

民一中学 2025 学年八年级上期中试卷

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列各数: $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 、 $-\sqrt[3]{9}$ 、 $\frac{1}{2026}$ 、 $-\pi$ 、 $\sqrt[3]{-8}$ 、 -0.1010010001 , 其中无理数有 ()

- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

【答案】B

【解析】

【分析】此题主要考查了无理数的定义, 无限不循环小数为无理数, 注意带根号的要开方开不尽才是无理数, 利用无理数是无限不循环小数分析求解即可求得答案.

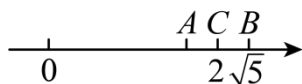
【详解】解: $\sqrt[3]{-8} = -2$,

下列各数: $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 、 $-\sqrt[3]{9}$ 、 $\frac{1}{2026}$ 、 $-\pi$ 、 $\sqrt[3]{-8}$ 、 -0.1010010001 , 其中无理数有 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 、 $-\sqrt[3]{9}$ 、 $-\pi$, 一共

3 个,

故选: B.

2. 如图, 数轴上表示 2, $\sqrt{5}$ 的点分别为点 C, 点 B, 点 C 是线段 AB 的中点, 则点 A 表示的数 ()



- A. $-\sqrt{5}$ B. $2 - \sqrt{5}$ C. $\sqrt{5} - 2$ D. $4 - \sqrt{5}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了实数与数轴, 以及两点之间的距离公式. 数轴上的点与实数一一对应, 根据 C 是线段 AB 的中点, 可得 $CB = CA$, 用 C 点表示的数减去 CB 的距离, 可得 A 点表示的数.

【详解】解: $\because$ 点 C 是线段 AB 的中点,

$$\therefore CB = CA = \sqrt{5} - 2,$$

$$\therefore \text{点 A 表示的数是: } 2 - (\sqrt{5} - 2) = 4 - \sqrt{5},$$

故选: D.

3. 在下列各式中, 是 $\sqrt{2a+b}$ 的有理化因式的是 ()

- A. $\sqrt{2a+b}$ B. $\sqrt{2a-b}$ C. $\sqrt{2a}+b$ D. $\sqrt{2a}-b$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查有理化因式的概念.

有理化因式: 两个含有根式的非零代数式相乘, 如果它们的积不含有根式, 那么这两个代数式就互为有理化因式, 分别将选项代入计算看乘积是否含有根式即可.

【详解】 A. $\sqrt{2a+b} \cdot \sqrt{2a+b} = 2a+b$, 结果不带根式, 符合题意.

B. $\sqrt{2a+b} \cdot \sqrt{2a-b} = \sqrt{4a^2-b^2}$, 结果带根式, 不符合题意.

C. $\sqrt{2a+b} \cdot (\sqrt{2a}+b) = \sqrt{4a^2+2ab}+b\sqrt{2a+b}$, 结果带根式, 不符合题意.

D. $\sqrt{2a+b} \cdot (\sqrt{2a}-b) = \sqrt{4a^2+2ab}-b\sqrt{2a+b}$, 结果带根式, 不符合题意.

故选: A.

4. 氧原子的直径是 0.000000000148 米, 用科学记数法表示为 ()

- A. 1.48×10^{-8} 米 B. 1.48×10^{-9} 米 C. 1.48×10^{-10} 米 D. 1.48×10^{-11} 米

【答案】 C

【解析】

【分析】 此题考查科学记数法, 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

【详解】 解: $0.000000000148 \text{ 米} = 1.48 \times 10^{-10} \text{ 米}$.

故选: C.

5. 下列关于 x 的方程中两实数根之和为 1 的是 ()

- A. $x^2+1=0$; B. $x^2-x+1=0$; C. $x^2+x+1=0$; D. $x^2-x-1=0$.

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查的是根的判别式的应用, 根与系数的关系, 对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$, 两实数根之和为 $-\frac{b}{a}$, 且需判别式 $\Delta=b^2-4ac \geq 0$; 分别验证各选项即可.

【详解】解：选项 A：∵ $a=1, b=0, c=1$,

∴ $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 1 = -4 < 0$ ，无实数根；不符合题意；

选项 B：∵ $a=1, b=-1, c=1$,

∴ $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$ ，无实数根；不符合题意；

选项 C：∵ $a=1, b=1, c=1$,

∴ $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$ ，无实数根；不符合题意；

选项 D：∵ $a=1, b=-1, c=-1$,

∴ $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5 > 0$ ，有两实数根；

∴ 两根之和为 $-\frac{-1}{1} = 1$ ，符合题意；

故选：D

6. 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，正确的结论是 ()

①若 $a+b+c=0$ ，则 $b^2 - 4ac \geq 0$ ；

②若方程 $ax^2 + c = 0$ 有两个不相等的实根，则方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 必有两个不相等的实根；

③若 x_1 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根，则 $b^2 - 4ac = (2ax_1 + b)^2$ 。

A. ①②

B. ①③

C. ②③

D. ①②③

【答案】D

【解析】

【分析】根据一元二次方程实数根与判别式的关系，其中 $b^2 - 4ac \geq 0$ 有两个实数根、 $b^2 - 4ac > 0$ 有两个不相等的实数根、 $b^2 - 4ac < 0$ 无实数根，以及求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 和等式的性质逐个验证即可。

【详解】解：①若 $a+b+c=0$ ，则 $x=1$ 是原方程的解，即方程至少有一个根，

由一元二次方程的实数根与判别式的关系与判别式的关系可知： $b^2 - 4ac \geq 0$ ，

故①正确；

②∵ 方程 $ax^2 + c = 0$ 有两个不相等的实根，

∴ $\Delta = 0 - 4ac > 0$ ，

$$\therefore -4ac > 0,$$

又 $\because$ 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的判别式为 $\Delta = b^2 - 4ac$,

$$\therefore b^2 - 4ac > 0,$$

$\therefore$ 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个不相等的实数根,

故②正确;

③若 x_1 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根,

$$\text{则根据求根公式得: } x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ 或 } x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$\therefore 2ax_1 + b = \sqrt{b^2 - 4ac} \text{ 或 } 2ax_1 + b = -\sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$\therefore b^2 - 4ac = (2ax_1 + b)^2,$$

故③正确;

综上, ①②③正确.

故选: D.

【点睛】 本题主要考查一元二次方程的实数根与判别式的关系, 以及求根公式, 掌握根的判别式并灵活应用是解题关键.

二、填空题 (本大题共 12 小题, 每小题 2 分, 满分 24 分)

7. 若式子 $\sqrt{2x+1}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围为_____.

【答案】 $x \geq -\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 此题考查了二次根式有意义的条件, 根据二次根式有意义的条件得到 $2x+1 \geq 0$, 解不等式即可得到答案.

【详解】 解: 由题意可得 $2x+1 \geq 0$,

$$\text{解得 } x \geq -\frac{1}{2}.$$

$$\text{故答案为: } x \geq -\frac{1}{2}.$$

8. 若方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个根是 -3 和 4 , 则 $p =$ _____, $q =$ _____.

【答案】 ①. -1 ②. -12

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根与系数的关系，对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，若 x_1, x_2 是该方程的两个实数根，则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ ，据此可得 $-p = -3 + 4 = 1$ ， $q = -3 \times 4 = -12$ ，进而求解即可.

【详解】 解： $\because$ 方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个根是 -3 和 4 ，

$$\therefore -p = -3 + 4 = 1, \quad q = -3 \times 4 = -12.$$

$$\therefore p = -1.$$

故答案为： $-1, -12$.

9. 在实数范围内分解因式： $2x^2 - 4x + 1 =$ _____.

【答案】 $(\sqrt{2}x - \sqrt{2} - 1)(\sqrt{2}x - \sqrt{2} + 1)$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解.

利用配方法将二次三项式配方，再利用平方差公式分解因式.

【详解】 解： 原式 $= 2x^2 - 4x + 1$

$$= 2(x^2 - 2x) + 1$$

$$= 2(x^2 - 2x + 1 - 1) + 1$$

$$= 2[(x-1)^2 - 1] + 1$$

$$= 2(x-1)^2 - 2 + 1$$

$$= 2(x-1)^2 - 1$$

$$= [\sqrt{2}(x-1)]^2 - 1^2$$

$$= [\sqrt{2}(x-1) - 1][\sqrt{2}(x-1) + 1]$$

$$= (\sqrt{2}x - \sqrt{2} - 1)(\sqrt{2}x - \sqrt{2} + 1).$$

故答案为： $(\sqrt{2}x - \sqrt{2} - 1)(\sqrt{2}x - \sqrt{2} + 1)$.

10. 已知 $\sqrt[3]{0.5} \approx 0.7937$ ， $\sqrt[3]{5} \approx 1.7100$ ，则 $\sqrt[3]{500} \approx$ _____.

【答案】 7.937

【解析】

【分析】根据立方根的运算法则即可求解.

【详解】 $\because \sqrt[3]{0.5} \approx 0.7937$

$$\therefore \sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{0.5 \times 1000} = \sqrt[3]{0.5} \times \sqrt[3]{1000} \approx 0.7937 \times 10 = 7.937$$

故答案为: 7.937.

【点睛】此题主要考查立方根的应用, 解题的关键是熟知立方根的性质变形.

11. 已知 a 、 b 、 c 是等腰 ABC 的三条边长, 其中 $b = 2$, 如果 a 、 c 是关于 y 的一元二次方程 $y^2 - 6y + n = 0$ 的两个根, 则 n 的值是_____.

【答案】9

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的性质, 三角形三边关系的应用, 一元二次方程的根与系数的关系. 熟练掌握等腰三角形的性质, 三角形三边关系的应用, 一元二次方程的根与系数的关系是解题的关键.

由 a 、 c 是关于 y 的一元二次方程 $y^2 - 6y + n = 0$ 的两个根, 可得 $a + c = 6$, $ac = n$, 由等边三角形的性质, 三角形三边关系可得 $a = c = 3$, 然后求解作答即可.

【详解】解: $\because a$ 、 c 是关于 y 的一元二次方程 $y^2 - 6y + n = 0$ 的两个根,

$$\therefore a + c = 6, \quad ac = n,$$

$\because a$ 、 b 、 c 是等腰 ABC 的三条边长, 其中 $b = 2$,

$\therefore$ 当 $a = 2$ 时, $c = 4$, 此时不能构成三角形, 舍去;

当 $c = 2$ 时, $a = 4$, 此时不能构成三角形, 舍去;

当 $a = c = 3$ 时, 能构成三角形, $n = ac = 9$,

故答案为: 9.

12. 将 $0.\dot{4}1\dot{3}$ 化成分数: $0.\dot{4}1\dot{3} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{409}{990}$

【解析】

【分析】本题考查了循环小数化分数的方法.

根据混循环小数化分数的方法化为分数即可.

【详解】解: $0.\dot{4}1\dot{3} = \frac{413 - 4}{990} = \frac{409}{990}$.

故答案为: $\frac{409}{990}$.

13. 流感是一种传染性极强的疾病, 如果有 1 人患病, 经过两轮传染后有 121 人患病, 设每轮传染中平均一个人传染了 x 个人, 那么所列方程为_____.

【答案】 $(1+x)^2 = 121$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用, 根据题意, 找准等量关系, 正确列出一元二次方程是解题的关键.

根据传染模型, 每轮传染中平均每人传染 x 人, 经过两轮传染后总患病人数为初始人数的 $(1+x)^2$ 倍, 列方程即可.

【详解】 解: $\because$ 有 1 人患传染病, 且每轮传染中平均一个人传染了 x 个人,

$\therefore$ 第 1 轮传染中有 x 个人被传染, 第一轮传染中有 $(x+1)$ 个人被传染,

第 2 轮: 这 $1+x$ 人每人再传染 x 人, 新增 $x(1+x)$ 个患者,

$\therefore$ 两轮后总患病数为 $1+x+x(1+x)$.

$\therefore$ 两轮后有 121 人患病,

$\therefore$ 列方程得: $1+x+x(1+x) = 121$,

整理得: $(1+x)^2 = 121$,

故答案为: $(1+x)^2 = 121$.

14. 已知 m, n 是方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的两实数根, 则 $m^2 - m - 2n =$ _____

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的根的定义以及根与系数的关系. 根据一元二次方程根的定义可得出 $m^2 = 1 - m$, 根据根与系数的关系得出 $m + n = -1$, 然后整体代入求解即可.

【详解】 解: $\because m, n$ 是方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的两实数根,

$\therefore m^2 + m - 1 = 0$, $m + n = -1$,

$\therefore m^2 = 1 - m$,

$\therefore m^2 - m - 2n$

$$=1-m-m-2n$$

$$=1-2(m+n)$$

$$=1-2\times(-1)$$

$$=3,$$

故答案为：3.

15. 如果最简根式 $\sqrt{x^2-6x}$ 与 $\sqrt{5-2x}$ 是同类二次根式，则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查了同类二次根式的定义，由同类二次根式的定义得 $x^2-6x=5-2x$ ，即可求解；理解定义“几个二次根式，化成最简二次根式后，如果被开方数相同，那么这几个二次根式叫同类二次根式。”是解题的关键.

【详解】 解：由题意得

$$x^2-6x=5-2x,$$

$$\text{解得： } x_1=-1, \quad x_2=5,$$

∵当 $x=5$ 时，

$$x^2-6x=-5<0,$$

∴ $x=5$ 舍去，

∴ $x=-1$ ，

故答案为：-1.

16. 已知关于 x 的一元二次方程 $kx^2+x-3=0$ ，设方程两个实数根分别为 x_1, x_2 ，且满足

$$(x_1+x_2)^2+x_1\cdot x_2=4, \quad k = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的根与系数的关系，解题的关键是掌握如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$

的两根为 x_1, x_2 ，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ ， $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

由题意得所以 $x_1 + x_2 = -\frac{1}{k}$, $x_1 x_2 = -\frac{3}{k}$, 代入 $(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 = 4$ 得到 $\left(-\frac{1}{k}\right)^2 - \frac{3}{k} = 4$, 换元解方程,

然后利用根的判别式得出 $k \geq -\frac{1}{12}$, 即可求解.

【详解】解: 因为 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $kx^2 + x - 3 = 0$ 的两个实数根,

所以 $x_1 + x_2 = -\frac{1}{k}$, $x_1 x_2 = -\frac{3}{k}$.

又因为 $(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 = 4$,

所以 $\left(-\frac{1}{k}\right)^2 - \frac{3}{k} = 4$,

解得 $k_1 = \frac{1}{4}$, $k_2 = -1$,

经检验, 两根都是原方程的解, 且满足 $k \neq 0$,

所以 k 的值为 $\frac{1}{4}$ 或 -1 .

又 $\because$ 方程 $kx^2 + x - 3 = 0$ 有两个实数根,

$\therefore \Delta = 1^2 - 4k \times (-3) = 1 + 12k \geq 0$,

$\therefore k \geq -\frac{1}{12}$,

$\therefore$ 应舍去 $k = -1$.

故答案为: $\frac{1}{4}$.

17. 已知 a, b 是一元二次方程 $x^2 + 2025x + 1 = 0$ 的两个实数根, 则 $a\sqrt{\frac{b}{a}} + b\sqrt{\frac{a}{b}} =$ _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】由根与系数的关系, 得 $a + b = -2025$, $ab = 1$, 可得 $a < 0$, $b < 0$, 然后化简代入求值.

【详解】解: $\because a, b$ 是一元二次方程 $x^2 + 2025x + 1 = 0$ 的两个实数根,

$\therefore a + b = -2025$, $ab = 1$,

$\therefore a < 0$, $b < 0$,

$\therefore a\sqrt{\frac{b}{a}} + b\sqrt{\frac{a}{b}} = -a \times \frac{\sqrt{ab}}{a} - b \times \frac{\sqrt{ab}}{b} = -\sqrt{ab} - \sqrt{ab} = -2\sqrt{ab} = -2$,

故答案为: -2 .

【点睛】 本题考查一元二次方程根与系数的关系，以及二次根式的化简，熟练掌握一元二次方程根与系数的关系是解题的关键.

18. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 3x + m^2 + m = 0 (m > 0)$ ，当 $m = 1, 2, 3, \dots, 2022$ 时，相应的一元二次方

程的两根分别记为 $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \dots; \alpha_{2022}, \beta_{2022}$ ，则 $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_{2022}} + \frac{1}{\beta_{2022}}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{6066}{2023}$

【解析】

【分析】利用根与系数的关系得到 $\alpha_1 + \beta_1 = 3$ ， $\alpha_1\beta_1 = 1 \times 2$ ； $\alpha_2 + \beta_2 = 3$ ， $\alpha_2\beta_2 = 2 \times 3$ ；... $\alpha_{2022} + \beta_{2022} = 3$ ，

$\alpha_{2022}\beta_{2022} = 2022 \times 2023$ ；把原式变形，再代入，即可求出答案.

【详解】解： $\because x^2 - 3x + m^2 + m = 0$ ， $m = 1, 2, 3, \dots, 2022$ ，

$\therefore$ 由根与系数的关系得： $\alpha_1 + \beta_1 = 3$ ， $\alpha_1\beta_1 = 1 \times 2$ ； $\alpha_2 + \beta_2 = 3$ ， $\alpha_2\beta_2 = 2 \times 3$ ；... $\alpha_{2022} + \beta_{2022} = 3$ ，

$\alpha_{2022}\beta_{2022} = 2022 \times 2023$ ；

$$\therefore \text{原式} = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\alpha_1\beta_1} + \frac{\alpha_2 + \beta_2}{\alpha_2\beta_2} + \dots + \frac{\alpha_{2022} + \beta_{2022}}{\alpha_{2022}\beta_{2022}}$$

$$= \frac{3}{1 \times 2} + \frac{3}{2 \times 3} + \dots + \frac{3}{2022 \times 2023}$$

$$= 3 \times \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} \right)$$

$$= 3 \times \left(1 - \frac{1}{2023} \right)$$

$$= 3 \times \frac{2022}{2023}$$

$$= \frac{6066}{2023}$$

故答案为： $\frac{6066}{2023}$

【点睛】 本题考查了一元二次方程根与系数的关系：若 x_1 ， x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的

两根时， $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

三.解答题 (本大题共 8 小题，58 分)

19. 解方程:

$$(1) \quad 3(x-1)^2 = x^2 - 1$$

$$(2) \quad \frac{x}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$$

【答案】 (1) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$;

$$(2) \quad x = -3$$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程与分式方程的解法，解题的关键是整式方程通过展开化简后因式分解求解，分式方程需去分母转整式方程并检验增根.

(1) 将方程展开化简为一元二次方程，因式分解求解；

(2) 分式方程去分母转整式方程，化简求解后检验增根，即可解答.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } 3(x-1)^2 = x^2 - 1$$

$$3(x-1)^2 - (x^2 - 1) = 0$$

$$3(x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 1) = 0$$

$$3x^2 - 6x + 3 - x^2 + 1 = 0$$

$$2x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

$$\text{解得 } x_1 = 1, \quad x_2 = 2;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \frac{x}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$$

$$x(x+2) - (x-2) = 8$$

$$x^2 + 2x - x + 2 = 8$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

$$x_1 = -3 \text{ 或 } x_2 = 2$$

检验：当 $x = 2$ 时， $x - 2 = 0$ ，（舍去）.

$\therefore$ 方程的解为 $x = -3$.

20. 计算：

$$(1) \frac{\sqrt{75}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - 6\sqrt{\frac{1}{3}} - (\sqrt{3}-2)^0$$

$$(2) 5\sqrt{xy} \div \frac{5}{2}\sqrt{5x^3} \div \sqrt{\frac{y}{x^2}}$$

【答案】 (1) $\sqrt{3} + \frac{1}{2}$

$$(2) \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算.

(1) 先化简二次根式，分母有理化，并计算零指数幂，再计算加减即可；

(2) 先计算二次根式的除法，再化简二次根式即可.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned} \text{解：} & \frac{\sqrt{75}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - 6\sqrt{\frac{1}{3}} - (\sqrt{3}-2)^0 \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} \times (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1) \times (\sqrt{3}+1)} - 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{3+\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3} - 1 \\ &= \frac{5\sqrt{3}+3+\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3} - 1 \\ &= 3\sqrt{3} + \frac{3}{2} - 2\sqrt{3} - 1 \\ &= \sqrt{3} + \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}
 \text{解: } & 5\sqrt{xy} \div \frac{5}{2}\sqrt{5x^3} \div \sqrt{\frac{y}{x^2}} \\
 &= \left(5 \div \frac{5}{2} \div 1\right) \sqrt{xy \div 5x^3 \div \frac{y}{x^2}} \\
 &= \left(5 \times \frac{2}{5} \times 1\right) \sqrt{\frac{xy}{5x^3} \times \frac{x^2}{y}} \\
 &= 2\sqrt{\frac{1}{5}} \\
 &= \frac{2\sqrt{5}}{5}.
 \end{aligned}$$

21. 已知 $\sqrt{(x-100)^2} + (\sqrt{98-x})^2 = 200$, $y = \sqrt{m+24} + \sqrt{m-1} + \sqrt{1-m}$, 求 $y-x$ 的平方根.

【答案】 $\pm\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质、双重非负性以及求一个数的平方根，先因为 $\sqrt{(x-100)^2} + (\sqrt{98-x})^2 = 200$ ，得出 $x \leq 98$, $x-100 < 0$ ，即可化简得 $100-x+98-x=200$ ，算出 x 的值，因为 $y = \sqrt{m+24} + \sqrt{m-1} + \sqrt{1-m}$ ，得 $m=1$ ，求出 m 的值、 y 的值，代入 $y-x$ ，即可作答.

【详解】 解: $\because \sqrt{(x-100)^2} + (\sqrt{98-x})^2 = 200$,

$$\therefore x \leq 98, \quad x-100 < 0,$$

$$\therefore 100-x+98-x=200,$$

解得 $x=-1$,

$$\because y = \sqrt{m+24} + \sqrt{m-1} + \sqrt{1-m},$$

$$\therefore m-1 \geq 0, \quad 1-m \geq 0,$$

$$\therefore m=1,$$

$$\text{则 } y = \sqrt{1+24} + \sqrt{1-1} + \sqrt{1-1} = \sqrt{25} = 5,$$

$$\therefore y-x = 5 - (-1) = 5+1 = 6,$$

则 $y-x$ 的平方根为 $\pm\sqrt{6}$.

22. 先化简再求值: $\frac{a^2-a-6}{a+2}-\frac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}$, 其中 $a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式的化简求值, 根据 a 的大小化简 $\sqrt{a^2-2a+1}$ 是解题的关键. 先将分子和分母分解因式, 并根据二次根式的性质化简, 再约分, 最后代入计算即可.

【详解】 解: $\because a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}$

$$\therefore a-1=2-\sqrt{3}-1=1-\sqrt{3}<0$$

$$\text{原式}=\frac{(a-3)(a+2)}{a+2}-\frac{\sqrt{(a-1)^2}}{a(a-1)}$$

$$=a-3-\frac{1-a}{a(a-1)}$$

$$=a-3+\frac{1}{a}$$

当 $a=2-\sqrt{3}$ 时

$$\text{原式}=2-\sqrt{3}-3+\frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

$$=2-\sqrt{3}-3+\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$=2-\sqrt{3}-3+2+\sqrt{3}$$

$$=1$$

23. 已知关于 x 的方程 $(m^2-m)x^2-4mx+4=0$ 有两个不相等的实数根.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 若 m 为整数, 且 $m<3$, a 是方程的一个根, 求代数式 $2a^2-2a-\frac{3a^2-1}{2}+1$ 的值.

【答案】 (1) $m>0$ 且 $m\neq 1$

(2) $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的判别式，一元二次方程的定义，代数式求值，理解根的判别式是解答关键.

(1) 根据一元二次方程的定义，根的判别式来求解；

(2) 根据题意先求出 m ，进而得到 $a^2 - 4a = -2$ ，再代入代数式中进行计算求解.

【小问 1 详解】

解：由题意得： $\because m^2 - m \neq 0$,

$$\therefore m_1 \neq 0, \quad m_2 \neq 1,$$

$$\Delta = (-4m)^2 - 4(m^2 - m) \times 4 = 16m > 0.$$

$$\therefore m > 0,$$

$$\therefore m > 0 \text{ 且 } m \neq 1.$$

【小问 2 详解】

解：由题意得： $0 < m < 3$ ，且为 $m \neq 1$ 的整数，

$$\therefore m = 2.$$

将 $x = a$ ， $m = 2$ 代入 $(m^2 - m)x^2 - 4mx + 4 = 0$

$$\text{得： } a^2 - 4a = -2,$$

$$\therefore 2a^2 - 2a - \frac{3a^2 - 1}{2} + 1$$

$$= 2a^2 - 2a - \frac{3a^2}{2} + \frac{1}{2} + 1$$

$$= \frac{a^2}{2} - 2a + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 - 4a) + \frac{3}{2}$$

将 $a^2 - 4a = -2$ 代入 $\frac{1}{2}(a^2 - 4a) + \frac{3}{2}$ 中

$$\frac{1}{2}(a^2 - 4a) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot (-2) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

24. 学校购买一批奖品. 已知 A 种奖品的单价比 B 种奖品单价便宜 9 元，用 128 元购买 A 种奖品的数量和用 272 元购买 B 种奖品的数量总共是 32 个.

(1) 求 A 、 B 两种奖品的单价各是多少元?

(2) 该校计划购买 A 、 B 两种奖品共 80 个, 且 A 种奖品的数量不大于 B 种奖品数量的 3 倍, 请你设计出最省钱的购买方案, 并求出最低购买费用.

【答案】 (1) A 奖品的单价 8 元, 则 B 奖品的单价是 17 元

(2) 购买 A 奖品 80 个, 购买 B 奖品 20 个, 费用最小, 最小费用为 820 元.

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的应用, 不等式的应用, 一次函数的应用, 解题的关键:

(1) 设 A 奖品的单价 x 元, 则 B 奖品的单价是 $(x+9)$ 元, 根据 “用 128 元购买 A 种奖品的数量和用 272 元购买 B 种奖品的数量总共是 32 个” 列方程求解即可;

(2) 设购买 A 奖品 a 个, 则购买 B 奖品 $(80-a)$ 个, 根据 “ A 种奖品的数量不大于 B 种奖品数量的 3 倍” 列不等式求出 a 的取值范围, 设总费用为 w 元, 则可求出 $w = -9a + 1360$, 然后根据一次函数的性质求解即可.

【小问 1 详解】

解: 设 A 奖品的单价 x 元, 则 B 奖品的单价是 $(x+9)$ 元,

根据题意, 得 $\frac{128}{x} + \frac{272}{x+9} = 32$,

去分母, 并化简得 $2x^2 - 7x - 72 = 0$,

解得 $x_1 = 8$, $x_2 = -\frac{9}{2}$,

经检验, $x_1 = 8$, $x_2 = -\frac{9}{2}$ 都是原方程的解, 但 $x_2 = -\frac{9}{2}$ 不符合实际意义,

$\therefore x = 8$, $x + 9 = 17$,

答: A 奖品的单价 8 元, 则 B 奖品的单价是 17 元;

【小问 2 详解】

解: 设购买 A 奖品 a 个, 则购买 B 奖品 $(80-a)$ 个,

$\because A$ 种奖品的数量不大于 B 种奖品数量的 3 倍,

$\therefore a \leq 3(80-a)$,

解得 $a \leq 60$,

设总费用为 w 元,

根据题意, 得 $w = 8a + 17(80-a) = -9a + 1360$,

$\therefore -9 < 0$,

$\therefore w$ 随 a 的增大而减小,

$\therefore$ 当 $a = 60$ 时, w 有最小值, 最小值为 $-9 \times 60 + 1360 = 820$, 此时 $80 - a = 20$,

即购买 A 奖品 80 个, 购买 B 奖品 20 个, 费用最小, 最小费用为 820 元.

25. 阅读下列材料: 利用完全平方公式, 将多项式 $x^2 + bx + c$ 变形为 $(x + m)^2 + n$ 的形式, 然后由

$(x + m)^2 \geq 0$ 就可求出多项式 $x^2 + bx + c$ 的最小值.

例题: 求多项式 $x^2 - 4x + 5$ 的最小值.

解: $x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1$. 因为 $(x - 2)^2 \geq 0$ 所以 $(x - 2)^2 + 1 \geq 1$

当 $x = 2$ 时, $(x - 2)^2 + 1 = 1$ 因此 $(x - 2)^2 + 1$ 有最小值, 最小值为 1, 即 $x^2 - 4x + 5$ 的最小值为 1.

通过阅读, 理解材料的解题思路, 请解决以下问题:

(1) 【理解探究】

已知代数式 $A = x^2 + 10x + 20$, 则 A 的最小值为_____;

(2) 【类比应用】

张大爷家有甲、乙两块长方形菜地, 已知甲菜地的两边长分别是 $(3a + 2)$ 米、 $(2a + 5)$ 米, 乙菜地的两边长分别是 $5a$ 米、 $(a + 5)$ 米, 试比较这两块菜地的面积 $S_{\text{甲}}$ 和 $S_{\text{乙}}$ 的大小, 并说明理由;

(3) 【拓展升华】

已知实数 x 和 y 满足 $x^2 + 3x + y - 3 = 0$, 求 $x + y$ 的最大值.

【答案】(1) -5

(2) $S_{\text{甲}} > S_{\text{乙}}$, 理由见解析

(3) 4

【解析】

【分析】此题考查了完全平方公式的应用.

(1) 仿照材料的方法将代数式 $x^2 + 10x + 20$ 变形为 $(x + 5)^2 - 5$, 再利用非负数的性质即可求出最小值;

(2) 用长方形面积公式分别表示出甲乙两块菜地的面积, 再利用作差法比较大小即可得出结论;

(3) 从给定方程中表示出 y , 代入 $x + y$ 得到二次表达式, 再配方求最大值.

【小问 1 详解】

解: $A = x^2 + 10x + 20 = x^2 + 10x + 25 - 5 = (x + 5)^2 - 5$,

因为 $(x+5)^2 \geq 0$ 所以 $(x+5)^2 - 5 \geq -5$, 当 $x = -5$ 时, $(x+5)^2 - 5 = -5$,

因此 $(x+5)^2 - 5$ 有最小值, 最小值为 -5 , 即 $x^2 + 10x + 20$ 的最小值为 -5 ,

$\therefore A$ 的最小值为 -5 ;

故答案为: -5 ;

【小问 2 详解】

解: $S_{\text{甲}} > S_{\text{乙}}$, 理由如下:

甲菜地的面积 $S_{\text{甲}} = (3a+2)(2a+5) = 6a^2 + 19a + 10$,

乙菜地的面积 $S_{\text{乙}} = 5a \cdot (a+5) = 5a^2 + 25a$,

$S_{\text{甲}} - S_{\text{乙}} = (6a^2 + 19a + 10) - (5a^2 + 25a) = a^2 - 6a + 10 = (a-3)^2 + 1$,

因为 $(a-3)^2 \geq 0$, 所以 $(a-3)^2 + 1 > 0$,

即 $S_{\text{甲}} - S_{\text{乙}} > 0$,

所以 $S_{\text{甲}} > S_{\text{乙}}$;

【小问 3 详解】

解: $\because x^2 + 3x + y - 3 = 0$,

$\therefore y = -x^2 - 3x + 3$,

$\therefore x + y = x + (-x^2 - 3x + 3) = -x^2 - 2x + 3$,

$\because -x^2 - 2x + 3 = -(x^2 + 2x) + 3 = -(x^2 + 2x + 1 - 1) + 3 = -(x+1)^2 + 4$,

又 $\because -(x+1)^2 \leq 0$,

$\therefore -(x+1)^2 + 4 \leq 4$,

当 $x = -1$ 时, 取最大值 4 ,

故 $x + y$ 的最大值为 4 .