

## 2025 学年第一学期期中质量调研卷初二年级数学学科

(时间: 90 分钟满分: 100 分)

### 一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列各数中, 无理数的个数有 ( )

$5.41, \frac{22}{7}, 3.14, \sqrt{3}, \sqrt{16}, \frac{\pi}{2}, 9.12112111211112\dots$  (每两个相邻的 2 之间多一个 1)

A. 1 个                      B. 2 个                      C. 3 个                      D. 4 个

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了无理数的定义, 无理数是无限不循环小数, 逐一判断每个数是否为无理数即可.

【详解】 解:  $\sqrt{16} = 4$ ,

由无理数的定义可判断  $\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}, 9.12112111211112\dots$  是无理数,

所以无理数有三个,

故选: C.

2. 下列说法正确的是 ( )

A.  $\sqrt{64} = \pm 8$                       B. 0 的平方根是 0  
C.  $\sqrt{(-2)^2} = -2$                       D.  $|-4|$  的平方根是 2

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查平方根和算术平方根的概念. 算术平方根是非负的, 平方根有两个值 (0 除外). 选项 A 混淆了平方根与算术平方根; 选项 C 算术平方根结果应为正; 选项 D 忽略了负平方根; 选项 B 正确.

【详解】 解:  $\because$  算术平方根  $\sqrt{a}$  表示非负值, 平方根有正负两个值 ( $a > 0$  时) 或 0 ( $a = 0$  时).

对于 A:  $\sqrt{64}$  表示算术平方根, 应为 8, 而非  $\pm 8$ , 所以此项错误;

对于 B: 0 的平方根是 0, 正确, 所以此项正确;

对于 C:  $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$ , 而非  $-2$ , 所以此项错误;

对于 D:  $|-4| = 4$ , 4 的平方根是  $\pm 2$ , 选项说“是 2”不完整, 所以此项错误.

故选: B.

3. 下列说法错误的是 ( )

A. 实数可分为正实数和负实数两类

B. 正实数包括正有理数和正无理数

C. 实数在数轴上都有唯一对应的点

D. 数轴上任一点都有唯一对应的实数

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了实数的分类和实数与数轴的对应关系，解题的关键是掌握实数的有关基础知识.  
根据实数的分类，实数与数轴的对应关系对选项逐个判断即可.

【详解】 解：A，实数包括正实数、负实数和零，零既不是正实数也不是负实数，选项错误，符合题意；  
B，正实数包括正有理数和正无理数，选项正确，不符合题意；  
C：实数与数轴上的点一一对应，每个实数都有唯一对应的点，选项正确，不符合题意；  
D：数轴上的每个点都有唯一对应的实数，选项正确，不符合题意；  
故选：A.

4. 下列式子不是  $\sqrt{x}-\sqrt{y}$  的有理化因式的是 ( )

A.  $\sqrt{x}+\sqrt{y}$

B.  $x\sqrt{x}+x\sqrt{y}$

C.  $\sqrt{x+y}$

D.  $\frac{1}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{y}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查有理化因式的概念，关键是通过相乘验证是否消除根式. 注意选项 C 的乘积仍保留根式结构.

有理化因式需满足与给定式子相乘后结果不含根式. 通过计算各选项与  $\sqrt{x}-\sqrt{y}$  的乘积，判断是否含根式.

【详解】  $\because$  有理化因式应使乘积不含根式，

A.  $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=x-y$ ，不含根式；

B.  $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x\sqrt{x}+x\sqrt{y})=x(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=x(x-y)$ ，不含根式；

C.  $(\sqrt{x}-\sqrt{y})\sqrt{x+y}=\sqrt{x(x+y)}-\sqrt{y(x+y)}$ ，仍含根式；

D.  $(\sqrt{x}-\sqrt{y})\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{y}\right)=\frac{1}{2}(x-y)$ ，不含根式.

$\therefore$  选项 C 不是有理化因式.

故选：C.

5. 下列关于 $x$ 的方程有实数根的是 ( )

A.  $5x^2 + 2 = 0$

B.  $2x^2 + 4x + 3 = 0$

C.  $2x^2 - 3 = 2x^2 + 4$

D.  $x^2 = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程根的判别式，通过计算判别式或简化方程，判断每个方程是否有实数根。二次方程有实数根当且仅当判别式 $\Delta \geq 0$ 。

【详解】解：A、 $5x^2 + 2 = 0$ ， $\Delta = 0^2 - 4 \times 5 \times 2 = -40 < 0$ ，此方程无实数根，不符合题意；

B、 $2x^2 + 4x + 3 = 0$ ， $\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times 3 = 16 - 24 = -8 < 0$ ，此方程无实数根，不符合题意；

C、 $2x^2 - 3 = 2x^2 + 4$ ，简化得  $-3 = 4$ ，矛盾，无解，即此方程无实数根，不符合题意；

D、 $x^2 = 0$ ， $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 0 = 0$ ，此方程有实数根 $x = 0$ ，

故此方程有实数根，符合题意。

故选：D。

6. 甲、乙两位同学将二次根式 $\sqrt{a^2}$ 变形的过程如下，

甲： $\sqrt{a^2} = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$

乙： $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a) \cdot (-a)} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = -a$

由此，两位同学共同得到“任何实数 $a$ 都等于它的相反数 $-a$ ”的结论。

两位同学关于 $\sqrt{a^2}$ 的变形过程，首次出现共同错误的地方是 ( )

A. 第一个等号后

B. 第二个等号后

C. 第三个等号后

D. 两位同学都没错

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了二次根式的性质， $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$  要求  $a \geq 0$  且  $b \geq 0$ 。甲和乙在第二个等号后应用此性质时，未考虑 $a$ 和 $-a$ 的非负性，导致错误。

【详解】解： $\because \sqrt{a^2} = |a|$ ，而非简单等于 $a$ 或 $-a$ 。

甲的过程： $\sqrt{a^2} = \sqrt{a \cdot a}$  (正确)，但  $\sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$  仅当  $a \geq 0$  时成立；

乙的过程:  $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a) \cdot (-a)}$  (正确), 但  $\sqrt{(-a) \cdot (-a)} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a}$  仅当  $-a \geq 0$  (即  $a \leq 0$ ) 时成立.

∴ 两位同学在第二个等号后应用根式性质时, 均未确保  $a$  或  $-a$  非负.

∴ 首次共同错误出现在第二个等号后.

故选: B.

## 二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

7. 一元二次方程的求根公式的发现, 是数学思想史上的一个里程碑, 对于任意有实数根的一元二次方程

$ax^2 + bx + c = 0$ , 其求根公式为  $x =$  \_\_\_\_\_;

【答案】  $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程求根公式的推导, 解题的关键是掌握配方法推导求根公式的步骤. 按照配方法的步骤, 移项, 系数化为 1, 同时加上一次项系数一半的平方, 求解即可.

【详解】 解: 对于一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  (其中  $a \neq 0$ ),

移项得,  $ax^2 + bx = -c$ ,

系数化为 1 得,  $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ ,

两边加上  $\left(-\frac{b}{2a}\right)^2$  得,  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$ ,

则  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ ,

开平方得,  $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ,

移项得,  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ,

故答案为:  $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

8. 用科学记数法把 0.00001032 表示为 \_\_\_\_\_;

【答案】  $1.032 \times 10^{-5}$

【解析】

【分析】此题考查了科学记数法的表示方法，根据科学记数法的表示形式为  $a \times 10^n$  的形式，其中  $1 \leq |a| < 10$ ， $n$  为整数即可求解，解题的关键是要正确确定  $a$  的值以及  $n$  的值。

【详解】解：  $0.00001032 = 1.032 \times 10^{-5}$ ，

故答案为：  $1.032 \times 10^{-5}$ 。

9. 客厅地面呈长方形，长与宽的比恰为  $\sqrt{2}:1$ ，现要用同一大小的正方形地砖铺满地面，且正方形不能切割。有一家地砖厂商，能够生产任意边长的正方形，那么这家厂商\_\_\_\_\_（填“能”或“不能”）生产出符合要求的正方形地砖；

【答案】不能

【解析】

【分析】本题考查了算术平方根的实际应用，理解题意是解决本题的关键。

假设存在边长为  $s$  的正方形地砖能铺满地面，则长  $\sqrt{2}a$  和宽  $a$  都必须是  $s$  的整数倍，设存在正整数  $m$ 、 $n$ ，

使得  $\sqrt{2}a = ms$ ， $a = ns$ ，两式相除得  $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$  即可判断。

【详解】解：设地面宽为  $a$  ( $a > 0$ )，则长为  $\sqrt{2}a$ ，

假设存在边长为  $s$  的正方形地砖能铺满地面，则长  $\sqrt{2}a$  和宽  $a$  都必须是  $s$  的整数倍，

即存在正整数  $m$ 、 $n$ ，使得  $\sqrt{2}a = ms$ ， $a = ns$ 。

两式相除得  $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ ，

$\therefore \sqrt{2}$  是无理数，而  $\frac{m}{n}$  是有理数，矛盾。

$\therefore$  不存在这样的正方形地砖。

故答案为：不能。

10. 实数  $a$ 、 $b$ 、 $c$  在一条没有标明原点的数轴上对应的点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的位置如图所示，则

$\sqrt{(a-b)^2} + (\sqrt{a+c})^2$  可化简为\_\_\_\_\_。



【答案】  $b+c$  或  $c+b$

【解析】

【分析】考查二次根式的性质 ( $\sqrt{x^2} = |x|$ 、 $(\sqrt{x})^2 = x$  ( $x \geq 0$ ))、数轴上数的大小关系。关键是根据数轴判

断符号，正确化简绝对值和二次根式，易错点是忽略根号下表达式的非负性及绝对值符号的处理。

由数轴得  $a < b$ ， $a + c > 0$ 。则  $\sqrt{(a-b)^2} = |a-b| = b-a$ ， $(\sqrt{a+c})^2 = a+c$ ，两者相加得  $b-a+a+c = b+c$ 。

【详解】由数轴可知  $a < b < c$ ，且  $a+c > 0$ 。

$\because a-b < 0$ ， $\therefore \sqrt{(a-b)^2} = |a-b| = b-a$ 。

$\because a+c \geq 0$ ，根号有意义， $\therefore (\sqrt{a+c})^2 = a+c$ 。

因此，原式化简为  $b-a+a+c = b+c$ 。

故答案为： $b+c$ 。

11. 化简： $\sqrt{-27x^3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】  $-3x\sqrt{-3x}$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式有意义的条件，利用二次根式的性质化简，解题的关键是熟练掌握  $\sqrt{a^2} = |a|$ 。

根据二次根式的定义，被开方数必须非负，由此确定  $x \leq 0$ ，然后利用二次根式的性质化简即可。

【详解】解：由  $\sqrt{-27x^3}$  有意义，可得  $-27x^3 \geq 0$ ，即  $x^3 \leq 0$ ，所以  $x \leq 0$ ，

$\therefore \sqrt{-27x^3} = \sqrt{-3x \cdot 9x^2} = 3|x|\sqrt{-3x} = -3x\sqrt{-3x}$ ；

故答案为： $-3x\sqrt{-3x}$ 。

12. 化简： $\sqrt{\frac{27}{8x^3}} (x > 0) = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

【答案】  $\frac{3\sqrt{6x}}{4x^2}$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的化简，根据二次根式的性质进行化简根式即可，熟练掌握二次根式的性质是解题的关键。

【详解】解： $\sqrt{\frac{27}{8x^3}} = \sqrt{\frac{27 \times 2x}{8x^3 \cdot 2x}} = \sqrt{\frac{54x}{16x^4}} = \frac{3\sqrt{6x}}{4x^2}$ ，

故答案为： $\frac{3\sqrt{6x}}{4x^2}$ 。

13. 若最简二次根式  $\sqrt{a-1}$  与  $\sqrt{8}$  是同类二次根式, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查同类二次根式的概念, 同类二次根式是化为最简二次根式后, 被开方数相同的二次根式称为同类二次根式. 根据同类二次根式的概念, 它们的被开方数相同, 列出方程求解即可.

【详解】 解:  $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ,

$\therefore$  最简二次根式  $\sqrt{a-1}$  与  $\sqrt{8}$  是同类二次根式,

$\therefore a-1=2$ ,

解得:  $a=3$ .

故答案为: 3.

14. 已知三角形两边长是方程  $x^2 - 5x + 6 = 0$  的两个根, 则三角形的第三边  $c$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

【答案】  $1 < c < 5$

【解析】

【详解】  $\because$  三角形两边长是方程  $x^2 - 5x + 6 = 0$  的两个根,  $\therefore x_1 + x_2 = 5$ ,  $x_1 x_2 = 6$

$\therefore (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 25 - 24 = 1$

$\therefore x_1 - x_2 = 1$ , 又  $\because x_1 - x_2 < c < x_1 + x_2$ ,  $\therefore 1 < c < 5$ .

故答案为  $1 < c < 5$ .

15. 写出一个根为  $x_1 = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$ ,  $x_2 = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$  的一元二次方程: \_\_\_\_\_ (写成一般式);

【答案】  $x^2 - 6\sqrt{2}x + 12 = 0$  (答案不唯一)

【解析】

【分析】 本题主要考查一元二次方程根与系数的关系, 利用根与系数的关系, 根据已知两根计算两根之和与两根之积, 从而构造一元二次方程的一般式即可.

【详解】 解: 设一元二次方程为  $x^2 + px + q = 0$ , 根据根与系数的关系, 有  $x_1 + x_2 = -p$ ,  $x_1 x_2 = q$ ,

已知  $x_1 = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$ ,  $x_2 = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$ ,

计算两根之和:

$x_1 + x_2 = (3\sqrt{2} + \sqrt{6}) + (3\sqrt{2} - \sqrt{6}) = 6\sqrt{2}$ ,

所以  $p = -6\sqrt{2}$ ,

计算两根之积:

$$x_1x_2 = (3\sqrt{2} + \sqrt{6})(3\sqrt{2} - \sqrt{6}) = (3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6})^2 = 18 - 6 = 12,$$

所以  $q = 12$ ,

因此, 方程为  $x^2 - 6\sqrt{2}x + 12 = 0$ .

故答案为:  $x^2 - 6\sqrt{2}x + 12 = 0$  (答案不唯一).

16. 方程  $x(x-2) = x-2$  的解为\_\_\_\_\_

【答案】  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 1$

【解析】

【分析】 首先移项进而提取公因式  $(x-2)$ , 进而分解因式求出即可.

【详解】 解:  $x(x-2) = x-2$

$$x(x-2) - (x-2) = 0,$$

$$(x-2)(x-1) = 0,$$

解得:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 1$ .

故答案为:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 1$ .

【点睛】 此题主要考查了分解因式法解一元二次方程, 正确分解因式是解题关键.

17. 不等式  $(\sqrt{3}-2)x < 0$  的解集是\_\_\_\_\_;

【答案】  $x > 0$

【解析】

【分析】 本题主要考查了不等式的基本性质, 准确计算是解题的关键.

通过判断系数  $\sqrt{3}-2$  的符号, 确定不等号方向是否改变.

【详解】 解不等式  $(\sqrt{3}-2)x < 0$ ,

$$\because \sqrt{3} \approx 1.732 < 2,$$

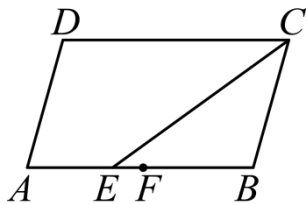
$$\therefore \sqrt{3}-2 < 0,$$

不等式两边同时除以  $\sqrt{3}-2$ ,

$$\therefore x > 0.$$

故答案是:  $x > 0$ .

18. 如图, 四边形  $ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ ,  $\angle DCB$  的平分线交  $AB$  于点  $E$ , 点  $F$  是边  $AB$  的中点, 已知  $AB = 2\sqrt{2}$ ,  $BC = \sqrt{3}$ , 则  $AE$  与  $EF$  的比值为\_\_\_\_\_.



【答案】  $\sqrt{6}+1$

【解析】

【分析】 本题考查了平行线的性质、等腰三角形的判定、二次根式的分母有理化, 熟练掌握等腰三角形的判定是解题关键. 先根据平行线的性质可得  $\angle DCE = \angle BEC$ , 根据角平分线的定义可得  $\angle DCE = \angle BCE$ , 则可得  $\angle BEC = \angle BCE$ , 再根据等腰三角形的判定可得  $BE = BC$ , 然后根据线段和差求出  $AE$ ,  $EF$ , 根据二次根式的分母有理化方法求解即可得.

【详解】 解:  $\because AB \parallel CD$ ,

$$\therefore \angle DCE = \angle BEC,$$

$\because CE$  是  $\angle DCB$  的平分线,

$$\therefore \angle DCE = \angle BCE,$$

$$\therefore \angle BEC = \angle BCE,$$

$$\therefore BE = BC,$$

$$\because AB = 2\sqrt{2}, \quad BC = \sqrt{3},$$

$$\therefore AE = AB - BE = AB - BC = 2\sqrt{2} - \sqrt{3},$$

$\because$  点  $F$  是边  $AB$  的中点,

$$\therefore BF = \frac{1}{2}AB = \sqrt{2},$$

$$\therefore EF = BE - BF = BC - BF = \sqrt{3} - \sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{AE}{EF} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \sqrt{6} + 1,$$

故答案为:  $\sqrt{6}+1$ .

### 三、简答题 (每题 5 分, 4 题共 20 分)

19. 化简:  $\sqrt[3]{(-2)^3} + (\sqrt{2} + 1)^2 - (\sqrt{0.01})^{-1} - \sqrt{\left(1\frac{25}{144}\right)^0}$

【答案】  $2\sqrt{2} - 10$

【解析】

【分析】考查立方根、二次根式、负指数幂、零指数幂的运算性质. 关键是熟练掌握各运算的公式, 易错点是负指数幂、零指数幂的符号及数值计算错误.

分别计算各项:

$$\sqrt[3]{(-2)^3} = -2;$$

$$(\sqrt{2} + 1)^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2};$$

$$(\sqrt{0.01})^{-1} = (0.1)^{-1} = 10;$$

$$\sqrt{\left(1\frac{25}{144}\right)^0} = \sqrt{1} = 1.$$

再将各项结果代入原式.

【详解】原式  $= -2 + (3 + 2\sqrt{2}) - 10 - 1$   
 $= 2\sqrt{2} - 10$

20. 化简:  $\frac{2}{b}\sqrt{-ab^2} + \left(-\frac{2}{3}\sqrt{ab}\right) + 3\sqrt{\frac{b}{a}}$

【答案】  $-2\sqrt{-a} - \frac{(2a+9)\sqrt{ab}}{3a}$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的化简, 判断出字母的符号是解决本题的关键. 根据算术平方根的定义判断出  $a$  和  $b$  的符号, 再进行化简即可.

【详解】解:  $\because \sqrt{-ab^2} \geq 0,$

$$\therefore -ab^2 \geq 0,$$

$$\therefore b^2 \geq 0,$$

$$\therefore -a \geq 0,$$

$$\therefore a \leq 0,$$

$$\because \sqrt{ab} \geq 0,$$

$\therefore a$  和  $b$  同号,

$$\therefore b \leq 0,$$

$\therefore$  要使  $\sqrt{\frac{b}{a}}$  和  $\frac{2}{b}$  有意义,

$$\therefore a \neq 0, \quad b \neq 0,$$

$$\therefore a < 0, \quad b < 0,$$

$$\therefore \frac{2}{b}\sqrt{-ab^2} + \left(-\frac{2}{3}\sqrt{ab}\right) + 3\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$= \frac{2}{b} \cdot (-b)\sqrt{-a} - \frac{2}{3}\sqrt{ab} - 3\frac{\sqrt{ab}}{a}$$

$$= -2\sqrt{-a} - \frac{2}{3}\sqrt{ab} - 3\frac{\sqrt{ab}}{a}$$

$$= -2\sqrt{-a} - \left(\frac{2\sqrt{ab}}{3} + \frac{3\sqrt{ab}}{a}\right)$$

$$= -2\sqrt{-a} - \frac{2a\sqrt{ab} + 9\sqrt{ab}}{3a}$$

$$= -2\sqrt{-a} - \frac{(2a+9)\sqrt{ab}}{3a}.$$

21. 用合适的方法解方程:  $4x^2 - 12x - 891 = 0$

**【答案】**  $x_1 = \frac{33}{2}, x_2 = -\frac{27}{2}$

**【解析】**

**【分析】** 本题主要考查了解一元二次方程, 解题的关键是掌握配方法.

利用配方法解一元二次方程即可.

**【详解】** 解:  $4x^2 - 12x - 891 = 0$

$$x^2 - 3x = \frac{891}{4}$$

$$x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{891}{4} + \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{900}{4}$$

$$x - \frac{3}{2} = 15, x - \frac{3}{2} = -15$$

$$\therefore \text{原方程的解是 } x_1 = \frac{33}{2}, x_2 = -\frac{27}{2}.$$

22. 已知  $m = 1\frac{4}{9}, n = 1$ , 求  $\frac{1-n}{1+\sqrt{n}} - \frac{m-4\sqrt{mn}+4n}{\sqrt{m}-2\sqrt{n}}$  的值.

**【答案】**  $2 - \frac{\sqrt{13}}{3}$

**【解析】**

**【分析】** 本题考查二次根式的化简求值, 熟练掌握二次根式的运算法则是解答的关键.

先根据二次根式的运算法则化简原式, 再代值求解即可.

**【详解】** 解: 原式  $= \frac{(1+\sqrt{n})(1-\sqrt{n})}{1+\sqrt{n}} - \frac{(\sqrt{m}-2\sqrt{n})^2}{\sqrt{m}-2\sqrt{n}}$

$$= (1-\sqrt{n}) - (\sqrt{m}-2\sqrt{n})$$

$$= 1 - \sqrt{n} - \sqrt{m} + 2\sqrt{n}$$

$$= 1 - \sqrt{m} + \sqrt{n},$$

把  $m = 1\frac{4}{9} = \frac{13}{9}$ ,  $n = 1$  代入, 得

$$\text{原式} = 1 - \sqrt{\frac{13}{9}} + \sqrt{1}$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{13}}{3} + 1$$

$$= 2 - \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

**四、解答题 (23, 24 题每题 8 分, 25 题 10 分, 共 26 分)**

23. 已知关于  $x$  的方程  $x^2 + (|a|+1)x + \sqrt{b^2+1} = 0$  的两个根分别为  $x_1$ 、 $x_2$ .

(1)  $x=1$  是这个方程的解吗? 请说明理由;

(2)  $x_1$  与  $x_2$  是正数还是负数? 请说明理由.

【答案】(1) 不是, 理由见解析

(2) 负数, 理由见解析

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程根的含义, 根与系数的关系以及绝对值和算术平方根的非负性, 解题的关键是理解方程根的含义以及一元二次方程根与系数的关系.

(1) 根据方程解的含义, 将  $x=1$  代入方程, 验证是否成立即可;

(2) 根据根与系数的关系, 得到  $x_1 + x_2 = -(|a|+1)$ ,  $x_1 \cdot x_2 = \sqrt{b^2+1}$ , 判断它们的符号从而确定  $x_1$  与  $x_2$  的符号.

【小问 1 详解】

解: 不是, 理由如下:

根据方程解的含义, 将  $x=1$  代入方程可得,  $|a| + \sqrt{b^2+1} + 2 = 0$ ,

$$\because |a| \geq 0, \sqrt{b^2+1} > 0,$$

$$\therefore |a| + \sqrt{b^2+1} + 2 > 2,$$

显然  $|a| + \sqrt{b^2+1} + 2 = 0$  不成立,

$\therefore x=1$  不是这个方程的解;

【小问 2 详解】

解:  $x_1$  与  $x_2$  是负数, 理由如下:

关于  $x$  的方程  $x^2 + (|a|+1)x + \sqrt{b^2+1} = 0$  的两个根分别为  $x_1$ 、 $x_2$ ,

由根与系数的关系可得,  $x_1 + x_2 = -(|a|+1)$ ,  $x_1 \cdot x_2 = \sqrt{b^2+1}$ ,

$$\because -(|a|+1) < 0, \sqrt{b^2+1} > 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 < 0, x_1 x_2 > 0,$$

$$\therefore x_1 < 0, x_2 < 0,$$

$\therefore x_1$  与  $x_2$  是负数.

24. (1) 在学习：一元二次方程的解法这一节时，教科书介绍了两种特殊的一元二次方程的解法，分别是用因式分解法和求平方根，将一元二次方程转化为一元一次方程来求解，即解一元二次方程的基本思想是（填序号）\_\_\_\_\_（①消元，②降次）

(2) 解方程： $\sqrt{6}x^3 - 5x^2 - 6\sqrt{6}x = 0$

(3) 若实数  $a$  是方程  $(x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x) - 8 = 0$  的根，求  $a^2 + a$  的值

【答案】(1) ②

(2)  $x_1 = 0, x_2 = \frac{3\sqrt{6}}{2}, x_3 = -\frac{2\sqrt{6}}{3}$

(3)  $a^2 + a = 2$

【解析】

【分析】考查一元二次方程解法（因式分解、换元法）及降次思想．关键是因式分解降次、换元简化方程，易错点是漏项和忽略判别式．

(1) 解一元二次方程的基本思想是“降次”，选②．

(2) 提取公因式并因式分解，降次求解得三个根．

(3) 换元后解方程，结合判别式得  $a^2 + a = 2$ ．

【详解】(1) ②

(2) 提取公因式  $x$ ，得  $x(\sqrt{6}x^2 - 5x - 6\sqrt{6}) = 0$ ．

$\therefore x = 0$  或  $\sqrt{6}x^2 - 5x - 6\sqrt{6} = 0$ ，

方程  $\sqrt{6}x^2 - 5x - 6\sqrt{6} = 0$ ，因式分解可得  $(\sqrt{6}x + 4)(x - \frac{3\sqrt{6}}{2}) = 0$ ．

$\therefore \sqrt{6}x + 4 = 0$  或  $x - \frac{3\sqrt{6}}{2} = 0$ ，

解得：  $x = -\frac{4\sqrt{6}}{6} = -\frac{2\sqrt{6}}{3}$  或  $x = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ ，

$\therefore$  原方程的解为：  $x_1 = 0, x_2 = \frac{3\sqrt{6}}{2}, x_3 = -\frac{2\sqrt{6}}{3}$

(3) 设  $t = x^2 + x$ ，则  $t^2 + 2t - 8 = 0$ ．

$\therefore (t + 4)(t - 2) = 0$ ，

解得  $t_1 = -4$ ,  $t_2 = 2$ .

当  $t = -4$  时,  $x^2 + x = -4$ , 即  $x^2 + x + 4 = 0$ ,

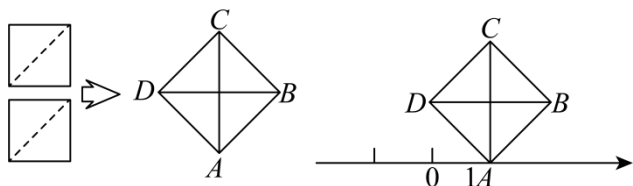
$\because \Delta = 1 - 16 = -15 < 0$ ,  $\therefore$  无实数根.

当  $t = 2$  时,  $x^2 + x = 2$ , 即  $x^2 + x - 2 = 0$ , 有实数根.

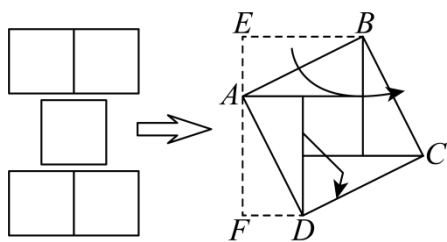
因为  $a$  是方程的根,

$$\therefore a^2 + a = 2.$$

25. (1) 通过剪裁、拼接两个面积为 1 的正方形, 可得到一个面积为 2 的正方形. 如图 1, 已知小正方形的边长为 1, 若点  $A$  与数轴上表示 1 的点重合, 将正方形  $ABCD$  绕着点  $A$  旋转, 点  $D$  落在数轴上, 与点  $D'$  重合, 则  $D'$  表示的数为\_\_\_\_\_;

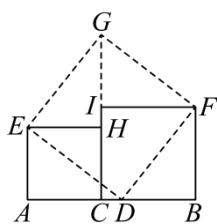


(2) 下面我们来了解如何得到边长为  $\sqrt{5}$  的正方形, 如图 2, 将五个面积为 1 的正方形, 按图示虚线剪裁, 拼接成右侧的图形. 我们可以用已经学过的几何知识判断出四边形  $ABCD$  是正方形. 已知直角  $\triangle ABE$  与  $\triangle DAF$  中,  $\angle E = \angle F = 90^\circ$ ,  $AE = DF$ ,  $BE = AF$ ,  $E$ 、 $A$ 、 $F$  三点在同一条直线上, 求证:  $AB = AD$  且  $\angle BAD = 90^\circ$ ;



(3) 下面介绍如何获得边长为  $\sqrt{3}$  的正方形. 利用面积为 2 的正方形以及一个面积为 1 的正方形剪裁、拼接. 如图 3, 将面积为 1 的正方形  $ACHE$  与面积为 2 的正方形  $CBFI$  排列在一起. 在  $AB$  上取点  $D$ , 使得  $DB = AE$ , 连接  $DF$ 、 $DE$ . 将  $\triangle ADE$  绕着点  $E$  逆时针旋转  $90^\circ$ , 得到  $\triangle HGE$ , 再将  $\triangle BFD$  以类似方式旋转至  $\triangle IFG$  的位置, 四边形  $EDFG$  即边长为  $\sqrt{3}$  的正方形.

请参考这一方法, 仅利用面积为 1 的正方形 (不限数量), 以及上面小题 (1)、(2) 中已经获得的面积为 2 或 5 的正方形, 尝试获得边长为  $\sqrt{6}$  的正方形, 利用刻度尺画出图形. (图上适当标注数据, 不需要写作图过程)



【答案】(1)  $1-\sqrt{2}$  或  $1+\sqrt{2}$

(2) 见解析

(3) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查勾股定理与全等三角形的应用，熟练掌握勾股定理与全等三角形是解题关键.

(1) 先由勾股定理得正方形边长  $AD = \sqrt{2}$ ，再结合点  $A$  表示的数  $1$ ，推出  $D'$  表示的数.

(2) 通过证明  $\triangle ABE \cong \triangle DAF$ ，利用全等三角形的对应边相等、对应角相等，推导得出结论.

(3) 利用勾股定理  $(\sqrt{6})^2 = (\sqrt{5})^2 + 1^2$ ，结合面积为  $5$ 、 $1$  的正方形，构造直角三角形得到斜边  $\sqrt{6}$ ，再拼成正方形.

【详解】(1) 解：由题可知  $AD = \sqrt{2}$ ，

$\because$  点  $A$  与数轴上表示  $1$  的点重合，将正方形  $ABCD$  绕着点  $A$  旋转，点  $D$  落在数轴上，与点  $D'$  重合，

$$\therefore AD' = AD = \sqrt{2}$$

若  $D'$  在  $A$  的左侧，则  $D'$  表示的数为  $1-\sqrt{2}$ ，

若  $D'$  在  $A$  的右侧，则  $D'$  表示的数为  $1+\sqrt{2}$ ，

$$\therefore D' \text{ 表示的数为 } 1-\sqrt{2} \text{ 或 } 1+\sqrt{2}.$$

故答案为：  $1-\sqrt{2}$  或  $1+\sqrt{2}$  .

(2) 证明：在  $\triangle ABE$  与  $\triangle DAF$  中，

$$\begin{cases} AE = DF \\ \angle E = \angle F, \\ BE = AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DAF (\text{SAS}),$$

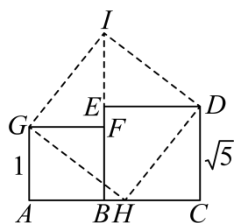
$$\therefore AB = AD, \angle EBA = \angle FAD,$$

$$\because \angle EAB + \angle EBA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAB + \angle FAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = 180^\circ - (\angle EAB + \angle FAD) = 90^\circ.$$

(3) 解：如图所示，四边形  $GHDI$  即为所求，



将面积为1的正方形  $ABFG$  与面积为5的正方形  $BCDE$  排列在一起. 在  $BC$  上取点  $H$ , 使得  $CH = AG = 1$ , 连接  $GH$ 、 $DH$ . 将  $\triangle AHG$  绕着点  $G$  逆时针旋转  $90^\circ$ , 得到  $\triangle FGI$ , 再将  $\triangle CHD$  以类似方式旋转至  $\triangle EDI$  的位置, 四边形  $GHDI$  即边长为  $\sqrt{6}$  的正方形.