

## 2025-2026 学年上海市嘉定区八年级（上）期中数学试卷

一、选择题：本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 下列说法正确的是( )

- A. 4 的平方根是  $\pm 2$       B. 8 的立方根是  $\pm 2$       C.  $-27$  没有立方根      D. 9 的平方根是 3

2. 在下列各式中，是最简二次根式的是( )

- A.  $\sqrt{18}$       B.  $\sqrt{\frac{a}{2}}$       C.  $\sqrt{a^2 + 4a^4}$       D.  $\sqrt{a^2 - b^2}$

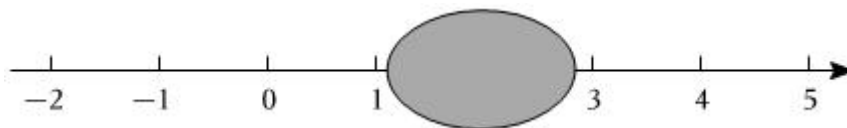
3. 近年来我国芯片技术突飞猛进，某品牌手机自主研发的最新型号芯片，其晶体管栅极的宽度为  $0.00000014$  米，将数据“ $0.00000014$ ”用科学记数法表示为( )

- A.  $1.4 \times 10^{-8}$       B.  $1.4 \times 10^{-7}$       C.  $0.14 \times 10^{-6}$       D.  $1.4 \times 10^{-9}$

4. 下列二次根式中，与  $\sqrt{2}$  不是同类二次根式的是( )

- A.  $\sqrt{8}$       B.  $\sqrt{12}$       C.  $\sqrt{18}$       D.  $\sqrt{\frac{1}{2}}$

5. 如图，数轴的一部分被阴影覆盖了，则被阴影覆盖的数可能是( )



- A.  $-\sqrt{3}$       B.  $\sqrt{7}$       C.  $\sqrt{11}$       D. 以上都不对

6. 若关于  $x$  的方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  满足  $a - b + c = 0$ , 称此方程为“贺岁”方程. 已知方程  $a^2x^2 - 2024ax + 1 = 0 (a \neq 0)$  是“贺岁”方程，则  $a^2 + 2025a - \frac{a}{2024a+1}$  的值为( )

- A.  $-2024$       B.  $2024$       C.  $-2025$       D.  $2025$

二、填空题：本题共 12 小题，每小题 2 分，共 24 分。

7. 比较大小： $\sqrt{3}$  \_\_\_\_\_ 2 (填“<”，“=”或“>”).

8. 在实数  $\frac{22}{7}$ ,  $-\sqrt{6}$ ,  $\sqrt[3]{9}$ ,  $0$ ,  $\pi$ ,  $\sqrt{25}$  中是无理数的有 \_\_\_\_\_ 个.

9. 将  $0.\dot{1}2\dot{3}$  化成分数： $0.\dot{1}2\dot{3} = \underline{\hspace{1cm}}$ .

10. 一个正数的两个不同的平方根为  $2a + 1$  和  $5 - a$ , 则  $a = \underline{\hspace{1cm}}$ .

11. 若二次根式  $\frac{\sqrt{x+1}}{2x-1}$  在实数范围内有意义，则  $x$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.

12. 写出  $\sqrt{2a-b}$  的一个有理化因式，这个有理化因式可以是 \_\_\_\_\_.

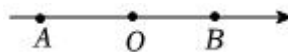
13. 不等式  $\sqrt{2}x < x + 1$  的解集是\_\_\_\_\_.

14. 如果  $a + \sqrt{a^2 - 6a + 9} = 3$  成立, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

15. 已知  $\sqrt{2.14} = 1.463, \sqrt{21.4} = 4.626, \sqrt[3]{0.214} = 0.5981, \sqrt[3]{2.14} = 1.289$ , 则 214 的立方根是\_\_\_\_\_.

16. 关于  $x$  的方程  $(a + 1)x^{a^2+1} - 3x - 1 = 0$  是一元二次方程, 则  $a$  的值是\_\_\_\_\_.

17. 如图, 点  $A$  在数轴的负半轴, 点  $B$  在数轴的正半轴, 且点  $A$  对应的数是  $x - 1$ ,



点  $B$  对应的数是  $x^2 + x$ , 已知  $AB = 5$ , 则  $x$  的值为\_\_\_\_\_.

18. 二次根式除法可以这样做: 如果  $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 7 + 4\sqrt{3}$ . 像这样通过分子、分母同乘一个式子把分母中的根号化去或者把根号中的分母化去, 叫做分母有理化. 有下列结论:

① 将式子  $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$  进行分母有理化, 可以对其分子、分母同时乘以  $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ ;

② 若  $a$  是  $\sqrt{2}$  的小数部分, 则  $\frac{3}{a}$  的值为  $\sqrt{2} + 1$ ;

③ 比较两个二次根式的大小:  $\frac{1}{\sqrt{6}-2} > \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ ;

④ 计算:  $\frac{2}{3+\sqrt{3}} + \frac{2}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} + \frac{2}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}} + \cdots + \frac{2}{99\sqrt{97}+97\sqrt{99}} = 1 - \frac{\sqrt{11}}{33}$ .

以上结论正确的是\_\_\_\_\_. (写出所有正确的序号)

三、计算题: 本大题共 1 小题, 共 6 分。

19. 用配方法解方程:  $2x^2 - 4x - 1 = 0$ .

四、解答题: 本题共 8 小题, 共 52 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

20. (本小题 5 分)

计算:  $\sqrt{12} + \sqrt{20} + \sqrt{2} \times \sqrt{24} - \sqrt{5}$ .

21. (本小题 5 分)

计算:  $(\sqrt{5} - 1)^2 + \frac{4}{\sqrt{5} + 3}$ .

22. (本小题 5 分)

计算:  $\sqrt{xy} \div \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y} + \sqrt{2xy} \div \sqrt{\frac{1}{2x}}$ .

23. (本小题 5 分)

解方程:  $\sqrt{2}(x - 1)^2 + \sqrt{3}(1 - x) = 0$ .

24. (本小题 6 分)

当  $a = \frac{2}{3}$  时, 化简代数式  $\frac{a-1}{\sqrt{a-1}} + \sqrt{\frac{a^2+1}{a}} - 2$ , 并求值.

25.(本小题 8 分)

任务：实践小组成员利用两块相同的长方形木板各切割两个正方形木板.

操作：甲组成员的切割方式如图 1 所示，正方形①(一边  $BC$  与长方形边重合)的面积为  $27\text{cm}^2$ ，正方形②(三边与长方形边重合)的面积为  $75\text{cm}^2$ ， $AB = 2\text{cm}$ .乙组成员的切割方式如图 2 所示，从长方形木板上切下两块完全相同的最大的正方形木板③④.

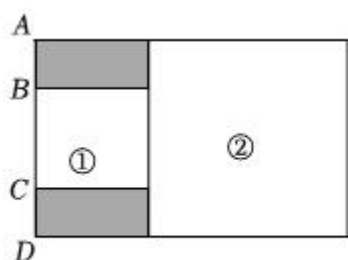


图1

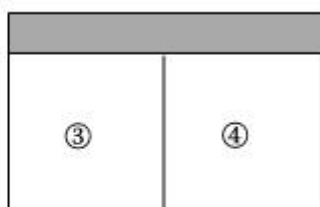


图2

(1)求图 1 中  $CD$  的长.

(2)求图 2 中剩余部分(阴影)的面积 $S$ .

26.(本小题 8 分)

学习了 $\sqrt{a^2} = |a|$ 后，数学老师出了一道化简题： $a + \sqrt{(1-a)^2} (a > 1)$ .下面是小亮和小芳的解答过程.

小亮：解：原式 $= a + 1 - a = 1$ ;

小芳：解：原式 $= a + |1 - a|$ ,  $\because a > 1$ ,  $\therefore$ 原式 $= a + a - 1 = 2a - 1$ .

(1)\_\_\_\_\_的解法是正确的;

(2)化简： $(\sqrt{ab} - \sqrt{\frac{b}{a}}) \cdot \sqrt{ab}$ , 其中 $a < 0$ ,  $b < 0$ .

27.(本小题 10 分)

综合与实践：阅读材料，并解决以下问题.

(1)学习研究：北师大版教材九年级上册第 39 页介绍了我国数学家赵爽在其所著的《勾股圆方图注》中关于一元二次方程的几何解法：以 $x^2 + 2x - 35 = 0$ 为例，求解过程如下：

①变形：将方程 $x^2 + 2x - 35 = 0$ 变形为 $x(x + 2) = 35$ ;

②构图：画四个长为 $x + 2$ ，宽为 $x$ 的矩形，按如图(1)所示构造一个“空心”大正方形;

③解答：则图中大正方形的面积从整体看可表示为 $(x + x + 2)^2$ ，从局部看还可表示为四个矩形与中间小正方形面积之和，即 $4x(x + 2) + 2^2 = 4 \times 35 + 4 = 144$ ，因此，可得新的一元二次方程 $(x + x + 2)^2 = 144$ ， $\therefore x$ 表示边长， $\therefore 2x + 2 = 12$ ，即 $x = 5$ .

这种数形结合方法虽然只能得到原方程的其中一个正根.但是从新方程 $(x + x + 2)^2 = 144$ 可以得到原方程的另一个根是\_\_\_\_\_.

(2)类比迁移：根据赵爽几何解法的方法求解方程 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 的一个正根(写出完整的求解过程，并在画图区画出示意图、标明各边长).



画图区

(3)拓展应用：一般地对于形如： $x^2 + ax + b = 0$ 一元二次方程可以构造图(2)来解，已知图 2 是由四个面积为 3 的相同矩形构成，中间围成的正方形面积为 4.那么 $a =$ \_\_\_\_\_,  $b =$ \_\_\_\_\_, 方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的一个正根为\_\_\_\_\_.

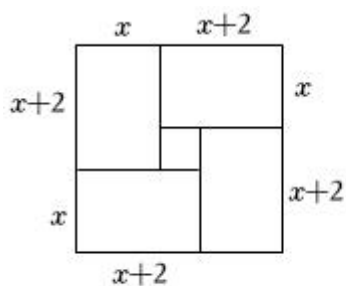


图 (1)

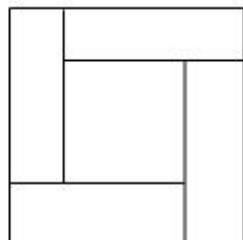


图 (2)

---

## 答案和解析

### 1. 【答案】A

【解析】解：A、4的平方根是 $\pm 2$ ，故A正确；

B、8的立方根是2，故B错误；

C、 $-27$ 的立方根是 $-3$ ，故C错误；

D、9的平方根是 $\pm 3$ ，故D错误；

故选：A.

根据平方根和立方根的定义进行选择即可.

本题考查了平方根和立方根的定义，熟练掌握平方根和立方根的定义是解题的关键.

### 2. 【答案】D

【解析】解：A.  $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ，不是最简二次根式，故本选项不符合题意；

B.  $\sqrt{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{2a}}{2}$ ，不是最简二次根式，故本选项不符合题意；

C.  $\sqrt{a^2 + 4a^4} = |a|\sqrt{1 + 4a^2}$ ，不是最简二次根式，故本选项不符合题意；

D.  $\sqrt{a^2 - b^2}$ 是最简二次根式，故本选项符合题意.

故选：D.

根据最简二次根式的定义逐个判断即可.

本题考查了最简二次根式的定义，能熟记最简二次根式的定义是解此题的关键，满足以下两个条件的二次根式是最简二次根式，①被开方数中的因数是整数，因式是整式，②被开方数中不含有能开得尽方的因数和因式.

### 3. 【答案】B

【解析】解： $0.00000014 = 1.4 \times 10^{-7}$ .

故选：B.

科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， $n$ 为整数. 确定 $n$ 的值时，要看把原数变成 $a$ 时，小数点移动了多少位， $n$ 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 $\geq 10$ 时， $n$ 是正数；当原数的绝对值 $< 1$ 时， $n$ 是负数.

此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， $n$ 为整数，表示时关键要正确确定 $a$ 的值以及 $n$ 的值.

### 4. 【答案】B

【解析】解：A、 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ， $2\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式，故此选项不符合题意；

B、 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ， $2\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式，故此选项符合题意；

C、 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ， $3\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式，故此选项不符合题意；

D、 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式，故此选项不符合题意；

故选：B.

先化简，再根据同类二次根式的定义判断即可.

本题考查了同类二次根式，二次根式化成最简二次根式后，被开方数相同的二次根式叫做同类二次根式.

#### 5. 【答案】B

【解析】解：根据图中阴影部分可知，这个无理数在 1 到 3 之间，由题意可得：

$$\because -2 < -\sqrt{3} < -1,$$

$$\therefore 2 < \sqrt{7} < 3,$$

$$\sqrt{11} > 3,$$

$\therefore$ 被阴影覆盖的可能是 $\sqrt{7}$ .

故选：B.

根据图中阴影部分可知，这个无理数在 1 到 3 之间，结合选项进行排除即可.

本题主要考查的是估算无理数的大小，根据平方根的定义，对选项中的无理数进行正确的估算是解决本题的关键.

#### 6. 【答案】C

【解析】解：根据题意得“贺岁”方程的一个解为 $x = -1$ ,

$\therefore$ 方程 $a^2x^2 - 2024ax + 1 = 0 (a \neq 0)$ 是“贺岁”方程，

$$\therefore a^2 + 2024a + 1 = 0, \text{ 即 } a^2 + 2024a = -1, 2024a + 1 = -a^2,$$

$$\therefore \text{原式} = (a^2 + 2024a) + a - \frac{a}{2024a + 1}$$

$$= (a^2 + 2024a) + \frac{2024a^2 + a}{2024a + 1} - \frac{a}{2024a + 1}$$

$$= (a^2 + 2024a) + \frac{2024a^2}{2024a + 1}$$

$$= -1 + \frac{2024a^2}{-a^2}$$

$$= -1 - 2024$$

$$= -2025.$$

故选：C.

利用新定义得到“贺岁”方程的一个解为 $x = -1$ ，则 $a^2 + 2024a + 1 = 0$ ，即 $a^2 + 2024a = -1$ 、 $2024a + 1 = -a^2$ ，然后对原式变形后再整体代入计算即可.

本题考查一元二次方程的解、代数式求值等知识点，掌握整体代入的方法是解题的关键.

7. 【答案】<

【解析】解：∵  $2 = \sqrt{2^2} = \sqrt{4}$ ,

$$\therefore \sqrt{3} < 2,$$

故答案为：<.

求出  $2 = \sqrt{4}$ ，根据 $\sqrt{4} > \sqrt{3}$ 即可求出答案.

本题考查了实数的大小比较的应用，关键是求出  $2 = \sqrt{4}$ ，题目比较典型，难度不大.

8. 【答案】3

【解析】解： $\frac{22}{7}$ 是分数，0， $\sqrt{25} = 5$ 是整数，它们均为有理数；

$-\sqrt{6}$ ， $\sqrt[3]{9}$ ， $\pi$ 都是无限不循环小数，它们均为无理数；

综上，无理数的个数为 3 个，

故答案为：3.

整数和分数统称为有理数，无理数即无限不循环小数，据此进行判断即可.

本题考查无理数的识别，算术平方根和立方根，熟练掌握相关定义是解题的关键.

9. 【答案】 $\frac{41}{333}$

【解析】解：设  $0.\dot{1}2\dot{3} = x$ ，则  $123.\dot{1}2\dot{3} = 1000x$ ，

$$\therefore 1000x - x = 123.\dot{1}2\dot{3} - 0.\dot{1}2\dot{3},$$

$$\text{即 } 999x = 123,$$

$$\therefore x = \frac{41}{333}$$

$$\therefore 0.\dot{1}2\dot{3} = \frac{41}{333}.$$

故答案为： $\frac{41}{333}$ .

设  $0.\dot{1}2\dot{3} = x$ ，则  $123.\dot{1}2\dot{3} = 1000x$ ，即可得方程  $1000x - x = 123$ ，解一元一次方程即可.

本题考查一元一次方程的应用，列出准确的一元一次方程是解题的关键.

---

10. 【答案】  $-6$

【解析】解：由题可知，

$$2a + 1 + 5 - a = 0,$$

解得  $a = -6$ .

故答案为：  $-6$ .

根据平方根的定义进行解题即可.

本题考查平方根，熟练掌握相关的知识点是解题的关键.

11. 【答案】  $x \geq -1$  且  $x \neq \frac{1}{2}$

【解析】解：由题意得：  $x + 1 \geq 0$  且  $2x - 1 \neq 0$ ,

解得：  $x \geq -1$  且  $x \neq \frac{1}{2}$ .

故答案为：  $x \geq -1$  且  $x \neq \frac{1}{2}$ .

根据二次根式的被开方数是非负数、分母不为零列出不等式组，解不等式组得到答案.

本题考查的是二次根式有意义的条件，熟记二次根式的被开方数是非负数、分母不为零是解题的关键.

12. 【答案】  $2\sqrt{2a-b}$  (答案不唯一)

【解析】解：  $\because \sqrt{2a-b} \cdot 2\sqrt{2a-b} = 2(2a-b)$ ,

$\therefore 2\sqrt{2a-b}$  为  $\sqrt{2a-b}$  的一个有理化因式.

故答案为：  $2\sqrt{2a-b}$ . (答案不唯一)

根据有理化因式的定义求解.

本题考查了二次根式的性质与化简，理解有理化因式的定义是解决问题的关键.

13. 【答案】  $x < \sqrt{2} + 1$

【解析】解：  $\sqrt{2}x < x + 1$

$$\sqrt{2}x - x < 1,$$

$$(\sqrt{2} - 1)x < 1,$$

$$x < \sqrt{2} + 1.$$

故答案为：  $x < \sqrt{2} + 1$ .

移项，合并同类项，系数化为 1 即可求解.

本题考查的是解一元一次不等式，熟知不等式的基本性质是解答此题的关键.

---

14. 【答案】  $a \leq 3$

【解析】解：  $a + \sqrt{a^2 - 6a + 9} = 3$ ,

则  $a + |a - 3| = 3$ ,

只有当  $a \leq 3$  时,  $a + 3 - a = 3$ ,

故  $a$  的取值范围是  $a \leq 3$ .

根号里的是  $(a - 3)^2$ , 要使  $a + \sqrt{a^2 - 6a + 9} = 3$  成立, 则  $a + |a - 3| = 3$ , 根据绝对值的定义可知.

本题主要考查了根式的定义和绝对值的定义.

15. 【答案】 5.981

【解析】解：  $\because \sqrt[3]{0.214} = 0.5981$ ,

$\therefore 214$  的立方根, 即  $\sqrt[3]{214} = 5.981$ ,

故答案为: 5.981.

根据立方根的性质: 被开立方数的小数点向左(或向右)移动三位, 那么其立方根的小数点向左(或向右)移动一位即可求得答案.

本题考查立方根, 算术平方根, 熟练掌握其性质是解题的关键.

16. 【答案】 1

【解析】解:  $x$  的方程  $(a + 1)x^{a^2+1} - 3x - 1 = 0$  是一元二次方程,

$\therefore a^2 + 1 = 2$ ,

$\therefore a = \pm 1$ ,

$\because a + 1 \neq 0$ ,

$\therefore a = 1$ .

故答案为: 1.

根据一元二次方程的定义, 令二次项次数为 2, 二次项系数不等于 0, 解答即可.

本题考查了一元二次方程的概念. 只有一个未知数且未知数最高次数为 2 的整式方程叫做一元二次方程, 一般形式是  $ax^2 + bx + c = 0$  (且  $a \neq 0$ ). 特别要注意  $a \neq 0$  的条件. 这是在做题过程中容易忽视的知识点.

17. 【答案】 -2

【解析】解:  $\because$  点  $A$  对应的数是  $x - 1$ , 点  $B$  对应的数是  $x^2 + x$ , 已知  $AB = 5$ ,

$\therefore x^2 + x - (x - 1) = 5$ ,

$x^2 - 4 = 0$ ,

$(x - 2)(x + 2) = 0$ ,

$$x = 2 \text{ 或 } x = -2,$$

∵点  $A$  在数轴的负半轴, 点  $B$  在数轴的正半轴,

$$x = -2,$$

故答案为:  $-2$ .

根据数轴知识, 两点间的距离解答.

本题考查了数轴, 两点间的距离, 解题的关键是掌握数轴知识和两点间的距离的定义.

#### 18. 【答案】①③④

【解析】解: 利用平方差公式将二次根式分母有理化得:

①  $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = 5 - 2 = 3$ , 故将式子  $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$  进行分母有理化, 可以对其分子、分母同时乘以  $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ , 故①正确;

② ∵  $a$  是  $\sqrt{2}$  的小数部分,

$$\therefore a = \sqrt{2} - 1,$$

$$\therefore \frac{3}{a} = \frac{3}{\sqrt{2} - 1} = \frac{3(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = 3(\sqrt{2} + 1), \text{ 故②错误;}$$

$$\text{③} \because \frac{1}{\sqrt{6} - 2} = \frac{\sqrt{6} + 2}{(\sqrt{6} - 2)(\sqrt{6} + 2)} = \frac{\sqrt{6} + 2}{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore (\sqrt{6} + 2)^2 > (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{6} + 2}{2} > \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{6} - 2} > \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}, \text{ 故③正确;}$$

$$\begin{aligned} \text{④} & \frac{2}{3 + \sqrt{3}} + \frac{2}{5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}} + \frac{2}{7\sqrt{5} + 5\sqrt{7}} + \cdots + \frac{2}{99\sqrt{97} + 97\sqrt{99}} \\ &= \frac{2(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} + \frac{2(5\sqrt{3} - 3\sqrt{5})}{(5\sqrt{3} + 3\sqrt{5})(5\sqrt{3} - 3\sqrt{5})} + \frac{2(7\sqrt{5} - 5\sqrt{7})}{(7\sqrt{5} + 5\sqrt{7})(7\sqrt{5} - 5\sqrt{7})} + \cdots + \frac{2(99\sqrt{97} - 97\sqrt{99})}{(99\sqrt{97} + 97\sqrt{99})(99\sqrt{97} - 97\sqrt{99})} \\ &= (1 - \frac{\sqrt{3}}{3}) + (\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{5}}{5}) + (\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{7}}{7}) + \cdots + (\frac{\sqrt{97}}{97} - \frac{\sqrt{99}}{99}) \\ &= 1 - \frac{\sqrt{99}}{99}, \text{ 故④正确;} \end{aligned}$$

综上, ①③④正确.

故答案为: ①③④.

①类比示例, 利用分式的基本性质进行分母有理化;

②估计无理数的整数部分, 求出小数部分  $a = \sqrt{2} - 1$ , 进而分母有理化进行化简;

③通过分母有理化，比较两个二次根式的大小；

④通过分母有理化找到题中无理式求和的运算规律，从而化简求出值.

本题考查利用分式的基本性质、平方差公式进行分母有理化.

19. 【答案】解：  $2x^2 - 4x - 1 = 0$ ,

$$2x^2 - 4x = 1,$$

$$x^2 - 2x = \frac{1}{2},$$

$$\text{配方得： } x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{2} + 1,$$

$$(x - 1)^2 = \frac{3}{2},$$

$$\text{开方得： } x - 1 = \pm \sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$\text{解得： } x_1 = \frac{2+\sqrt{6}}{2}, \quad x_2 = \frac{2-\sqrt{6}}{2}.$$

【解析】用配方法解一元二次方程即可.

本题考查了解一元二次方程，能正确配方是解此题的关键.

20. 【答案】  $6\sqrt{3} + \sqrt{5}$ .

$$\begin{aligned} \text{【解析】解：原式} &= 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{3} - \sqrt{5} \\ &= 6\sqrt{3} + \sqrt{5}. \end{aligned}$$

先算乘法，把二次根式化为最简二次根式，再合并同类二次根式.

本题考查二次根式混合运算，解题的关键是掌握相关的运算法则.

$$\begin{aligned} 21. \text{【答案】解：原式} &= 5 - 2\sqrt{5} + 1 + \frac{4(\sqrt{5}-3)}{-4} \\ &= 6 - 2\sqrt{5} - \sqrt{5} + 3 \\ &= 9 - 3\sqrt{5}. \end{aligned}$$

【解析】先利用完全平方公式和二次根式的运算法则，然后合并即可.

本题考查了二次根式的混合运算，熟练掌握二次根式的运算法则是解决问题的关键.

22. 【答案】  $3x\sqrt{y} - y\sqrt{x}$ .

$$\begin{aligned} \text{【解析】解：原式} &= \sqrt{xy} \div \frac{\sqrt{x+\sqrt{y}}}{(\sqrt{x+\sqrt{y}})(\sqrt{x-\sqrt{y}})} + \sqrt{2xy} \times \sqrt{2x} \\ &= \sqrt{xy} \times \frac{(\sqrt{x+\sqrt{y}})(\sqrt{x-\sqrt{y}})}{\sqrt{x+\sqrt{y}}} + 2x\sqrt{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + 2x\sqrt{y} \\
 &= x\sqrt{y} - y\sqrt{x} + 2x\sqrt{y} \\
 &= 3x\sqrt{y} - y\sqrt{x}.
 \end{aligned}$$

利用二次根式的性质和因式分解的方法得到  $x - y = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ ，再把除法化为乘法，然后约分即可求解.

本题考查了二次根式的混合运算，掌握运算法则是解题的关键.

23. 【答案】解:  $\sqrt{2}(x-1)^2 + \sqrt{3}(1-x) = 0$ ,

整理, 得  $\sqrt{2}(x-1)^2 - \sqrt{3}(x-1) = 0$ ,

提公因式, 得  $(x-1)[\sqrt{2}(x-1) - \sqrt{3}] = 0$ ,

$(x-1)(\sqrt{2}x - \sqrt{2} - \sqrt{3}) = 0$ ,

$\therefore x_1 = 1, x_2 = \frac{2+\sqrt{6}}{2}$ .

【解析】根据因式分解法求解一元二次方程即可.

本题考查了求解一元二次方程, 解决本题的关键是掌握提公因式法和十字相乘法求解.

24. 【答案】解:  $\frac{a-1}{\sqrt{a-1}} + \sqrt{\frac{a^2+1}{a} - 2}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\sqrt{a+1})(\sqrt{a-1})}{\sqrt{a-1}} + \sqrt{\frac{a^2+1-2a}{a}} \\
 &= \sqrt{a+1} + \sqrt{\frac{(a-1)^2}{a}},
 \end{aligned}$$

当  $a = \frac{2}{3}$  时, 原式  $= \sqrt{\frac{2}{3}} + 1 + \sqrt{\frac{(\frac{2}{3}-1)^2}{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + 1$ .

【解析】先化简所求式子, 再将  $a$  的值代入化简后的式子计算即可.

本题考查二次根式的化简求值, 熟练掌握运算法则是解答本题的关键.

25. 【答案】CD 的长为  $(2\sqrt{3}-2)\text{cm}$ ;

$S = 24\text{cm}^2$

【解析】(1)  $\because$  小正方形①(一边  $BC$  与长方形边重合)的面积为  $27\text{cm}^2$ , 小正方形②(三边与长方形边重合)的面积为  $75\text{cm}^2$ ,

$\therefore$  小正方形①的边长  $BC = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}(\text{cm})$ , 小正方形②的边长  $AD = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}(\text{cm})$ ,

$\therefore AB = 2\text{cm}$ ,

$$\therefore CD = AD - AB - BC = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 2 = (2\sqrt{3} - 2)cm,$$

$$\therefore CD \text{ 的长为 } (2\sqrt{3} - 2)cm;$$

$$(2) \text{ 由 } (1) \text{ 知大长方形的长为 } 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 8\sqrt{3}cm, \text{ 宽为 } 5\sqrt{3}cm,$$

$$\therefore \text{大长方形的面积为 } = 8\sqrt{3} \times 5\sqrt{3} = 120(cm^2),$$

$\therefore$  从长方形木板上切下两块完全相同的最大的正方形木板③④,

$$\therefore \text{切下两块完全相同的最大的正方形边长为 } 8\sqrt{3} \div 2 = 4\sqrt{3}(cm),$$

$$\therefore \text{切下两块完全相同的最大的正方形面积为 } 2 \times (4\sqrt{3})^2 = 2 \times 48 = 96(cm^2),$$

$$\therefore \text{图 2 中剩余部分 (阴影) 的面积 } S = 120 - 96 = 24(cm^2).$$

(1) 根据小正方形的面积, 可求出边长, 然后计算线段的和差即可得解;

(2) 先求出大长方形的长面积, 再求出小正方形的面积, 然后进行计算即可得解.

本题主要考查了二次根式混合运算的实际应用, 熟练掌握二次根式混合运算的运算顺序和运算法则并能正确根据图形, 得出数量关系是解决此题的关键.

26. 【答案】小芳  $ab + b$

$$\text{【解析】} (1) \text{ 当 } a > 1 \text{ 时, } a + \sqrt{(1-a)^2} = a + |1-a| = a + a - 1 = 2a - 1,$$

所以小芳的解法正确.

故答案为: 小芳;

$$(2) \text{ 原式} = \sqrt{(ab)^2} - \sqrt{\frac{b}{a} \cdot ab}$$

$$= |ab| - |b|,$$

$$\because a < 0, b < 0,$$

$$\therefore \text{原式} = ab + b.$$

(1) 利用二次根式的性质得到  $a + \sqrt{(1-a)^2} = a + |1-a|$ , 然后根据  $a$  的范围去绝对值后合并得到原式  $= 2a - 1$ , 从而可判断小芳的解法正确;

(2) 先根据二次根式的乘法法则运算, 再根据二次根式的性质计算, 然后根据  $a$ 、 $b$  的取值范围去绝对值即可.

本题考查了二次根式的混合运算: 熟练掌握二次根式的性质、二次根式的乘法法则是解决问题的关键.

27. 【答案】 $-7$ ;

$$x = 4, \text{ 图形见详解};$$

$$2, -3, 1.$$

【解析】解：(1)由  $(x + x + 2)^2 = 144$  得，

$$(2x + 2)^2 = 144,$$

$$2x + 2 = \pm 12,$$

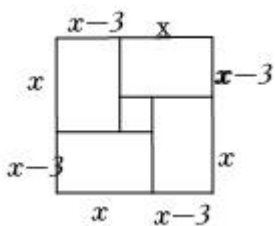
$$\therefore x_1 = 5, \quad x_2 = -7,$$

$\therefore$ 原方程的另一个根是  $-7$ .

故答案为：  $-7$ ;

$$(2) \text{将方程 } x^2 - 3x - 4 = 0 \text{ 变形为 } x(x - 3) = 4,$$

画四个长为  $x$ ，宽为  $x - 3$  的矩形，按如图所示构造一个“空心”大正方形，



则图中大正方形的面积从整体看可表示为  $(x + x - 3)^2$ ，从局部看还可表示为四个矩形与中间小正方形面积之和，即  $4x(x - 3) + 3^2 = 4 \times 4 + 9 = 25$ ，因此，可得新的一元二次方程  $(x + x - 3)^2 = 25$ ，

$\therefore x$ 表示边长，

$$\therefore 2x - 3 = 5,$$

$$\text{即 } x = 4.$$

$$(3) \because \text{中间围成的正方形面积为 } 4,$$

$\therefore$ 中间正方形的边长为  $2$ ，

设长方形的宽为  $x$ ，则长为  $x + 2$ ，

$$\text{由题意得 } x(x + 2) = 3,$$

$$\text{整理得 } x^2 + 2x - 3 = 0,$$

$$\therefore a = 2, \quad b = -3.$$

如图中大正方形的面积从整体看可表示为  $(x + x + 2)^2$ ，从局部看还可表示为四个矩形与中间小正方形面积之和，即  $4x(x + 2) + 2^2 = 4 \times 3 + 4 = 16$ ，因此，可得新的一元二次方程  $(x + x + 2)^2 = 16$ ，

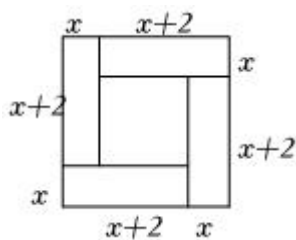
$\therefore x$ 表示边长，

$$\therefore 2x + 2 = 4,$$

$$\text{即 } x = 1.$$

$\therefore$ 方程  $x^2 + ax + b = 0$  的一个正根为  $x = 1$ .

故答案为：  $2, \quad 3, \quad 1$ .



(1)运用直接开平方法解方程  $(x + x + 2)^2 = 144$ , 即可得到方程的另一个根.

(2)将方程  $x^2 - 3x - 4 = 0$  变形为  $x(x - 3) = 4$ , 画四个长为  $x$ , 宽为  $x - 3$  的矩形, 构造一个“空心”大正方形; 仿照例题求解即可;

(3)由中间围成的正方形面积为 4, 可得中间正方形的边长为 2. 设长方形的宽为  $x$ , 则长为  $x + 2$ , 由题意得  $x(x + 2) = 3$ , 整理得  $x^2 + 2x - 3 = 0$ , 即可求得  $a$  和  $b$  的值. 仿照例题构造大正方形, 即可求出  $x$  的值.

本题主要考查学生的阅读理解能力, 综合运用知识的能力. 读懂例题, 正确的构造出大正方形是解题的关键.