学记数法表示结果, 即可作答.

【详解】 解: 依题意, $3 \text{ mm}^3 = 3 \times 10^{-9} \text{ m}^3$,

$$\therefore 7.9 \times 10^3 \times 3 \times 10^{-9} = 2.37 \times 10^{-5},$$

故答案为 2.37×10^{-5} .

16. 已知 a, b 是一元二次方程 $x^2 - 6x + 4 = 0$ 的两个根, 则 $\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}}$ 的值是_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根与系数的关系、代数式求值、二次根式的混合运算等知识点, 掌握根与系数的关系是解题的关键.

根据一元二次方程根与系数的关系可得两根之和与两根之积, 再将 $\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}}$ 化简后代入计算即可.

【详解】解：∵ a 、 b 是方程 $x^2 - 6x + 4 = 0$ 的两个根，

$$\therefore a + b = 6, \quad ab = 4.$$

$$\therefore \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} = \frac{6}{\sqrt{4}} = \frac{6}{2} = 3.$$

故答案为：3.

17. 已知 a 是方程 $x^2 - 2025x + 1 = 0$ 的一个根，则 $a^2 - 2024a + \frac{2025}{a^2 + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】2024

【解析】

【分析】根据方程根的定义，转化为代数式的求值解答.

【详解】∵ a 是方程 $x^2 - 2025x + 1 = 0$ 的一个根，且 $a \neq 0$ ，

$$\therefore a^2 - 2025a + 1 = 0, \quad \frac{a^2 - 2025a + 1}{a} = 0 \text{ 即 } a + \frac{1}{a} = 2025,$$

$$\therefore a^2 + 1 = 2025a, \quad a^2 - 2024a = a - 1,$$

$$\begin{aligned} \therefore a^2 - 2024a + \frac{2025}{a^2 + 1} &= a - 1 + \frac{2025}{2025a} \\ &= a - 1 + \frac{1}{a} = 2025 - 1 = 2024, \end{aligned}$$

故答案为：2024.

【点睛】本题考查了方程根的定义，代数式的整体思想求值，掌握定义，活用整体思想是解题的关键.

18. 定义：如果两个一元二次方程分别有两个实数根，且至少有一个公共根，那么称这两个方程互为“联根方程”. 已知关于 x 的两个一元二次方程 $x^2 - (3+a)x + 3a = 0$ 和 $(a-1)x^2 - a^2x - a + 2 = 0$ 互为联根方程，那么 a 的值为_____.

【答案】-2

【解析】

【分析】本题考查解一元二次方程及根的判别式，理解题中定义和方程的解的意义，得到关于 a 的方程是解答的关键. 先求得方程 $x^2 - (3+a)x + 3a = 0$ 的解，再根据题中定义和方程的解的意义得到关于 a 的方程，然后解方程求得 a 值，结合根的判别式与根的关系即可求解.

【详解】解：由方程 $x^2 - (3+a)x + 3a = 0$ 得 $(x-3)(x-a) = 0$,

解得 $x_1 = 3$, $x_2 = a$,

$\therefore$ 两个一元二次方程 $x^2 - (3+a)x + 3a = 0$ 和 $(a-1)x^2 - a^2x - a + 2 = 0$ 互为联根方程,

$\therefore x_1 = 3$, $x_2 = a$ 是方程 $(a-1)x^2 - a^2x - a + 2 = 0$ 的两个根,

当 $x = 3$ 时, 则 $(a-1) \times 3^2 - a^2 \times 3 - a + 2 = 0$, 即 $3a^2 - 8a + 7 = 0$,

$\therefore \Delta = (-8)^2 - 4 \times 3 \times 7 = -20 < 0$,

$\therefore$ 此方程无实数根, 即 $x = 3$ 不是方程 $(a-1)x^2 - a^2x - a + 2 = 0$ 的解;

当 $x = a$ 时, 则 $(a-1) \times a^2 - a^2 \times a - a + 2 = 0$, 即 $a^2 + a - 2 = 0$,

解得 $a_1 = 1$, $a_2 = -2$,

$\therefore a \neq 1$,

$\therefore a = -2$,

此时, 方程 $(a-1)x^2 - a^2x - a + 2 = 0$ 为 $3x^2 + 4x - 4 = 0$, 解得 $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{2}{3}$,

又方程 $x^2 - (3+a)x + 3a = 0$ 的一个解为 $x = -2$, 满足题意,

故 a 的值为 -2 .

故答案为: -2 .

三、计算题 (本大题共 4 题, 每小题 6 分, 满分 24 分)

19. 计算: $\sqrt{6} \div (\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

【答案】 $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的除法运算, 分母有理化, 正确掌握相关性质内容是解题的关键. 先运算除法, 再进行分母有理化, 最后化简, 即可作答.

【详解】 解: $\sqrt{6} \div (\sqrt{3} + \sqrt{2})$
$$= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{6} \times (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} - \sqrt{2})}$$

$$= \frac{\sqrt{18} - \sqrt{12}}{3 - 2}$$

$$= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}.$$

20. 计算: $\sqrt{\frac{ab^3}{16}} \div \sqrt{\frac{1}{a}} \times \sqrt{8b^2}.$

【答案】 $\frac{ab^2}{2}\sqrt{2b}$

【解析】

【分析】 直接利用二次根式的乘除运算法则计算进而得出答案.

【详解】 解: 原式 $= \sqrt{\frac{ab^3}{16} \div \frac{1}{a} \times 8b^2}$

$$= \sqrt{\frac{ab^3}{16} \times a \times 8b^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2b^5}{2}}$$

$$= \frac{ab^2}{2}\sqrt{2b}$$

【点睛】 本题主要考查了二次根式的乘除混合计算, 熟知相关计算法则是解题的关键.

21. 用配方法解方程: $2x^2 + x - 1 = 0.$

【答案】 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -1$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程, 解题的关键是掌握配方法.

利用配方法解一元二次方程即可.

【详解】 解: $2x^2 + x - 1 = 0,$

$$x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2},$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16},$$

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16},$$

$$x + \frac{1}{4} = \pm \frac{3}{4},$$

$$x = \pm \frac{3}{4} - \frac{1}{4},$$

$$\therefore x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -1.$$

22. 用适当的方法解方程: $2x(2x-5) = (x-1)(5-2x)$.

【答案】 $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = \frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的解法, 灵活找到解法是解答关键.

先移项变形, 再提取公因式, 利用因式分解的方法来求解.

【详解】 解: 移项得

$$2x(2x-5) - (x-1)(5-2x) = 0$$

变形得

$$2x(2x-5) + (x-1)(2x-5) = 0$$

提取公因式得

$$(2x-5)(2x+x-1) = 0$$

$$\therefore 2x-5=0 \text{ 或 } 2x+x-1=0$$

$$\therefore x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = \frac{1}{3}.$$

四、解答题 (本大题共 4 题, 满分 42 分)

23. 先化简, 后求值: $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{a-4\sqrt{ab}+4b}{2\sqrt{b}-\sqrt{a}}$, 其中 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{18}$.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的化简求值, 掌握二次根式的化简求值是解题的关键.

把原式化简, 分母有理化得 $\frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b} + \frac{(\sqrt{a}-2\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}}$, 通分化简后, 把 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{18}$ 代入计算即可.

$$\begin{aligned}
& \text{【详解】解: } \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{a-4\sqrt{ab}+4b}{2\sqrt{b}-\sqrt{a}} \\
&= \frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} + \frac{(\sqrt{a})^2 - 4\sqrt{ab} + (2\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}} \\
&= \frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b} + \frac{(\sqrt{a}-2\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}} \\
&= \sqrt{a}-\sqrt{b} + \sqrt{a}-2\sqrt{b} \\
&= 2\sqrt{a}-3\sqrt{b}, \\
&\text{当 } a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{8} \text{ 时,} \\
&\text{原式} = 2\sqrt{\frac{1}{2}} - 3\sqrt{\frac{1}{8}} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{6} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

24. 已知等腰三角形的两条边 a, b 是方程 $x^2 - kx + 12 = 0$ 的两根, 另一边 c 是方程 $x^2 - 16 = 0$ 的一个根, 求 k 的值.

【答案】 $k=7$ 或 $k=4\sqrt{3}$

【解析】

【详解】试题分析: 先解方程 $x^2 - 16 = 0$, 得到 $c=4$, 再分两种情况进行讨论: ① $c=4$ 是底边, 那么 $a=b$, 由方程 $x^2 - kx + 12 = 0$ 的判别式 $\Delta=0$ 列出方程; ② $c=4$ 是腰, 那么将 $x=4$ 代入 $x^2 - kx + 12 = 0$ 求出 k 的值.

解: $\because c$ 是方程 $x^2 - 16 = 0$ 的一个根,

$\therefore c=4$.

分两种情况:

① $c=4$ 是底边,

方程 $x^2 - kx + 12 = 0$ 的判别式 $\Delta = k^2 - 4 \times 12 = 0$,

解得 $k_1 = 4\sqrt{3}$, $k_2 = -4\sqrt{3}$ (舍去),

$4\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$, 4 满足三角形三边关系定理, 符合题意;

② $c=4$ 是腰,

将 $x=4$ 代入 $x^2-kx+12=0$,

得 $4^2-4k+12=0$,

解得 $k=7$,

$\therefore x^2-7x+12=0$,

$\therefore x_1=3, x_2=4$,

4, 4, 3 满足三角形三边关系定理, 符合题意.

故 k 的值为 $4\sqrt{3}$ 或 7.

25. 已知实数 m 满足 $7m^2-7m-1=0$,

(1) 如果实数 n 满足 $7n^2-7n-1=0$, 且 $m \neq n$, 求 m^2n+mn^2 的值;

(2) 如果实数 s 满足 $s^2+7s-7=0$, 且 $ms \neq 1$. 求 $\frac{2ms+7m+2}{s}$ 的值.

【答案】(1) $-\frac{1}{7}$

(2) 1

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根与系数的关系, 一元二次方程的解, 解题的关键是掌握根与系数的关系.

(1) 由题意得出 m, n 是方程 $7x^2-7x-1=0$ 的两个不相等的实数根, 据此知 $m+n=1, mn=-\frac{1}{7}$, 将其代入计算即可;

(2) 把 $s^2+7s-7=0$ 变形为 $7 \cdot \left(\frac{1}{s}\right)^2 - 7 \cdot \frac{1}{s} - 1 = 0$, 据此可得实数 m 和 $\frac{1}{s}$ 可看作方程 $7x^2-7x-1=0$ 的两个不相等的实数根, 继而知 $m+\frac{1}{s}=1, \frac{m}{s}=-\frac{1}{7}$, 进一步代入计算可得.

【小问 1 详解】

解: $\because 7m^2-7m-1=0, 7n^2-7n-1=0$,

$\therefore m, n$ 是方程 $7x^2-7x-1=0$ 的两个不相等的实数根,

$\therefore m+n=1, mn=-\frac{1}{7}$,

$\therefore m^2n+mn^2=mn(m+n)=-\frac{1}{7} \times 1 = -\frac{1}{7}$.

【小问 2 详解】

解: 把 $s^2 + 7s - 7 = 0$ 两边同时除以 s^2 ,

$$\text{得 } 7 \cdot \left(\frac{1}{s}\right)^2 - 7 \cdot \frac{1}{s} - 1 = 0.$$

又 $\because 7m^2 - 7m - 1 = 0, ms \neq 1,$

$\therefore$ 实数 m 和 $\frac{1}{s}$ 可看作方程 $7x^2 - 7x - 1 = 0$ 的两个不相等的实数根,

$$\therefore m + \frac{1}{s} = 1, \frac{m}{s} = -\frac{1}{7},$$

$$\therefore \frac{2ms + 7m + 2}{s}$$

$$= 2m + 7 \cdot \frac{m}{s} + \frac{2}{s}$$

$$= 2\left(m + \frac{1}{s}\right) + 7 \cdot \frac{m}{s}$$

$$= 2 \times 1 + 7 \times \left(-\frac{1}{7}\right)$$

$$= 1.$$

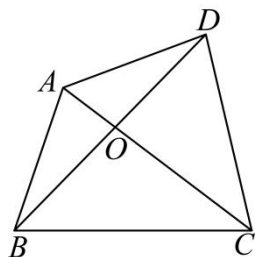
26. 阅读下面内容: 我们已经学习了《二次根式》和《乘法公式》, 聪明的你可以发现: 当 $a > 0, b > 0$ 时,

$\because (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0, \therefore a + b \geq 2\sqrt{ab}$, 当且仅当 $a = b$ 时取等号. 请利用上述结论解决以下问题:

(1) 当 $x > 0$ 时, $x + \frac{1}{x}$ 的最小值为_____; 当 $x < 0$ 时, $x + \frac{1}{x}$ 的最大值为_____.

(2) 当 $x > -1$ 时, 求代数式 $\frac{x^2 + 7x + 10}{x + 1}$ 的最小值.

(3) 如图, 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , $\triangle AOB, \triangle COD$ 的面积分别为 12 和 27, 求四边形 $ABCD$ 面积的最小值.



【答案】(1) 2, -2

(2) 9

(3) 75

【解析】

【分析】 本题考查了配方法在二次根式、分式及四边形面积计算中的应用与拓展，读懂阅读材料中的方法并正确运用是解题的关键.

(1) 当 $x > 0$ 时，直接根据公式 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 计算即可；当 $x < 0$ 时，先将 $x + \frac{1}{x}$ 变形为 $-\left(-x - \frac{1}{x}\right)$ ，再根据公式 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 计算即可；

(2) $x > -1$ 时，则 $x + 1 > 0$ ，将原式变形为 $\frac{(x+1)^2 + 5(x+1) + 4}{x+1}$ ，继而得到 $x + 1 + \frac{4}{x+1} + 5$ ，再由公式求解；

(3) 设 $S_{\triangle AOD} = x$ ，根据等高三角形的性质得到 $S_{\triangle BOC} = \frac{324}{x}$ ，再由 $S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOD}$ 进行求解即可.

【小问 1 详解】

解：当 $x > 0$ 时， $\frac{1}{x} > 0$ ，则 $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$ ，

$\therefore x + \frac{1}{x}$ 的最小值为 2，

当 $x < 0$ 时， $-x > 0$ ， $-\frac{1}{x} > 0$ ，

$\therefore -x - \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{(-x) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)} = 2$ ，

$\therefore x + \frac{1}{x} = -\left(-x - \frac{1}{x}\right) \leq -2$ ，

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时， $x + \frac{1}{x}$ 的最大值为 -2；

【小问 2 详解】

解： $x > -1$ 时，则 $x + 1 > 0$

$$\frac{x^2 + 7x + 10}{x + 1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x+1)^2 + 5(x+1) + 4}{x+1} \\
&= x+1 + \frac{4}{x+1} + 5 \\
&\geq 2\sqrt{(x+1) \cdot \frac{4}{x+1}} + 5 = 9
\end{aligned}$$

【小问3 详解】

解：设 $S_{\triangle AOD} = x$,

$\because \triangle AOD$ 与 $\triangle AOB$ 等高, $\triangle COD$ 与 $\triangle BOC$ 同高,

$$\therefore S_{\triangle AOB} : S_{\triangle AOD} = BO : OD = S_{\triangle BOC} : S_{\triangle COD},$$

由题知 $S_{\triangle AOB} = 12$, $S_{\triangle COD} = 27$,

$$\therefore 12 : x = S_{\triangle BOC} : 27,$$

$$\therefore S_{\triangle BOC} = \frac{324}{x},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOD}$$

$$= 12 + 27 + \frac{324}{x} + x = 39 + \frac{324}{x} + x,$$

$$\therefore \frac{324}{x} + x \geq 2\sqrt{\frac{324}{x} \cdot x} = 36,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} \geq 39 + 36 = 75,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 面积的最小值为 75.

B 卷

一、解答题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 满分 20 分)

27. 已知 $a = (2 + \sqrt{5})^{2025} (\sqrt{5} - 2)^{2026} - 2(\sqrt{5} + 2)^0 + \sqrt{(-2)^2}$, 求 $a^2 + 4a$ 的值.

【答案】1

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的混合运算, 先根据二次根式的运算法则把 a 化简, 再代入 $a^2 + 4a$ 计算即可.

$$\begin{aligned}
\text{【详解】解: } \because a &= (2 + \sqrt{5})^{2025} (\sqrt{5} - 2)^{2026} - 2(\sqrt{5} + 2)^0 + \sqrt{(-2)^2} \\
&= (2 + \sqrt{5})^{2025} (\sqrt{5} - 2)^{2025} \cdot (\sqrt{5} - 2) - 2 \times 1 + 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[(2 + \sqrt{5})(\sqrt{5} - 2) \right]^{2025} \cdot (\sqrt{5} - 2) - 2 + 2 \\
&= 1^{2025} \cdot (\sqrt{5} - 2) - 2 + 2 \\
&= \sqrt{5} - 2 - 2 + 2 \\
&= \sqrt{5} - 2, \\
&\therefore a^2 + 4a \\
&= (\sqrt{5} - 2)^2 + 4(\sqrt{5} - 2) \\
&= 5 - 4\sqrt{5} + 4 + 4\sqrt{5} - 8 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

28. 已知 x, y 是实数, 且 $y = \frac{\sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{9 - x^2} - 2}{x + 3}$, 求 $5x + 6y$ 的值.

【答案】 13

【解析】

【分析】根据被开方数大于等于 0, 分母不等于 0 列不等式求出 x 的值, 再求出 y 的值, 然后代入代数式进行计算即可得解.

【详解】解: 由题意得,
$$\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ 9 - x^2 \geq 0, \\ x + 3 \neq 0 \end{cases}$$

解得 $x=3$,

所以, $y = \frac{-2}{3+3} = -\frac{1}{3}$,

所以, $5x + 6y = 5 \times 3 + 6 \times (-\frac{1}{3}) = 15 - 2 = 13$.

【点睛】本题考查了二次根式有意义的条件、分式有意义的条件和代数式求值. 掌握二次根式中被开方数必须是非负数, 分式的分母不能为 0 是解题关键.

29. 已知 $x = \sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$ 求代数式 $\frac{x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 18x + 23}{x^2 - 8x + 15}$ 的值.

【答案】 5

【解析】

【分析】利用二次根式的化简, 完全平方公式, 因式分解解答即可.

本题考查了二次根式的化简, 完全平方公式, 因式分解, 熟练掌握完全平方公式.

【详解】解： $\because x = \sqrt{19-8\sqrt{3}} = (4-\sqrt{3})$,

$$\therefore (x-4)^2 = (-\sqrt{3})^2,$$

$$\therefore x^2 - 8x + 13 = 0,$$

$$\therefore x^2 - 8x + 15 = 2,$$

$$\therefore \frac{x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 18x + 23}{x^2 - 8x + 15} = \frac{(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 8x + 13) + 10}{x^2 - 8x + 15} = \frac{10}{2} = 5.$$

30. 已知: $y = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10}$, 求 y 的值.

【答案】 $\frac{123+55\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了乘方运算，准确的计算是解决本题的关键.

令 $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 求出 $a^2 = a + 1$, 再依次求出 $a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}$ 即可求解.

【详解】解: 令 $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

$$\therefore a^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}$$

$$= \frac{6+2\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1$$

$$= a + 1,$$

$$\therefore a^3 = a \cdot a^2 = a \cdot (a + 1) = a^2 + a = (a + 1) + a = 2a + 1,$$

$$a^4 = a \cdot a^3 = a \cdot (2a + 1) = 2a^2 + a = 2(a + 1) + a = 3a + 2,$$

$$a^5 = a \cdot a^4 = a \cdot (3a + 2) = 3a^2 + 2a = 3(a + 1) + 2a = 5a + 3 ,$$

$$a^6 = a \cdot a^5 = a \cdot (5a + 3) = 5a^2 + 3a = 5(a + 1) + 3a = 8a + 5 ,$$

$$a^7 = a \cdot a^6 = a \cdot (8a + 5) = 8a^2 + 5a = 8(a + 1) + 5a = 13a + 8 ,$$

$$a^8 = a \cdot a^7 = a \cdot (13a + 8) = 13a^2 + 8a = 13(a + 1) + 8a = 21a + 13 ,$$

$$a^9 = a \cdot a^8 = a \cdot (21a + 13) = 21a^2 + 13a = 21(a + 1) + 13a = 34a + 21 ,$$

$$a^{10} = a \cdot a^9 = a \cdot (34a + 21) = 34a^2 + 21a = 34(a + 1) + 21a = 55a + 34 ,$$

$$\begin{aligned} \therefore y &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{10} \\ &= 55 \times \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + 34 \\ &= \frac{55 + 55\sqrt{5}}{2} + 34 \\ &= \frac{55 + 55\sqrt{5} + 68}{2} \\ &= \frac{123 + 55\sqrt{5}}{2} . \end{aligned}$$