

青浦一中 2025 学年第一学期期中学业质量调研

初二年级数学试卷

考生注意：本卷共有 26 题，请将所有答案写在答题纸上：写在试卷上一律不计分。

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 2 分，满分 12 分）【每小题只有一个正确选项，在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂】

1. 在 2.3 , $\sqrt{2}$, $-1\frac{1}{7}$, π , $\sqrt{5}$, 0.3 , $0.0102030405060708\cdots$ (位数无限且从 1 开始不断增大的每两个连续正整数间都有一个 0) 中无理数有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了无理数的知识，理解并掌握无理数的定义和常见形式是解题关键。无理数就是无限不循环小数。初中范围内学习的无理数有： π ， 2π 等；开方开不尽的数；以及像 $0.1010010001\cdots$ 等有这样规律的数。

【详解】解：在 2.3 , $\sqrt{2}$, $-1\frac{1}{7}$, π , $\sqrt{5}$, 0.3 , $0.0102030405060708\cdots$ (位数无限且从 1 开始不断增大的每两个连续正整数间都有一个 0) 中无理数有 $\sqrt{2}$, π , $\sqrt{5}$, $0.0102030405060708\cdots$ (位数无限且从 1 开始不断增大的每两个连续正整数间都有一个 0)，共有 4 个。

故选：D。

2. 下列说法正确的是 ()

- A. 数轴上的每一个点都有一个有理数与它对应
B. 1 的平方根等于它的立方根
C. 负数没有立方根
D. $-\sqrt{13}$ 是 13 的一个平方根

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查数轴、平方根和立方根的概念，掌握相关知识是解决问题的关键。根据实数与数轴的关系、平方根和立方根的定义逐一判断各选项。

【详解】解： $\because$ 数轴上的点与实数一一对应，

∴ 选项 A 错误;

∵ 1 的平方根是 ± 1 , 立方根是 1, 两者不相等,

∴ 选项 B 错误;

∵ 负数有立方根, 且为负数,

∴ 选项 C 错误;

∵ 13 的平方根是 $\pm\sqrt{13}$,

∴ $-\sqrt{13}$ 是 13 的一个平方根, 选项 D 正确.

故选: D.

3. 下列各组二次根式中, 是最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{\frac{1}{3}}$

B. $\sqrt{x^2 + y^2}$

C. $\sqrt{x^3 y}$

D. $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查最简二次根式, 掌握相关知识是解决问题的关键. 根据最简二次根式的定义, 被开方数不含分母且不含能开得尽方的因数或因式.

【详解】解: A、 $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 根号下含有分母, 故不是最简二次根式, 本选项不符合题意;

B、 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 是最简二次根式, 本选项符合题意;

C、 $\sqrt{x^3 y}$ 根号下含有开得尽方的因式 x^2 , 故不是最简二次根式, 本选项不符合题意;

D、 $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{(x - y)^2}$, 根号下含有开得尽方的因式 $(x - y)^2$, 故不是最简二次根式, 本选项不符合题意.

∴ 选 B.

4. 下列各式中, 与 $\sqrt{a+b}$ 互为有理化因式的是 ()

A. $\sqrt{a-b}$

B. $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

C. $\sqrt{a+b}$

D. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了分母有理化, 熟练掌握两个含二次根式的代数式相乘时, 它们的积不含二次根式, 这样的两个代数式称作互为有理化因式是解题的关键.

根据有理化因式的定义进行判断即可.

【详解】解: 由题意知, 与 $\sqrt{a+b}$ 互为有理化因式的是 $\sqrt{a+b}$,

故选: C.

5. $\sqrt{(-3)^2}$ 的平方根是 ()

A. ± 3

B. 3

C. $\pm\sqrt{3}$

D. $\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了求一个数的平方根, 求一个数的平方, 解题的关键是逐步计算.

先计算根号内的平方, 得到算术平方根, 再求其平方根.

【详解】解: $\because \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$,

$\therefore \sqrt{(-3)^2}$ 的平方根是 $\pm\sqrt{3}$,

故选: C.

6. 下列等式中正确的是 ()

A. $-\sqrt{(-6)^2} = -6$

B. $(-\sqrt{6})^2 = 36$

C. $\sqrt{(-36)^2} = \pm 36$

D. $\sqrt{16\frac{1}{9}} = 4\frac{1}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查算术平方根的性质, 掌握相关知识是解决问题的关键. 利用算术平方根的性质逐项计算判断即可.

【详解】解: A: $-\sqrt{(-6)^2} = -|-6| = -6$, 故等式成立.

B: $\because (-\sqrt{6})^2 = 6$, 故错误.

C: $\because \sqrt{(-36)^2} = 36$, 故错误.

D: $\because \sqrt{16\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{145}{9}} = \frac{\sqrt{145}}{3}$, 故错误.

故选: A.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分) 【请将结果直接填入答题纸的相应位置】

7. 计算: $\sqrt[3]{0.064} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】

0.4

【解析】

【分析】 本题考查了求一个数的立方根, 计算一个数的立方等于 0.064, 得出立方根的值.

【详解】 解: 因为 $0.4^3 = 0.4 \times 0.4 \times 0.4 = 0.16 \times 0.4 = 0.064$, 所以 $\sqrt[3]{0.064} = 0.4$.

故答案为 0.4.

8. 比较大小: $-\sqrt{12}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $-3\sqrt{2}$ (填 “>” “<” 或 “=”)

【答案】>

【解析】

【分析】 本题考查了比较二次根式的大小.

先比较两个负数的绝对值, 绝对值较小的负数更大. 通过平方运算比较绝对值的大小.

【详解】 解: $\because (\sqrt{12})^2 = 12$, $(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$,

$$\therefore \sqrt{12} < 3\sqrt{2},$$

$$\therefore |-\sqrt{12}| < |-3\sqrt{2}|.$$

$$\therefore -\sqrt{12} > -3\sqrt{2},$$

故答案为>.

9. 用科学记数法表示: $-0.00001023 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -1.023×10^{-5}

【解析】

【分析】 本题考查用科学记数法表示较小的数, 一般形式为 $a \times 10^{-n}$, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

绝对值小于 1 的正数利用科学记数法表示一般形式为 $a \times 10^{-n}$, 与较大数的科学记数法不同的是其所使用的是负指数幂, 指数由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

【详解】 解: $-0.00001023 = -1.023 \times 10^{-5}$,

故答案为: -1.023×10^{-5} .

10. 若二次根式 $\sqrt{\frac{1}{2-3x}}$ 有意义, 则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x < \frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式和分式有意义的条件, 熟练掌握二次根式和分式成立的条件是解答本题的关键.

根据二次根式和分式有意义的条件求解即可.

【详解】 解: $\because$ 二次根式 $\sqrt{\frac{1}{2-3x}}$ 有意义,

$$\therefore \frac{1}{2-3x} \geq 0,$$

$$\therefore 2-3x > 0,$$

$$\text{解得: } x < \frac{2}{3},$$

$$\text{故答案为: } x < \frac{2}{3}.$$

11. 当 $x = \sqrt{3}$ 时, 二次根式 $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$ 的值为_____.

【答案】 $2 - \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的求值, 先化简二次根式, 再将字母的值代入, 即可求解.

【详解】 解: $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|.$

$$\text{当 } x = \sqrt{3} \text{ 时, } |\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}.$$

$$\text{故答案为: } 2 - \sqrt{3}.$$

12. 若最简二次根式 $\sqrt{2x-5}$ 与 $\sqrt{15-3x}$ 是同类二次根式, 则 $x =$ _____.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查了同类二次根式, 根据题意列方程 $2x-5=15-3x$, 求解即可.

【详解】 解: $\because$ 最简二次根式 $\sqrt{2x-5}$ 与 $\sqrt{15-3x}$ 是同类二次根式,

$$\therefore 2x-5=15-3x,$$

$$\text{解得 } x=4,$$

当 $x=4$ 时, $2x-5=3>0$, $15-3x=3>0$, 符合题意.

故答案为: 4.

13. 若关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2+3x+m^2-1=0$ 有一根为 0, 则 $m=$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 根据一元二次方程解的定义把 $x=0$ 代入方程求 m , 然后根据一元二次方程的定义确定满足条件的 m 的值.

【详解】 解: 把 $x=0$ 代入方程得 $m^2-1=0$, 解得 $m=\pm 1$,

而 $m-1\neq 0$,

所以 $m=-1$.

故答案是: -1.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的解: 能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解. 注意一元二次方程的定义.

14. 方程 $3x^2=4x$ 的根是_____.

【答案】 $0, \frac{4}{3}$

【解析】

【详解】 试题解析: $\because 3x^2=4x$.

$$\therefore 3x^2-4x=0.$$

$$x(3x-4)=0.$$

$$x=0, 3x-4=0.$$

$$x_1=0, x_2=\frac{4}{3}.$$

$$\text{故答案为 } x_1=0, x_2=\frac{4}{3}.$$

点睛: 一元二次方程的解法有: 直接开方法, 配方法, 公式法, 因式分解法.

本题用的是因式分解法.

15. 方程 $(1+x)^2=4$ 的根是_____.

【答案】 $x_1=1, x_2=-3$

【解析】

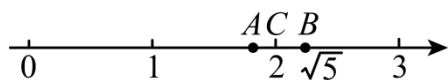
【分析】 本题考查了解一元二次方程, 通过直接开平方法求解方程.

【详解】解：方程 $(1+x)^2 = 4$ 两边开平方，得

$$1+x = \pm 2,$$

解得： $x_1 = 1$ ， $x_2 = -3$.

16. 如图所示，数轴上表示 2， $\sqrt{5}$ 的对应点分别为 C 、 B ，点 C 是 AB 的中点，则点 A 表示的数是_____ .



【答案】 $4 - \sqrt{5}$

【解析】

【分析】本题考查数轴上两点间的距离以及中点的性质，清楚数轴上两点间的距离计算方法是解题关键. 首先结合数轴，利用已知条件求出线段 BC 的长度，然后根据中点的性质即可求出点 A 表示的数.

【详解】解： $\because$ 数轴上表示 2， $\sqrt{5}$ 的对应点分别为 C 、 B ，

$$\therefore BC = \sqrt{5} - 2.$$

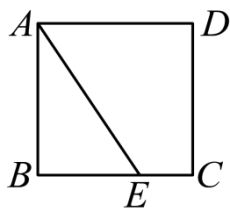
$\because$ 点 C 是 AB 的中点，

$$\therefore AC = BC = \sqrt{5} - 2,$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 表示的数为 } 2 - (\sqrt{5} - 2) = 4 - \sqrt{5},$$

故答案为： $4 - \sqrt{5}$.

17. 如图，在面积为 $3a$ 正方形 $ABCD$ 中，点 E 在 BC 上，且直角三角形 ABE 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ ，则 BE 的长为_____ . (用含有 a 的代数式表示)



【答案】 $\frac{\sqrt{6a}}{3}$

【解析】

【分析】本题考查了正方形的性质、直角三角形面积的计算、二次根式的化简，熟练掌握正方形的性质是解题的关键.

先由正方形的面积算出边长，再由直角三角形的面积公式列出等量关系式，即可求得正确答案.

【详解】解：∵正方形 $ABCD$ 的面积为 $3a$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{3a},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABE \text{ 的面积: } \frac{1}{2} \times AB \times BE = \frac{\sqrt{2}}{2} a,$$

$$\text{即: } \frac{1}{2} \times \sqrt{3a} \times BE = \frac{\sqrt{2}}{2} a,$$

$$\therefore BE = \frac{\sqrt{6a}}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{6a}}{3}.$$

18. 小明在解方程 $\sqrt{24-x} - \sqrt{8-x} = 2$ 时采用了下面的方法:

$$(\sqrt{24-x} - \sqrt{8-x})(\sqrt{24-x} + \sqrt{8-x}) = (\sqrt{24-x})^2 - (\sqrt{8-x})^2 = (24-x) - (8-x) = 16 \text{ 又有}$$

$$\sqrt{24-x} - \sqrt{8-x} = 2, \text{ 可得 } \sqrt{24-x} + \sqrt{8-x} = 8, \text{ 将这两式相加可得解 } \sqrt{24-x} = 5, \text{ 将 } \sqrt{24-x} = 5,$$

两边平方可解得 $x = -1$ ，经检验 $x = -1$ 是原方程的解. 请你学习小明的方法. 解决下列问题:

$$\text{解方程 } \sqrt{x^2 + 3x + 18} - \sqrt{x^2 + 3x + 3} = 3, \text{ 得方程的解为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $x = -1$ 或 $x = -2$

【解析】

【分析】 本题考查解无理方程，利用平方差公式将原方程转化为有理方程，再解一元二次方程并检验.

【详解】解：设 $A = x^2 + 3x + 18$ ， $B = x^2 + 3x + 3$ ，则原方程为 $\sqrt{A} - \sqrt{B} = 3$.

$$\text{计算 } (\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B = (x^2 + 3x + 18) - (x^2 + 3x + 3) = 15,$$

$$\text{代入 } \sqrt{A} - \sqrt{B} = 3, \text{ 得 } 3(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = 15, \text{ 即 } \sqrt{A} + \sqrt{B} = 5.$$

$$\text{将 } \sqrt{A} - \sqrt{B} = 3 \text{ 与 } \sqrt{A} + \sqrt{B} = 5 \text{ 相加, 得 } 2\sqrt{A} = 8, \text{ 即 } \sqrt{A} = 4,$$

$$\text{两边平方得 } x^2 + 3x + 18 = 16, \text{ 整理得 } x^2 + 3x + 2 = 0,$$

$$\text{解得 } x = -1 \text{ 或 } x = -2.$$

经检验， $x = -1$ 和 $x = -2$ 均满足原方程.

故答案为： $x = -1$ 或 $x = -2$.

三、解答题（本大题共 10 题，第 19、20、21 题每题 5 分，22、23、24、25 题每题 6 分，第 26 题 7 分，第 27 题 8 分，第 28 题 10 分）【将下列各题的解答过程，做在答题纸的相应位置上】

19. 计算: $\frac{1}{3}\sqrt{18a} - \left(3a\sqrt{\frac{2}{a}} - 8\sqrt{\frac{a}{8}}\right)$

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的加减，熟练掌握运算是解题的关键.

根据二次根式的加减运算法则，先化简再合并计算即可.

【详解】 解: $\frac{1}{3}\sqrt{18a} - \left(3a\sqrt{\frac{2}{a}} - 8\sqrt{\frac{a}{8}}\right)$

$$= \sqrt{2a} - (3\sqrt{2a} - 2\sqrt{2a})$$

$$= \sqrt{2a} - 3\sqrt{2a} + 2\sqrt{2a}$$

$$= 0.$$

20. 计算: $\sqrt{\frac{1}{6}} \times \sqrt{48} - \frac{4}{\sqrt{3}-1} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{18}}$

【答案】 $\frac{13\sqrt{2}}{6} - 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{2} - 2$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的混合运算. 掌握二次根式的混合运算是解题关键.

根据二次根式的混合运算法则计算即可.

【详解】 解: 原式 $= \sqrt{\frac{1}{6}} \times \sqrt{48} - \frac{4(\sqrt{3}+1)}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6}$

$$= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2 + \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$= \frac{13\sqrt{2}}{6} - 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{2} - 2.$$

21. 解不等式: $\sqrt{3}x - 3 > \sqrt{5}x + 1$

【答案】 $x < -2\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元一次不等式，解题关键是熟练掌握解一元一次不等式的一般步骤．按照解一元一次不等式的一般步骤进行解答即可．

【详解】 解： $\sqrt{3}x-3>\sqrt{5}x+1$ ，

$$\sqrt{3}x-\sqrt{5}x>1+3,$$

$$(\sqrt{3}-\sqrt{5})x>4,$$

$$x<\frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{5}},$$

$$x<\frac{4(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})},$$

$$x<\frac{4(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{-2},$$

$$x<-2\sqrt{3}-2\sqrt{5}.$$

22. 配方法解方程： $3x^2-6x-1=0$

【答案】 $x_1=1+\frac{2\sqrt{3}}{3}, x_2=1-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查配方法解一元二次方程．根据配方法的步骤：一除，二移，三配，四解，解方程即可．

【详解】 解： $3x^2-6x-1=0$

$$\therefore x^2-2x-\frac{1}{3}=0,$$

$$\therefore x^2-2x=\frac{1}{3},$$

$$\therefore x^2-2x+1=\frac{1}{3}+1,$$

$$\therefore (x-1)^2=\frac{4}{3},$$

$$\therefore x-1=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore x_1=1+\frac{2\sqrt{3}}{3}, x_2=1-\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

23. 解方程: $(3x-1)(x+2)=2x+4$

【答案】 $x_1=1, x_2=-2$

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程, 根据方程特点选择合适的方法求解是解题关键. 先移项, 再根据因式分解法求解即可.

【详解】 解: $(3x-1)(x+2)=2x+4$

$$(3x-1)(x+2)-2(x+2)=0$$

$$(3x-1-2)(x+2)=0$$

$$(3x-3)(x+2)=0,$$

$$\therefore 3x-3=0 \text{ 或 } x+2=0,$$

$$\therefore x_1=1, x_2=-2.$$

24. 已知 $x=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$, 求 $\frac{x^2-6x+3}{x-3}$ 的值.

【答案】 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了分式的求值, 二次根式的混合运算, 先对 x 进行分母有理化, 得到 $x=3-2\sqrt{2}$, 然后计算分子 x^2-6x+3 的值为 2, 分母 $x-3$ 的值为 $-2\sqrt{2}$, 最后求分式的值.

【详解】 解: $\because x=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{1\times(3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=\frac{3-2\sqrt{2}}{9-8}=3-2\sqrt{2},$

$$\therefore x^2=(3-2\sqrt{2})^2=9-12\sqrt{2}+8=17-12\sqrt{2},$$

$$-6x=-6(3-2\sqrt{2})=-18+12\sqrt{2},$$

$$\therefore x^2-6x+3=(17-12\sqrt{2})+(-18+12\sqrt{2})+3=2.$$

$$\text{又 } \because x-3=3-2\sqrt{2}-3=-2\sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{x^2-6x+3}{x-3}=\frac{2}{-2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

25. 先化简，再求值 $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{x-2\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ ，其中 $x=5$ ， $y=\frac{1}{5}$ 。

【答案】 $2\sqrt{x}-2\sqrt{y}$ ， $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】根据分母有理化和完全平方公式可以化简题目中的式子，然后将 x 、 y 的值代入化简后的式子即可解答本题。

【详解】解： $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{x-2\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

$$= \frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y} + \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

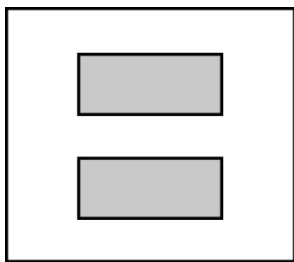
$$= \sqrt{x}-\sqrt{y} + \sqrt{x}-\sqrt{y}$$

$$= 2\sqrt{x}-2\sqrt{y},$$

当 $x=5$ ， $y=\frac{1}{5}$ 时，原式 $= 2\sqrt{5}-2\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ 。

【点睛】本题考查二次根式的化简求值、分母有理化，解答本题的关键是明确二次根式化简求值的方法。

26. 如图，某小区内有一块长方形广场，广场长为 $2\sqrt{108}$ 米，宽为 $2\sqrt{98}$ 米，广场中间有两块大小相同的小长方形绿地（阴影部分），每块小长方形绿地的长为 $(2\sqrt{13}+3)$ 米，宽为 $(2\sqrt{13}-3)$ 米。



(1) 求广场的周长；

(2) 除绿地部分，广场其它部分都要铺上地砖，已知铺地砖的费用为 50 元/平方米，求这个广场铺地砖的费用。

【答案】 (1) $(24\sqrt{3}+28\sqrt{2})$ 米；

(2) $(8400\sqrt{6}-4300)$ 元；

【解析】

【分析】 本题考查根式的混合运算的应用，正确掌握相关性质内容是解题的关键.：

(1) 根据长方形的周长公式列式求解即可得到答案；

(2) 先用大长方形面积减去小长方形的面积，再乘以单价即可得到答案；

【小问 1 详解】

解：由题意可得，

$$\text{广场的周长为：} 2(2\sqrt{108} + 2\sqrt{98}) = 4(6\sqrt{3} + 7\sqrt{2}) = 24\sqrt{3} + 28\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{广场的周长为 } (24\sqrt{3} + 28\sqrt{2}) \text{ 米；.}$$

【小问 2 详解】

解：铺地砖的面积为：

$$2\sqrt{108} \times 2\sqrt{98} - 2 \times (2\sqrt{13} + 3) \times (2\sqrt{13} - 3) = 12\sqrt{3} \times 14\sqrt{2} - 2 \times (52 - 9) = 168\sqrt{6} - 86 \quad (\text{平方米}),$$

$$\therefore \text{这个广场铺满地砖的费用为：} (168\sqrt{6} - 86) \times 50 = 8400\sqrt{6} - 4300 \quad (\text{元}).$$

27. 阅读下面的例题：解方程 $x^2 - |x| - 2 = 0$.

解：当 $x \geq 0$ 时，原方程化为 $x^2 - x - 2 = 0$,

解得： $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ (不合题意，舍去)，

当 $x < 0$ 时，原方程化为 $x^2 + x - 2 = 0$,

解得： $x_1 = 1$, (不合题意，舍去) $x_2 = -2$,

$\therefore$ 原方程的根是 $x_1 = 2$, $x_2 = -2$,

请参照例题解方程： $2x^2 - 3|x-1| - 2 = 0$.

【答案】 $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{5}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程解法、解含绝对值的方程. 参照例题方法，根据绝对值内表达式 $x-1$ 的符号分情况讨论，转化为一元二次方程求解，并验证解是否符合取值范围.

【详解】 解：①当 $x-1 \geq 0$ 时，即 $x \geq 1$,

原方程化为 $2x^2 - 3(x-1) - 2 = 0$,

$$\text{解得 } x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1$$

$\therefore x \geq 1$,

$\therefore x_1 = \frac{1}{2}$ 不合题意, 舍去; $x_2 = 1$ 符合题意,

②当 $x-1 < 0$ 时, 即 $x < 1$,

原方程化为 $2x^2 - 3(1-x) - 2 = 0$,

解得 $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{5}{2}$,

$\therefore x < 1$,

$\therefore x_1 = 1$ 不合题意, 舍去; $x_2 = -\frac{5}{2}$ 符合题意,

$\therefore$ 原方程的根是 $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{5}{2}$.

28. 配方法是中学数学的重要方法, 用配方法可求最大(小)值. 对于任意正实数 a , b , 可作如下变形(提示:

示: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$)

$$\therefore a+b = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 2\sqrt{ab},$$

$$\text{又} \because (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0,$$

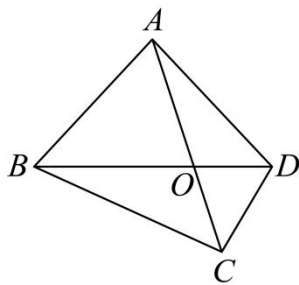
$$\therefore (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 2\sqrt{ab} \geq 0 + 2\sqrt{ab}, \text{ 即 } a+b \geq 2\sqrt{ab}.$$

当且仅当 $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, 即 $a=b$ 时等号成立.

(1) 若 $x > 0$, 代数式 $x + \frac{16}{x}$ 的最小值为_____, 此时 $x =$ _____.

(2) 某园林设计师用篱笆围一个面积为 81 平方米的长方形花圃, 所用的篱笆至少为多少米?

(3) 如图, 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O , $\triangle AOB$ 、 $\triangle COD$ 的面积分别为 12 和 3, 求四边形 $ABCD$ 面积的最小值.



【答案】(1) 8, 4 (2) 36

(3) 27

【解析】

【分析】 本题主要考查了完全平方公式的变形, 分式求最值, 算术平方根, 正确理解题意并举一反三是解题关键.

(1) 依据题意, 设 $a=x, b=\frac{16}{x}$, 则由 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, 得 $x+\frac{16}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{16}{x}}=8$, 进而当且仅当 $x=\frac{16}{x}$, 即 $x=4$ 时, 代数式取到最小值, 最小值为 8, 故可得解;

(2) 设花圃的宽为 x 米, 则长为 $\frac{81}{x}$ 米, 所用的围栏 $=2\left(x+\frac{81}{x}\right)$, 据此即可求解;

(3) 设 $S_{\triangle COB}=m$, 由三角形的面积公式可知, 若两三角形底边上的高相等, 则其面积比等于底边之比, 由此可将 $S_{\triangle AOD}$ 表示出来. 写出四边形 $ABCD$ 的面积表达式, 利用题中结论求其最小值即可.

【小问 1 详解】

解: (1) 由题意, 设 $a=x, b=\frac{16}{x}$, 且 $x>0$,

由 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$,

$$\text{得 } x+\frac{16}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{16}{x}}=8,$$

$\therefore$ 当且仅当 $x=\frac{16}{x}$, 即 $x=4$ 时, 代数式取到最小值, 最小值为 8.

故答案为: 8, 4;

【小问 2 详解】

解: 由题意, 设花圃的宽为 x 米, 则长为 $\frac{81}{x}$ 米,

$$\therefore \text{所用的围栏} = 2\left(x+\frac{81}{x}\right),$$

$$\therefore 2\left(x+\frac{81}{x}\right) \geq 2 \times 2 \cdot \sqrt{x \cdot \frac{81}{x}} = 4 \times 9 = 36.$$

$\therefore$ 当且仅当 $x=\frac{81}{x}$, 即 $x=9$ 时, 代数式取到最小值, 最小值为 36,

答: 所用的围栏至少为 36 米.

【小问 3 详解】

由题意, 设 $S_{\triangle COB}=m$,

$\because \triangle COB$ 与 $\triangle COD$ 底边上的高相等, $\triangle AOB$ 与 $\triangle AOD$ 底边上的高相等,

$$\therefore \frac{OB}{OD} = \frac{S_{\triangle COB}}{S_{\triangle COD}} = \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOD}},$$

$$\therefore \frac{m}{3} = \frac{12}{S_{\triangle AOD}}.$$

$$\therefore S_{\triangle AOD} = \frac{36}{m}.$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = 3 + 12 + m + \frac{36}{m} = 15 + m + \frac{36}{m}.$$

$$\text{又} \because m + \frac{36}{m} \geq 2\sqrt{m \times \frac{36}{m}} = 12,$$

$$\therefore \text{当 } m = \frac{36}{m} \text{ 时, 即 } m = 6 \text{ 时取等号,}$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} \geq 15 + 12 = 27.$$

四边形 $ABCD$ 面积的最小值存在, 最小值为 27.