

市北初级中学北校 2025-2026 学年八年级上学期

数学期中模考练习试卷

一、单选题 (每题 2 分, 共 12 分)

1. 在实数 3.14 , $1.\dot{2}\dot{3}$, $\sqrt{8}$, $1.1010010001\dots$ (每两个 1 之间依次增加一个 0), $\frac{\pi}{2}$, $\frac{22}{7}$, $\sqrt{\frac{4}{9}}$ 中, 无理数有 ()

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

【答案】D

【解析】

【分析】此题主要考查了无理数的定义, 其中初中范围内学习的无理数有: π , 2π 等; 开方开不尽的数; 以及像 $0.1010010001\dots$ (两个 1 之间依次多一个 0) 这样规律的数. 无理数就是无限不循环小数. 理解无理数的概念, 一定要同时理解有理数的概念, 有理数是整数与分数的统称. 即有限小数和无限循环小数是有理数, 而无限不循环小数是无理数. 由此即可得出答案.

【详解】解: $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$,

则 3.14 , $1.\dot{2}\dot{3}$, $\frac{22}{7}$, $\sqrt{\frac{4}{9}}$ 是有理数,

$\sqrt{8}$, $1.1010010001\dots$ (每两个 1 之间依次增加一个 0), $\frac{\pi}{2}$, 是无理数, 共 3 个;

故选: D.

2. 下列说法正确的是 ()

- A. 1 的平方根与立方根相同 B. 实数与数轴上的点一一对应
C. 两个无理数的和还是无理数 D. 对于实数 a , 若 $\sqrt{a^2} = a$, 则 $a > 0$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了平方根、立方根、实数与数轴、无理数的定义、二次根式的性质, 熟练掌握这些数学概念是解题的关键. 根据平方根、立方根、实数与数轴、无理数的定义、二次根式的性质, 逐一判断即可解答.

【详解】解: A、因为 $(\pm 1)^2 = 1$, 所以 1 的平方根是 ± 1 , 因为 $1^3 = 1$, 所以 1 的立方根是 1, 由于 1 的平方根与立方根不相同, 所以选项 A 错误;

B、实数与数轴上的点一一对应，即每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示，所以选项 B 正确；

C、例如 $\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$ 都是无理数，它们的和为 $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ ，而 0 是有理数，所以选项 C 错误；

D、根据二次根式的性质， $\sqrt{a^2} = |a|$ ，当 $a \geq 0$ 时， $|a| = a$ ；当 $a < 0$ 时， $|a| = -a$ 。已知 $\sqrt{a^2} = a$ ，则 $a \geq 0$ ，而不是 $a > 0$ ，所以选项 D 错误。

故选：B。

3. 下列二次根式中，是最简二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{\frac{1}{2}a}$

B. $\sqrt{a^3}$

C. $\sqrt{35a}$

D. $\sqrt{a^2 + 2a + 1}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查的是最简二次根式的概念，被开方数不含分母、不含能开得尽方的因数或因式的二次根式，叫做最简二次根式，根据最简二次根式的概念判断即可。

【详解】解：A、 $\sqrt{\frac{1}{2}a} = \frac{\sqrt{2a}}{2}$ ，故 A 不符合题意；

B、 $\sqrt{a^3} = a\sqrt{a}$ ，故 B 不符合题意；

C、 $\sqrt{35a}$ 是最简二次根式，故 C 符合题意；

D、 $\sqrt{a^2 + 2a + 1} = |a + 1|$ ，故 D 不符合题意。

故选：C。

4. 一元二次方程 $x^2 + 2x - 1 = 0$ 的根的情况是（ ）

A. 只有一个实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 有两个不相等的实数根

D. 没有实数根

【答案】C

【解析】

【分析】根据方程的系数结合根的判别式，可得出 $\Delta = 8 > 0$ ，进而可得出 $x^2 + 2x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根。

【详解】解： $\because a = 1, b = 2, c = -1$ ，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8 > 0,$$

∴一元二次方程 $x^2 + 2x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根.

故选: C.

【点睛】 本题考查了根的判别式, 牢记“当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根”是解题的关键.

5. 若 $\sqrt{x^3 + 4x^2} = -x\sqrt{x+4}$, 则 x 的取值范围是 ()

A. $x \leq 0$

B. $x \geq -4$

C. $-4 \leq x \leq 0$

D. $-4 \leq x < 0$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件, 正确求解是解题的关键.

根据二次根式的性质进行化简即可.

【详解】 解: $\because \sqrt{x^3 + 4x^2} = \sqrt{x^2(x+4)} = -x\sqrt{x+4}$,

$$\therefore \begin{cases} x \leq 0 \\ x+4 \geq 0 \end{cases},$$

$$\therefore -4 \leq x \leq 0;$$

故选: C.

6. 若 $a + |a| = 0$, 则 $\sqrt{(a+1)^2} + \sqrt{(a-1)^2}$ 的值是 ()

A. 2

B. $-2a$

C. 2 或 $-2a$

D. $2a$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质, 绝对值的非负性, 化简绝对值, 正确掌握相关性质内容是解题的关键. 先根据 $a + |a| = 0$, 得 $|a| = -a$, 整理得 $a \leq 0$, 再化简 $\sqrt{(a+1)^2} + \sqrt{(a-1)^2} = |a+1| + 1 - a$, 然后进行分类讨论, 化简绝对值, 即可作答.

【详解】 解: $\because a + |a| = 0$,

$$\therefore |a| = -a,$$

$$\therefore |a| \geq 0$$

$$\therefore -a \geq 0$$

$$\therefore a \leq 0,$$

$$\text{则 } \sqrt{(a+1)^2} + \sqrt{(a-1)^2}$$

$$=|a+1|+|a-1|$$

$$=|a+1|+1-a$$

当 $-1 \leq a \leq 0$ 时, 则 $|a+1|+1-a = a+1+1-a = 2$;

当 $a < -1$ 时, 则 $|a+1|+1-a = -a-1+1-a = -2a$;

故选: C

二、填空题 (每题 2 分, 共 24 分)

7. $\sqrt{64}$ 的平方根是_____

【答案】 $\pm 2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了平方根的定义, 二次根式的化简, 先根据算术平方根的定义得到 $\sqrt{64} = 8$, 然后根据平方根的定义求解即可.

【详解】 解: $\sqrt{64} = 8$,

$\sqrt{64}$ 的平方根是 $\pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$

故答案为: $\pm 2\sqrt{2}$, .

8. 已知 $a < 0$, 那么 $\sqrt{9a^2}$ 可化简为_____.

【答案】 $-3a$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的化简, 掌握 $\sqrt{a^2} = |a|$ 是解题的关键.

【详解】 解: 原式 $= 3|a|$

$= -3a$;

故答案为: $-3a$.

9. 比较大小: $-\sqrt{15}$ _____ -4. (填 “>”、“=” 或 “<”)

【答案】 >

【解析】

【分析】 先由 $4 = \sqrt{16}$, 得到 $\sqrt{16} > \sqrt{15}$, 再利用两个负实数绝对值大的反而小得出结论.

【详解】解： $\because 4 = \sqrt{16} > \sqrt{15}$,

$$\therefore -\sqrt{15} > -\sqrt{16},$$

$$\therefore -\sqrt{15} > -4.$$

故答案为：>

【点睛】本题考查了实数大小的比较，关键要熟记实数大小的比较方法：正实数都大于0，负实数都小于0，正实数大于一切负实数，两个负实数绝对值大的反而小.

10. 已知数轴上的点 A 、点 B 所对应的实数分别是 $2\sqrt{2}$ 、 $-3\sqrt{2}$ ，那么 $AB =$ _____.

【答案】 $5\sqrt{2}$

【解析】

【分析】先判断点 A 和点 B 的相对位置，再根据数轴上两点间距离公式求解即可.

【详解】解： $\because$ 数轴上的点 A 、点 B 所对应的实数分别是 $2\sqrt{2}$ 、 $-3\sqrt{2}$ ，且 $-3\sqrt{2} < 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore$ 点 B 在点 A 的左侧.

$$\therefore AB = 2\sqrt{2} - (-3\sqrt{2}) = 5\sqrt{2}.$$

故答案为： $5\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查数轴上两点间的距离，实数与数轴，二次根式的加减运算，熟练掌握这些知识点是解题关键.

11. 用科学记数法表示： $0.00026000001 =$ _____.

【答案】 2.6000001×10^{-4}

【解析】

【分析】本题主要考查了利用科学记数法表示绝对值小于1的数，解题的关键是掌握科学记数法的表示形式.

利用科学记数法进行表示即可，科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

【详解】解： $0.00026000001 = 2.6000001 \times 10^{-4}$,

故答案为： 2.6000001×10^{-4} .

12. 若 $6.24 \approx 2.498^2$ ， $62.4 \approx 7.899^2$ ，则 $\sqrt{0.624} \approx$ _____.

【答案】 0.7899

【解析】

【分析】 本题主要考查了算术平方根的概念，解题的关键是理解算术平方根每向左（或右）移动一位，则被开方数向相同的方向移动两位，反之，被开方数每移动两位，则算术平方根向相同的方向移动一位。利用算术平方根的概念进行求解即可。

【详解】 解： $\sqrt{0.624} = \sqrt{62.4 \times 0.01} = 0.1\sqrt{62.4} \approx 0.1 \times 7.899 = 0.7899$

故答案为： 0.7899 .

13. 一元二次方程 $(3-x) = (3-x)^2$ 的解是_____.

【答案】 $x = 2$ 或 $x = 3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程，解题的关键是掌握因式分解法。通过移项和提取公因式，将方程转化为两个一次因式的乘积为零的形式，然后求解。

【详解】 解： $(3-x) = (3-x)^2$

$$(3-x)^2 - (3-x) = 0$$

$$(3-x)[(3-x)-1] = 0$$

$$(3-x)(2-x) = 0$$

$$3-x=0 \text{ 或 } 2-x=0,$$

$$\text{解得 } x=3 \text{ 或 } x=2,$$

故答案为： $x=2$ 或 $x=3$.

14. 关于 x 的一元二次方程 $(m-3)x^2 + x + (m^2-9) = 0$ 的一个根是 0，则 m 的值是_____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 一元二次方程的根就是一元二次方程的解，就是能够使方程左右两边相等的未知数的值。即把 0 代入方程求解可得 m 的值。

【详解】 解： 把 $x=0$ 代入方程 $(m-3)x^2 + x + (m^2-9) = 0$,

$$\text{得 } m^2-9=0,$$

$$\text{解得： } m=\pm 3,$$

$$\because m-3 \neq 0,$$

$$\therefore m = -3,$$

故答案是: -3.

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程的定义及其解, 注意方程有意义, 其二次项系数不能为 0.

15. 把 $(a-b)\sqrt{-\frac{1}{a-b}}$ 根号外面的因式移到根号里面, 化成最简二次根式, 正确的结果是_____.

【答案】 $-\sqrt{b-a}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质与化简, 由根号下的表达式 $-\frac{1}{a-b}$ 可知, $a-b < 0$, 因此移动因式时需考虑符号, 利用二次根式的性质进行化简.

【详解】 解: 由 $(a-b)\sqrt{-\frac{1}{a-b}}$ 得 $-\frac{1}{a-b} \geq 0$,

$$\therefore a-b < 0,$$

$$\therefore \text{设 } t = a-b, \text{ 则 } t < 0, \text{ 原式为 } t\sqrt{-\frac{1}{t}}$$

$$\therefore t\sqrt{-\frac{1}{t}} = -\sqrt{t^2 \cdot \left(-\frac{1}{t}\right)} = -\sqrt{-t},$$

$$\text{代入 } t = a-b, \text{ 得原式} = -\sqrt{-(a-b)} = -\sqrt{b-a}.$$

故答案为: $-\sqrt{b-a}$.

16. 不等式 $x < \sqrt{2}x + \sqrt{2}$ 的解集为_____.

【答案】 $x > -2 - \sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的应用, 解不等式, 根据解一元一次不等式的步骤求解即可.

【详解】 解: $x < \sqrt{2}x + \sqrt{2}$

$$\therefore (1 - \sqrt{2})x < \sqrt{2}$$

$$\therefore x > \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = -2-\sqrt{2}$$

$$\therefore x > -2-\sqrt{2}$$

17. 若 $\sqrt{11}$ 的整数部分为 a ， $5-\sqrt{6}$ 小数部分为 b ，则 $a-b$ 的值为_____.

【答案】 $\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题主要考查无理数的估算的运算，掌握无理数是无限不循环小数，包括整数部分和小数部分并理解其表示形式是解题的关键. 无理数是无限不循环小数，包括整数部分和小数部分，由此即可求解.

【详解】 解： $\because \sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16}$,

$$\therefore 3 < \sqrt{11} < 4,$$

$$\therefore a = 3,$$

$$\because \sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9},$$

$$\therefore 2 < \sqrt{6} < 3,$$

$$\therefore -3 < -\sqrt{6} < -2,$$

$$\therefore 5-3 < 5-\sqrt{6} < 5-2 \text{ 即 } 2 < 5-\sqrt{6} < 3$$

$$\therefore b = 5-\sqrt{6}-2 = 3-\sqrt{6},$$

$$\therefore a-b = 3-(3-\sqrt{6}) = \sqrt{6},$$

故答案为： $\sqrt{6}$.

18. 定义一种运算，对于任意角 α 和 β ， $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$ ，已知 $\tan 45^\circ = 1$ ， $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ ，

那么 $\tan 105^\circ \cdot \tan 15^\circ$ 的值是_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算，根据 $\tan 45^\circ = 1$ ， $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ ，代入

$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$ 求得 $\tan 105^\circ$, 根据 $\tan 60^\circ = \tan(15^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 15^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 15^\circ \tan 45^\circ}$, 求得

$\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$, 进而即可求解.

【详解】解: $\because \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$, $\tan 45^\circ = 1$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$$\therefore \tan 105^\circ = \tan(45^\circ + 60^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 60^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 60^\circ} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{1 - 3} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3},$$

$$\tan 60^\circ = \tan(15^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 15^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 15^\circ \tan 45^\circ}, \text{ 即 } \sqrt{3} = \frac{\tan 15^\circ + 1}{1 - \tan 15^\circ}$$

$$\therefore \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan 15^\circ = \tan 15^\circ + 1$$

$$\therefore \tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\therefore \tan 105^\circ \cdot \tan 15^\circ = -(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = -1,$$

故答案为: -1 .

三、简答题 (19、20 题每小题 4 分, 21、22 题每题 4 分, 23、24 题每题 6 分, 共 44 分)

19. 化简与计算.

$$(1) \sqrt{75} - \frac{2}{3}\sqrt{27} - (\sqrt{3} - 1)^0 + \frac{3}{\sqrt{3} + 1};$$

$$(2) \frac{1}{2}x\sqrt{4x} + 6x\sqrt{\frac{x}{9}} - 2x^2\sqrt{\frac{1}{x}};$$

$$(3) \frac{2}{b}\sqrt{ab} \times \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \div \sqrt{\frac{b}{9a}} (a > 0);$$

$$(4) \left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{2}{5}}\right) \div \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

【答案】(1) $\frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}$

(2) $x\sqrt{x}$

(3) $-\frac{9a^2}{b}\sqrt{ab}$

(4) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的混合计算，二次根式的加减计算，熟知相关计算法则是解题的关键.

(1) 先化简二次根式和分母有理化，再计算加减法即可；

(2) 先化简二次根式，再计算加减法即可；

(3) 根据二次根式的乘除计算法则求解即可；

(4) 先化简二次根式，再把除法变成乘法，接着计算乘法并分母有理化即可.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= 5\sqrt{3} - \frac{2}{3} \times 3\sqrt{3} - 1 + \frac{3(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1) \times (\sqrt{3}-1)} \\ &= 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 1 + \frac{3(\sqrt{3}-1)}{3-1} \\ &= 3\sqrt{3} - 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2};\end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= x\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} \\ &= x\sqrt{x};\end{aligned}$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: } \because a > 0, \text{ 且式子 } \sqrt{\frac{b}{9a}} \text{ 有意义,}$$

$$\therefore b > 0,$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{原式} &= -\frac{3}{b} \sqrt{a^4 b^2} \div \sqrt{\frac{b}{9a}} \\ &= -3a^2 \div \sqrt{\frac{b}{9a}} \\ &= -3a^2 \cdot \sqrt{\frac{9a}{b}}\end{aligned}$$

$$= -\frac{9a^2}{b}\sqrt{ab};$$

【小问 4 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= \left(\frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{\sqrt{10}}{5} \right) \div \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \\ &= \frac{3\sqrt{10}}{10} \div \frac{5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}{10} \\ &= \frac{3\sqrt{10}}{10} \cdot \frac{10}{5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}} \\ &= \frac{3\sqrt{10}}{5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}} \\ &= \frac{3\sqrt{10}(5\sqrt{2} + 2\sqrt{5})}{(5\sqrt{2} - 2\sqrt{5})(5\sqrt{2} + 2\sqrt{5})} \\ &= \frac{30\sqrt{5} + 30\sqrt{2}}{50 - 20} \\ &= \frac{30\sqrt{5} + 30\sqrt{2}}{30} \\ &= \sqrt{5} + \sqrt{2}.\end{aligned}$$

20. 计算:

$$(1) \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) = \sqrt{3}(x + \sqrt{3});$$

$$(2) \text{用配方法解方程: } 2x^2 - 3x - 4 = 0.$$

【答案】(1) $x = -5\sqrt{2} - 5\sqrt{3}$

$$(2) x_1 = \frac{3 + \sqrt{41}}{4}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{41}}{4}$$

【解析】

【分析】本题考查了解一元一次方程和一元二次方程，二次根式的性质.

(1) 根据解一元一次方程的步骤，去括号、移项、合并同类项、系数化为 1 解一元一次方程，最后根据二次根式的性质化简即可；

(2) 利用配方法求解可得.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) = \sqrt{3}(x + \sqrt{3}),$$

$$\text{去括号得 } \sqrt{2}x - 2 = \sqrt{3}x + 3,$$

$$\text{移项得 } \sqrt{2}x - \sqrt{3}x = 3 + 2,$$

$$\text{合并同类项得 } (\sqrt{2} - \sqrt{3})x = 5,$$

$$\text{系数化为 1 得 } x = \frac{5}{\sqrt{2} - \sqrt{3}},$$

$$\text{分母有理化得 } x = \frac{5(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})},$$

$$\text{化简得 } x = -5\sqrt{2} - 5\sqrt{3},$$

$$\text{因此, 方程的解为 } x = -5\sqrt{2} - 5\sqrt{3};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } 2x^2 - 3x - 4 = 0,$$

$$\text{移项得 } 2x^2 - 3x = 4,$$

$$\text{二次项系数化为 1 得 } x^2 - \frac{3}{2}x = 2,$$

$$\text{配方得 } x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2,$$

$$\text{即 } \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{41}{16},$$

$$\text{开平方得 } x - \frac{3}{4} = \pm \frac{\sqrt{41}}{4},$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{3 + \sqrt{41}}{4}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{41}}{4}.$$

$$21. \text{ 解不等式: } \sqrt{6}x + 2 > \sqrt{8}x.$$

【答案】 $x < \sqrt{6} + 2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元一次不等式，分母有理化，先合并同类项，再把未知数的系数化为1即可得到答案.

【详解】 解: $\sqrt{6}x + 2 > \sqrt{8}x$

$$\sqrt{6}x - \sqrt{8}x > -2,$$

$$\therefore (\sqrt{6} - 2\sqrt{2})x > -2,$$

$$\therefore x < \frac{-2}{\sqrt{6} - 2\sqrt{2}},$$

$$\therefore x < \frac{-2(\sqrt{6} + 2\sqrt{2})}{(\sqrt{6} - 2\sqrt{2}) \times (\sqrt{6} + 2\sqrt{2})},$$

$$\text{即 } x < \sqrt{6} + 2\sqrt{2}.$$

22. 已知一个数的两个不同的平方根是 $3a+1$ 和 $a+11$ ，求这个数的立方根.

【答案】 这个数的立方根是4.

【解析】

【分析】 本题考查了平方根和立方根的定义，由题意得 $3a+1+a+11=0$ ，解得 $a=-3$ ，求出这个数是64，然后利用立方根的定义即可求解，掌握知识点的应用是解题的关键.

【详解】 解: $\because$ 一个数的两个不同的平方根是 $3a+1$ 和 $a+11$,

$$\therefore 3a+1+a+11=0, \text{ 解得: } a=-3,$$

$$\therefore \text{这个数是 } (3a+1)^2 = [3 \times (-3) + 1]^2 = 64,$$

$$\therefore \text{这个数的立方根是 } \sqrt[3]{64} = 4.$$

23. 关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - (3m-1)x + 2m-1=0$ ，其根的判别式的值为1，求 m 的值.

【答案】 m 的值为2

【解析】

【分析】 由一元二次方程的 $\Delta = b^2 - 4ac = 1$ ，建立 m 的方程，求出 m 的解即可.

【详解】 $\because mx^2 - (3m-1)x + 2m-1=0$ ，且 $m \neq 0$,

$$\therefore \Delta = [-(3m-1)]^2 - 4m \times (2m-1),$$

$$=9m^2-6m+1-8m^2+4m,$$

$$=m^2-2m+1,$$

$$\therefore \text{判别式 } \Delta=1,$$

$$\therefore m^2-2m+1=1,$$

$$\therefore m(m-2)=0,$$

$$\text{解得: } m_1=0 \text{ (舍去), } m_2=2,$$

$$\therefore m \text{ 的值为 } 2,$$

故答案为: 2.

【点睛】 本题考查了利用一元二次方程根的情况求参数, 掌握一元二次方程根的判别式是解题的关键.

24. 先化简, 后求值: $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{a-4\sqrt{ab}+4b}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}}$, 其中 $a=\frac{1}{2}$, $b=2$.

【答案】 $2\sqrt{a}-3\sqrt{b}$, $-2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算, 先根据二次根式的混合运算化简, 再代入字母的值进行计算即可求解.

【详解】 解: 原式 $= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{(\sqrt{a}-2\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}}$

$$= \sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{a}-2\sqrt{b}$$

$$= 2\sqrt{a}-3\sqrt{b}$$

当 $a=\frac{1}{2}$, $b=2$ 时,

$$\text{原式} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2} - 3\sqrt{2} = -2\sqrt{2}.$$

四、解答题 (25 题 8 分, 26 题 12 分, 共 20 分)

25. 如图 1, 由五个边长为 1 的小正方形组成的图形纸, 我们可以把它剪开拼成一个正方形.

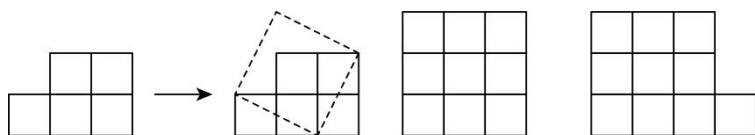


图1

图2

图3

- (1) 拼成的正方形的面积与边长分别是多少？
- (2) 你能在图 2 的 3×3 方格图中，连结四个点组成面积为 5 的正方形吗？若能，求出它的边长；若不能，请说明理由。
- (3) 你能把由十个边长为 1 的小正方形组成的图形纸，剪开并拼成正方形吗？若能，在图 3 中用虚线画出来，并求出它的边长和面积；若不能，请说明理由。

【答案】(1) 拼成的正方形的面积为 5，边长为 $\sqrt{5}$

(2) 边长为 $\sqrt{5}$

(3) 面积为 10，边长为 $\sqrt{10}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了图形的剪拼以及算术平方根的应用，正确利用算术得出边长是解题关键.

- (1) 根据五个边长为 1 的小正方形组成的图形直接得出图形面积和边长即可；
- (2) 利用勾股定理直接得出即可；
- (3) 仿照图 1 的做法得出边长和面积即可.

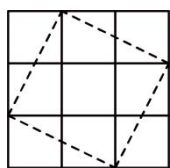
【小问 1 详解】

解：5 个小正方形拼成一个大正方形后，面积不变，所以拼成的正方形的面积是： $5 \times 1 \times 1 = 5$ ，

边长 = $\sqrt{5}$ ；

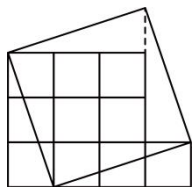
【小问 2 详解】

解：如图所示；边长为 $\sqrt{5}$ ；



【小问 3 详解】

解：能，如图所示：边长为： $\sqrt{10}$.



26. 配方法是中学数学的重要方法，用配方法可求最大（小）值. 对于任意正实数 a ， b ，可作如下变形（提示：

示： $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ）；

$$\because a+b = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 2\sqrt{ab},$$

$$\text{又} \because (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0,$$

$$\therefore (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 2\sqrt{ab} \geq 0 + 2\sqrt{ab}, \text{ 即 } a+b \geq 2\sqrt{ab}.$$

当且仅当 $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, 即 $a=b$ 时等号成立.



图1

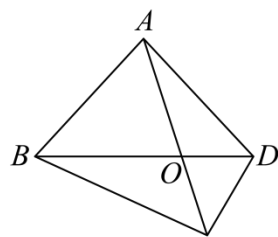


图2

(1) 若 $x > 0$, 代数式 $x + \frac{9}{x}$ 的最小值为 _____, 此时 $x =$ _____.

(2) 某园林设计师要对园林的一个区域进行设计改造, 一面利用墙体将该区域用篱笆围成中间隔有一道篱笆的矩形花圃, 如图 1 所示, 为了围成面积为 108m^2 的花圃, 所用的篱笆至少为多少米?

(3) 如图 2, 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O , $\triangle AOB$ 、 $\triangle COD$ 的面积分别为 9 和 4, 求四边形 $ABCD$ 面积的最小值.

【答案】 (1) 6; 3 (2) 所用的篱笆至少为 36 米

(3) 四边形 $ABCD$ 面积的最小值为 25

【解析】

【分析】 本题考查了实数的大小比较、完全平方公式的运用, 用配方法求最值, 理解在 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (a 、 b 均为正实数) 中, 当且仅当 a 、 b 满足 $a=b$ 时, $a+b$ 有最小值 $2\sqrt{ab}$ 是解题的关键.

本题主要考查了完全平方公式的变形在求最值中的应用, 正确理解题意并举一反三是解题关键;

(1) 依据题意, 设 $a=x$, $b=\frac{9}{x}$, 则由 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, 得 $x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{9}{x}} = 6$, 进而当且仅当 $x = \frac{9}{x}$, 即 $x=3$ 时, 代数式取到最小值, 最小值为 6, 故可得解;

(2) 设花圃的宽为 x 米, 则长为 $\frac{108}{x}$ 米, 所用的篱笆 $= 3x + \frac{108}{x}$, 据此即可求解;

(3) 设 $S_{\triangle COB} = m$, 由三角形的面积公式可知, 若两三角形底边上的高相等, 则其面积比等于底边之比, 由此可将 $S_{\triangle AOD}$ 表示出来. 写出四边形 $ABCD$ 的面积表达式, 利用题中结论求其最小值即可.

【小问 1 详解】

解：由题意，设 $a = x$, $b = \frac{9}{x}$,

$$\therefore \text{由 } a + b \geq 2\sqrt{ab}, \text{ 得 } x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{9}{x}} = 6,$$

$\therefore$ 当且仅当 $x = \frac{9}{x}$, 即 $x = 3$ (负值舍去) 时, 代数式取到最小值, 最小值为 6.

故答案为: 6; 3;

【小问 2 详解】

解：由题意，设花圃的宽为 x 米，则长为 $\frac{108}{x}$ 米，

$$\therefore \text{所用的篱笆} = 3x + \frac{108}{x},$$

$$\text{又令 } a = 3x, \quad b = \frac{108}{x},$$

$$\therefore \text{由 } a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

$$\therefore 3x + \frac{108}{x} \geq 2\sqrt{3x \cdot \frac{108}{x}} = 36.$$

$\therefore$ 当且仅当 $3x = \frac{108}{x}$, 即 $x = 6$ (负值舍去) 时, 代数式取到最小值, 最小值为 36,

答：所用的篱笆至少为 36 米.

【小问 3 详解】

解：由题意，设 $S_{\triangle COB} = m$,

$\because \triangle COB$ 与 $\triangle COD$ 底边上的高相等, $\triangle AOB$ 与 $\triangle AOD$ 底边上的高相等,

$$\therefore \frac{OB}{OD} = \frac{S_{\triangle COB}}{S_{\triangle COD}} = \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOD}},$$

$$\therefore \frac{m}{4} = \frac{9}{S_{\triangle AOD}}.$$

$$\therefore S_{\triangle AOD} = \frac{36}{m}.$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = 9 + 4 + m + \frac{36}{m} = 13 + m + \frac{36}{m}.$$

$$\text{又} \because m + \frac{36}{m} \geq 2\sqrt{m \times \frac{36}{m}} = 12,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} \geq 13 + 12 = 25,$$

$$\therefore \text{当 } m = \frac{36}{m} \text{ 时, 即 } m = 6 \text{ (负值舍去) 时取等号.}$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 面积的最小值为 25.