

市北初级中学教育集团 2025-2026 学年八年级上学期期中考试数学试卷

一. 选择题 (共 6 小题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 把方程 $2x(x-1)=3x$ 化成一元二次方程的一般形式, 则二次项系数、一次项系数、常数项分别是 ()
- A. 2, 1, 0 B. 2, -5, 0 C. 2, -3, -1 D. 2, 5, 0

【答案】B

【解析】

【分析】将原方程整理为一元二次方程的一般形式, 根据二次项系数、一次项系数、常数项的概念即可得出结果.

【详解】解: 方程 $2x(x-1)=3x$,

整理得: $2x^2-5x=0$,

则二次项系数为 2, 一次项系数为 -5, 常数项为 0.

故选: B.

【点睛】此题考查了一元二次方程的一般形式, 其一般形式为 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$, 其中 ax^2 叫做二次项, a 叫做二次项系数; bx 叫做一次项; c 叫做常数项. 一次项系数 b 和常数项 c 可取任意实数, 二次项系数 a 是不等于 0 的实数.

2. 已知 a 的平方根是 ± 8 , 则 a 的立方根是 ()

- A. 2 B. 4 C. ± 2 D. ± 4

【答案】B

【解析】

【分析】根据乘方运算, 可得 a 的值, 根据开方运算, 可得立方根.

【详解】 $\because a$ 的平方根是 ± 8 ,

$\therefore a=64$,

$\therefore \sqrt[3]{64}=4$.

故选: B.

【点睛】本题考查了立方根, 先算乘方, 再算开方.

3. 下列方程中, 关于 x 的一元二次方程是 ()

- A. $x^2+2x=x^2-1$ B. $ax^2+bx+c=0$

C. $3(x+1)^2 = 2(x+1)$

D. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 2 = 0$

【答案】C

【解析】

【分析】根据一元二次方程的概念依次判断即可.

【详解】解: A、 $x^2 + 2x = x^2 - 1$, 移项合并后无二次项, 是一元一次方程, 不符合题意;

B、 $ax^2 + bx + c = 0$, 当 $a=0$ 时, 是一元一次方程, 不符合题意;

C、 $3(x+1)^2 = 2(x+1)$ 是一元二次方程, 符合题意;

D、 $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 2 = 0$, 等式左边不是整式, 不符合题意,

故选: C.

【点睛】本题考查一元二次方程的概念, 熟练掌握一元二次方程的概念是解答本题的关键. 判断一个方程是否是一元二次方程, 首先要看是否是整式方程, 然后看化简后是否是只含有一个未知数且未知数的最高次数是 2.

4. 如果最简二次根式 $\sqrt{3a-8}$ 与 $\sqrt{17-2a}$ 能够合并, 那么 a 的值为 ()

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】D

【解析】

【分析】根据两最简二次根式能合并, 得到被开方数相同, 然后列一元一次方程求解即可.

【详解】根据题意得, $3a-8=17-2a$,

移项合并, 得 $5a=25$,

系数化为 1, 得 $a=5$.

故选 D.

【点睛】本题考查了最简二次根式, 利用好最简二次根式的被开方数相同是解题的关键.

5. 下列说法正确的是 ()

A. 任何数都有平方根

B. ± 2 是 $\sqrt{64}$ 的立方根

C. $\sqrt{a^2} = a$

D. 算术平方根是非负数

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查平方根和立方根的基本概念.

选项 A 错误, 因为负数在实数范围内没有平方根; 选项 B 错误, 因为 $\sqrt[3]{64} = 8$, 8 的立方根是 2, 不是 ± 2 ;

选项 C 错误, 因为 $\sqrt{a^2} = |a|$, 不一定等于 a ; 选项 D 正确, 因为算术平方根的定义是非负数.

【详解】解: $\because$ 负数没有平方根,

$\therefore$ A 错误;

$\because \sqrt[3]{64} = 8$, 8 的立方根是 2,

$\therefore$ B 错误;

$\because \sqrt{a^2} = |a|$, 当 $a < 0$ 时, $|a| \neq a$,

$\therefore$ C 错误;

$\because$ 算术平方根的定义是非负数 (包括 0),

$\therefore$ D 正确.

故选: D.

6. 定义: 如果一元二次方程 $ax^2 + bx - c = 0$ ($a \neq 0$) 满足 $a - b - c = 0$, 那么我们称这个方程为“凤凰”方

程. 已知 $ax^2 + bx - c = 0$ ($a \neq 0$) 是“凤凰”方程, 且有两个相等的实数根, 则下列结论正确的是 ()

A. $a = c$

B. $a = b$

C. $a + c = 0$

D. $a = b = c$

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意得 $a - b - c = 0$, 再根据 $\Delta = 0$, 即可求出 a 、 b 、 c 之间的关系.

【详解】 $\because ax^2 + bx - c = 0$ ($a \neq 0$) 是“凤凰”方程

$$\therefore a - b - c = 0 \text{ ①}$$

又 $\because$ 一元二次方程 $ax^2 + bx - c = 0$ ($a \neq 0$) 有两个相等的实数根

$$\therefore \Delta = b^2 - 4a(-c) = b^2 + 4ac = 0 \text{ ②}$$

由①式得

$$b = a - c \text{ ③}$$

把③式代入②式得 $(a - c)^2 + 4ac = 0$

$$\therefore a^2 - 2ac + c^2 + 4ac = 0$$

$$\therefore a^2 + 2ac + c^2 = 0$$

$$\therefore (a+c)^2 = 0$$

$$\therefore a+c=0$$

故选：C

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式.读懂题意并且熟记一元二次方程根的判别式，会根据根的判别式求字母的值是解题的关键.

二. 填空题 (共 12 小题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 比较大小: $\sqrt{7}$ _____ 3. (选填 “>” “<” 或 “=”)

【答案】 <

【解析】

【分析】 本题考查了实数大小比较，算术平方根，利用平方法比较大小即可.

【详解】 解: $\because (\sqrt{7})^2 = 7, 3^2 = 9, 7 < 9,$

$$\therefore \sqrt{7} < 3.$$

故答案为: <.

8. 方程 $(x+2)(x-5)=0$ 的根是 _____ .

【答案】 $x_1 = -2, x_2 = 5$

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的解法.

利用因式分解法求解即可.

【详解】 解: $\because (x+2)(x-5)=0,$

$$\therefore x+2=0 \text{ 或 } x-5=0,$$

$$\text{解得: } x_1 = -2, x_2 = 5.$$

故答案为: $x_1 = -2, x_2 = 5$

9. 要使式子 $\frac{\sqrt{m+1}}{2}$ 有意义, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \geq -1$

【解析】

【分析】 此题考查了二次根式有意义的条件，根据二次根式的被开方数有意义的条件即可求出 m 的范围，

解题的关键是熟练掌握二次根式有意义的条件.

【详解】解: $\because \frac{\sqrt{m+1}}{2}$ 有意义,

$$\therefore m+1 \geq 0,$$

$$\therefore m \geq -1,$$

故答案为: $m \geq -1$.

10. 计算: $\sqrt{36} - \sqrt[3]{27} =$ _____ .

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查了求算术平方根和立方根.

先计算 36 的算术平方根和 27 的立方根, 再求差即可.

【详解】解: $\sqrt{36} - \sqrt[3]{27} = 6 - 3 = 3$.

故答案为: 3.

11. 清代袁枚的一首诗苔中的诗句“白日不到处, 青春恰自来. 苔花如米小, 也学牡丹开”若苔花的花粉直径约为米 0.0000084, 则数据 0.0000084 用科学记数法表示为_____.

【答案】 8.4×10^{-6}

【解析】

【分析】 本题主要考查了科学记数法, 科学记数法的表现形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同, 当原数绝对值大于等于 10 时, n 是正数, 当原数绝对值小于 1 时 n 是负数; 由此进行求解即可得到答案.

【详解】解: $0.0000084 = 8.4 \times 10^{-6}$,

故答案为: 8.4×10^{-6} .

12. 已知 $\sqrt[3]{5.23} \approx 1.735$, 且 $\sqrt[3]{x} \approx 17.35$, 则 $x \approx$ _____ .

【答案】 5230

【解析】

【分析】 本题考查了求一个数的立方根.

根据立方根的性质, 被开方数扩大 1000 倍, 立方根扩大 10 倍. 由已知条件, 立方根从 1.735 变为 17.35,

是原来的 10 倍，因此被开方数应为原来的 1000 倍.

【详解】解： $\because \sqrt[3]{5.23} \approx 1.735$ ，且 $\sqrt[3]{x} \approx 17.35$ ，

$$\therefore \sqrt[3]{x} \approx 10 \times 1.735 \approx 10 \times \sqrt[3]{5.23} = \sqrt[3]{1000 \times 5.23} = \sqrt[3]{5230}，$$

$$\therefore x \approx 5230.$$

故答案为：5230

13. 关于 x 的方程 $(x-2)^2 + 3 = k$ 有实数根，那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \geq 3$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的判别式，根据 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ ，说明一元二次方程有实数根，据此列式代入数值进行计算，即可作答.

【详解】解： $(x-2)^2 + 3 = k$

$$\text{整理得， } x^2 - 4x + 7 - k = 0$$

$\because$ 关于 x 的方程 $(x-2)^2 + 3 = k$ 有实数根

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (7 - k) \geq 0$$

解得 $k \geq 3$

故答案为： $k \geq 3$.

14. 已知方程 $x^2 - 6x + m^2 - 2m + 5 = 0$ 的一个根为 2，则 $m =$ _____.

【答案】 3 或 -1

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程解的定义，解一元二次方程. 将已知根代入方程，得到关于 m 的方程，解该二次方程即可.

【详解】 将 $x = 2$ 代入方程 $x^2 - 6x + m^2 - 2m + 5 = 0$ ，

$$\text{得： } 2^2 - 6 \times 2 + m^2 - 2m + 5 = 0$$

$$4 - 12 + m^2 - 2m + 5 = 0$$

$$m^2 - 2m - 3 = 0$$

$$\text{因式分解得： } (m-3)(m+1) = 0$$

故 $m = 3$ 或 $m = -1$.

故答案为: 3 或 -1.

15. 解不等式: $x - \sqrt{3} < \sqrt{2}x$ 的解集是_____.

【答案】 $x > -\sqrt{3} - \sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查解不等式, 二次根式的运算.

根据解不等式的步骤求解, 最后将分母进行有理化, 即可解答.

【详解】 $x - \sqrt{3} < \sqrt{2}x$,

移项, 得: $x - \sqrt{2}x < \sqrt{3}$,

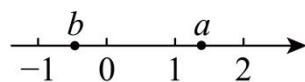
合并同类项, 得: $(1 - \sqrt{2})x < \sqrt{3}$,

系数化为 1, 得: $x > \frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{2}}$,

即 $x > -\sqrt{3} - \sqrt{6}$.

故答案为: $x > -\sqrt{3} - \sqrt{6}$

16. 已知实数 a, b 在数轴上的对应点位置如图, 则化简 $|a + b| - \sqrt{(a - 2)^2}$ 的结果是_____.



【答案】 $2a + b - 2$

【解析】

【分析】 由数轴知 $-1 < b < 0 < 1 < a < 2$, 进而可判断 $a - 2$ 及 $a + b$ 的符号, 从而可对绝对值及二次根式进行化简, 最后可求得化简后的结果.

【详解】 解: $\because -1 < b < 0 < 1 < a < 2$

$\therefore a - 2 < 0, a + b > 0,$

$\therefore |a + b| - \sqrt{(a - 2)^2} = (a + b) + (a - 2) = 2a + b - 2,$

故答案为: $2a + b - 2$.

17. 小明做数学题时, 发现 $\sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{2 - \frac{2}{5}} = 2\sqrt{\frac{2}{5}}$; $\sqrt{3 - \frac{3}{10}} = 3\sqrt{\frac{3}{10}}$; $\sqrt{4 - \frac{4}{17}} = 4\sqrt{\frac{4}{17}}$; ..., 按此

规律，若 $\sqrt{a - \frac{8}{b}} = a\sqrt{\frac{8}{b}}$ (a, b 为正整数)，则 $a + b =$ _____.

【答案】 73

【解析】

【分析】 此题考查了数字类规律，找出一系列等式的规律为 $\sqrt{n - \frac{n}{n^2 + 1}} = n\sqrt{\frac{n}{n^2 + 1}}$ ($n \geq 1$ 的正整数)，令 $n = 8$ 求出 a 与 b 的值，即可求得 $a + b$ 的值.

【详解】 解：根据题中的规律得： $\sqrt{n - \frac{n}{n^2 + 1}} = n\sqrt{\frac{n}{n^2 + 1}}$ ($n \geq 1$ 的正整数)，

$$\therefore \sqrt{a - \frac{8}{b}} = a \cdot \sqrt{\frac{8}{b}},$$

$$\therefore a = 8, \quad b = 8^2 + 1 = 65,$$

$$\text{则 } a + b = 8 + 65 = 73.$$

故答案为：73.

18. 赵爽在其所著的《勾股圆方图注》中记载了一元二次方程的几何解法，以 $x^2 + 2x - 35 = 0 (x > 0)$ 为例，构造方法如下：

第一步：将原方程 $x^2 + 2x - 35 = 0 (x > 0)$ 变形为 $x(x + 2) = 35 (x > 0)$ ；

第二步：画四个长为 $x + 2$ ，宽为 x 的矩形，按如图 1 所示的方式拼成一个“空心”正方形，则图 1 中大正方形的面积可表示为 $(x + x + 2)^2$ ，还可表示为四个矩形与一个边长为 2 的小正方形面积之和，即

$$4x(x + 2) + 2^2 = 4 \times 35 + 4;$$

第三步：得新方程 $(x + x + 2)^2 = 144$ ；因为 x 表示边长，所以 $2x + 2 = 12$ ，即 $x = 5$ ．一般地，对于形如 $x^2 + ax = b$ 的一元二次方程可以构造图 2 来解．已知图 2 是由四个面积为 4 的相同矩形构成，中间围成的正方形面积为 2，那么此方程的正根为 _____．

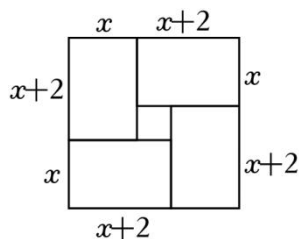
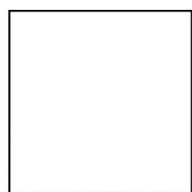


图 (1)



画图区

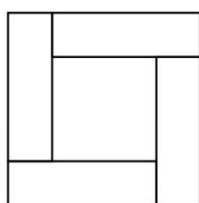


图 (2)

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 题目主要考查解一元二次方程，理解新定义是解题关键.

先根据材料提示分解为 $x(x+a)=b$ ，图形结合分析，即可得 $b=4, a=\sqrt{2}$ ，由此即可求出答案.

【详解】 解： $\because x^2+ax=b$,

$$\therefore x(x+a)=b,$$

$\because$ 图 2 是由四个面积为 4 的相同矩形构成，中间围成的正方形面积为 2,

$$\therefore x(x+a)=4,$$

$$\therefore b=4,$$

$\because$ 中间围成的正方形面积为 2,

$$\therefore \text{边长为 } \sqrt{2},$$

$$\therefore a=\sqrt{2},$$

$$\because (x+x+\sqrt{2})^2=4\times 4+2=18, \text{ } x \text{ 表示边长},$$

$$\therefore 2x+\sqrt{2}=3\sqrt{2}.$$

$$\therefore x=\sqrt{2}.$$

故答案为： $\sqrt{2}$.

三. 解答题 (共 7 题, 第 19-22 题, 每小题 4 分; 第 23 题 6 分; 第 24、25 题, 每题 10 分; 满分 58 分)

19. 计算: $\sqrt{18}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

【答案】 $2\sqrt{2}+\sqrt{3}-3$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算，利用二次根式的性质化简，再合并即可，掌握二次根式的性质和运算法则是解题的关键.

【详解】 解： 原式 $=3\sqrt{2}-(\sqrt{2}+1)-(2-\sqrt{3})$
 $=3\sqrt{2}-\sqrt{2}-1-2+\sqrt{3}$

$$= 2\sqrt{2} + \sqrt{3} - 3.$$

20. 化简:

$$(1) \sqrt{0.2m} + \frac{1}{m}\sqrt{5m^3} - m\sqrt{\frac{125}{m}};$$

$$(2) \frac{1}{3}\sqrt{x^4y} \cdot \left(-4\sqrt{\frac{y^2}{x}}\right) \div \frac{3}{4}\sqrt{xy^2}.$$

【答案】 (1) $-\frac{19}{5}\sqrt{5m}$

(2) $-\frac{16}{9}x\sqrt{y}$

【解析】

【分析】 本题考查了实数的混合运算，二次根式的运算，熟练掌握运算法则是解题的关键.

(1) 根据分母有理化，二次根式的性质分别运算，然后合并即可；

(2) 根据二次根式的性质进行化简，然后通过二次根式乘除法进行求解即可.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: } & \sqrt{0.2m} + \frac{1}{m}\sqrt{5m^3} - m\sqrt{\frac{125}{m}} \\ &= \frac{\sqrt{5m}}{5} + \frac{1}{m} \times m\sqrt{5m} - m \times \frac{5\sqrt{5m}}{m} \\ &= \frac{\sqrt{5m}}{5} + \sqrt{5m} - 5\sqrt{5m} \\ &= -\frac{19}{5}\sqrt{5m}. \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}\sqrt{x^4y} \cdot \left(-4\sqrt{\frac{y^2}{x}}\right) \div \frac{3}{4}\sqrt{xy^2} \\ &= \frac{x^2\sqrt{y}}{3} \cdot \left(-\frac{4y\sqrt{x}}{x}\right) \div \frac{3y\sqrt{x}}{4} \\ &= \frac{x^2\sqrt{y}}{3} \cdot \left(-\frac{4y\sqrt{x}}{x}\right) \cdot \frac{4}{3y\sqrt{x}} \\ &= -\frac{16}{9}x\sqrt{y}. \end{aligned}$$

21. 解方程:

$$(1) 16(x+1)^2 = 81;$$

$$(2) (x-3)^2 + 2(x-3) - 24 = 0;$$

$$(3) 2x^2 + 2\sqrt{7}x + 1 = 0;$$

$$(4) 3x^2 - 6x + 2 = 0 \text{ (用配方法)}.$$

【答案】 (1) $x_1 = -\frac{13}{4}, x_2 = \frac{5}{4}$

(2) $x_1 = -3, x_2 = 7$

(3) $x_1 = \frac{-\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$

(4) $x_1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程，熟知解一元二次方程的方法是解题的关键.

(1) 利用直接开平方根的方法解方程即可;

(2) 把 $x-3$ 当成一个整体，利用十字相乘法把方程左边分解因式，再解方程即可;

(3) 利用公式法解方程即可;

(4) 利用配方法解方程即可.

【小问 1 详解】

解: $16(x+1)^2 = 81,$

$$(x+1)^2 = \frac{81}{16},$$

$$x+1 = \pm \frac{9}{4},$$

解得 $x_1 = -\frac{13}{4}, x_2 = \frac{5}{4};$

【小问 2 详解】

解: $(x-3)^2 + 2(x-3) - 24 = 0,$

$$[(x-3)-4][(x-3)+6] = 0,$$

$$x-3-4=0 \text{ 或 } x-3+6=0,$$

解得 $x_1 = -3, x_2 = 7;$

【小问 3 详解】

解: $2x^2 + 2\sqrt{7}x + 1 = 0$

$\therefore a = 2, b = 2\sqrt{7}, c = 1,$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{7})^2 - 4 \times 2 \times 1 = 20 > 0,$

$\therefore x = \frac{-2\sqrt{7} \pm 2\sqrt{5}}{4},$

解得 $x_1 = \frac{-\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2};$

【小问 4 详解】

解: $3x^2 - 6x + 2 = 0$

$3x^2 - 6x = -2$

$x^2 - 2x = -\frac{2}{3}$

$x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{3}$

$(x-1)^2 = \frac{1}{3}$

$x-1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3},$

解得 $x_1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}.$

22. 已知 $\sqrt[3]{x} = 1$, 且 $\sqrt{y-2x} + (z-7)^2 = 0$, 求 $x + y^3 + z$ 的平方根.

【答案】 ± 4

【解析】

【分析】 本题考查立方根, 非负性和平方根, 根据立方根的定义, 求出 x 的值, 非负性求出 y, z 的值, 再根据平方根的定义, 进行求解即可.

【详解】 解: $\because \sqrt[3]{x} = 1,$

$\therefore x = 1,$

$\because \sqrt{y-2x} + (z-7)^2 = 0,$

$\therefore y-2x = y-2 = 0, z-7 = 0,$

解得: $y = 2, z = 7,$

$$\therefore x + y^3 + z = 1 + 2^3 + 7 = 16,$$

$$\therefore x + y^3 + z \text{ 的平方根是 } \pm\sqrt{16} = \pm 4.$$

23. 如图 1, 由 5 个边长为 1 的小正方形组成的长方形, 通过剪拼可以拼成一个正方形 $ABCD$.

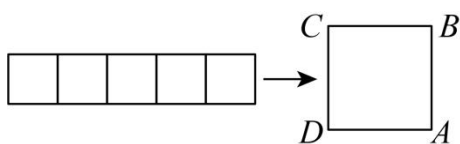


图 1

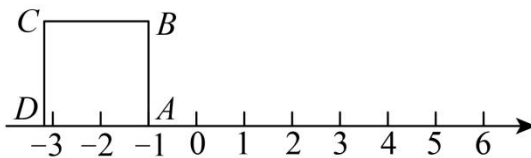


图 2

- (1) 求正方形 $ABCD$ 的边长, 并求出 AB 的长在哪两个连续整数之间;
- (2) 如图 2, 纸片上有数轴, 把图 1 中的正方形 $ABCD$ 放到数轴上, 使得点 A 与 -1 重合, 求点 D 在数轴上表示的数;
- (3) 在 (2) 的基础上以数 1 对应的点为折点, 将数轴向右对折, 则点 D 与数_____对应的点重合.

【答案】 (1) AB 的长 在 2 和 3 之间

(2) $-1 - \sqrt{5}$

(3) $3 + \sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了实数与数轴, 算术平方根, 无理数的估算, 读懂题意是解题的关键.

- (1) 根据题意可求出正方形 $ABCD$ 的面积, 进而得到正方形的边长, 再利用夹逼法即可求出其范围;
- (2) 根据点 A 表示的数和正方形的边长即可得到点 D 表示的数;

(3) 设点 D 与数 x 对应的点重合, 根据对折可得, $\frac{-1 - \sqrt{5} + x}{2} = 1$, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 由题意得, 正方形 $ABCD$ 的面积为: $5 \times 1 \times 1 = 5$,

$$\therefore \text{边长为: } \sqrt{5},$$

$$\therefore \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9},$$

$$\therefore 2 < \sqrt{5} < 3,$$

$\therefore AB$ 的长 在 2 和 3 之间;

【小问 2 详解】

解: 把图 1 中的正方形 $ABCD$ 放到数轴上, 使得点 A 与 -1 重合, 则点 D 在数轴上表示的数为: $-1 - \sqrt{5}$;

【小问 3 详解】

解：设点 D 与数 x 对应的点重合，

由题意得： $\frac{-1-\sqrt{5}+x}{2}=1$ ，

解得： $x=2-(-1-\sqrt{5})=3+\sqrt{5}$ ，

$\therefore$ 点 D 与数 $3+\sqrt{5}$ 对应的点重合.

24. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2-2mx+m-10=0$.

(1) 若该一元二次方程有两个不相等的实数根，求实数 m 的取值范围；

(2) 先化简，再求值： $\frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}+\frac{m-4\sqrt{mn}+4n}{\sqrt{m}-2\sqrt{n}}$ ，其中 m 为 (1) 中取值范围内的最小整数解， n 是原

方程的正根.

【答案】 (1) $m>\frac{5}{3}$ 且 $m\neq 2$

(2) $2\sqrt{m}-3\sqrt{n}$ ， $2\sqrt{3}-3\sqrt{7}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的判别式，解一元二次方程，二次根式的化简求值.

(1) 根据根的判别式大于零且二次项系数不等于零列式求解即可；

(2) 先根据二次根式的运算法则把所给代数式化简，再求出 $m=3$ ， $n=7$ 代入计算即可.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2-2mx+m-10=0$ 有两个不相等的实数根，

$\therefore (-2m)^2-4(m-2)(m-10)>0$ 且 $m-2\neq 0$ ，

$\therefore m>\frac{5}{3}$ 且 $m\neq 2$.

【小问 2 详解】

解： 原式 $=\frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}+\frac{m-4\sqrt{mn}+4n}{\sqrt{m}-2\sqrt{n}}$

$$=\frac{(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}+\frac{(\sqrt{m}-2\sqrt{n})^2}{\sqrt{m}-2\sqrt{n}}$$
$$=\sqrt{m}-\sqrt{n}+\sqrt{m}-2\sqrt{n}=2\sqrt{m}-3\sqrt{n}，$$

$\therefore m$ 为 (1) 中取值范围内的最小整数解,

$$\therefore m = 3,$$

$$\therefore x^2 - 6x - 7 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = 7, x_2 = -1,$$

$\therefore n$ 是原方程的正根,

$$\therefore n = 7,$$

$$\therefore \text{原式} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{7}.$$

25. 我们已经学习了利用配方法解一元二次方程, 其实配方法还有其他重要应用. 例如: 已知 x 可取任何实数, 试求二次三项式 $x^2 - 4x + 5$ 的最小值.

$$\text{解: } x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1;$$

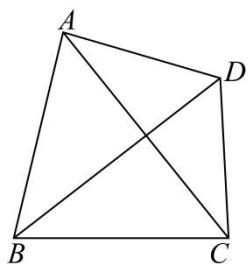
$$\therefore \text{无论 } x \text{ 取何实数, 都有 } (x - 2)^2 \geq 0,$$

$$\therefore (x - 2)^2 + 1 \geq 1, \text{ 即 } x^2 - 4x + 5 \text{ 的最小值为 } 1.$$

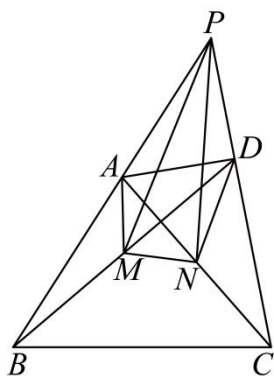
【尝试应用】(1) 请直接写出 $2x^2 - 8x + 10$ 的最小值_____;

【拓展应用】(2) 试说明: 无论 x 取何实数, 二次根式 $\sqrt{x^2 + x + 2}$ 都有意义;

【创新应用】(3) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AC \perp BD$, 若 $AC + BD = 10$, 求四边形 $ABCD$ 的面积最大值.



【挑战应用】(4) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AC \perp BD$, $AC + BD = 10$, 点 M 和点 N 分别是 BD 和 AC 的中点, BA 和 CD 的延长线交于点 P , 则 $\triangle PMN$ 面积的最大值等于_____.



【答案】(1) 2; (2) 见解析; (3) $\frac{25}{2}$; (4) $\frac{25}{8}$

【解析】

【分析】(1) 根据配方法将 $2x^2 - 8x + 10$ 平方形式, 结合其非负性即可求得最小值;

(2) 根据配方法将 $x^2 + x + 2$ 配成 $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$ 形式, 结合其非负性即可求得最小值为正数, 即可知无论 x 取何实数, 二次根式 $\sqrt{x^2 + x + 2}$ 都有意义;

(3) 根据已知得 $BD = 10 - AC$, 由面积公式得 $S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} AC \cdot (10 - AC)$ 展开配成平方形式, 结合非负性和不等式的性质求得最大值即可;

(4) 连结 MC , 由中点的性质得 $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABD}$ 和 $S_{\triangle BCM} = \frac{1}{2} S_{\triangle BCD}$, 则 $S_{\triangle ABM} + S_{\triangle BCM}$
 $= \frac{1}{2} (S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}) = \frac{1}{2} S_{\text{四边形}ABCD}$, 进一步得到 $S_{\triangle CPM} = S_{\triangle MPD} + S_{\triangle MCD} = \frac{1}{2} S_{\triangle BPD} + \frac{1}{2} S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} S_{\triangle BCP}$, 结合 $S_{\triangle CPN} = \frac{1}{2} S_{\triangle CPA}$ 和 $S_{\triangle CMN} = \frac{1}{2} S_{\triangle CAM}$, 得到 $S_{\triangle PMN} = S_{\triangle CPM} - S_{\triangle CPN} - S_{\triangle CMN} = \frac{1}{2} (S_{\triangle ABM} + S_{\triangle BCM})$,
 结合 (3) 知四边形 $ABCD$ 的面积最大值为 $\frac{25}{2}$, 即可求得 $\triangle PMN$ 面积的最大值.

【详解】(1) 解: $2x^2 - 8x + 10 = 2(x^2 - 4x) + 10$
 $= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 10$
 $= 2(x - 2)^2 + 2,$

$\therefore$ 无论 x 取何实数, 都有 $2(x - 2)^2 \geq 0$,

$2(x - 2)^2 + 2 \geq 2$, 即 $2x^2 - 8x + 10$ 的最小值为 2;

故答案为: 2;

$$(2) \text{ 解: } x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4},$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0,$$

$$\therefore x^2 + x + 2 \geq \frac{7}{4},$$

$\therefore$ 无论 x 取何实数, 二次根式 $\sqrt{x^2 + x + 2}$ 都有意义;

$$(3) \because AC \perp BD, \quad AC + BD = 10,$$

$$\therefore BD = 10 - AC,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} AC \cdot (10 - AC)$$

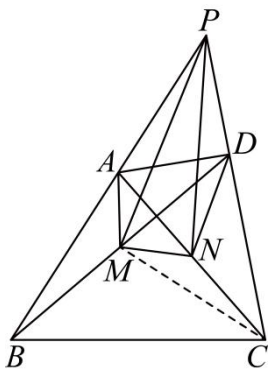
$$= -\frac{1}{2} AC^2 + 5AC$$

$$= -\frac{1}{2} (AC - 5)^2 + \frac{25}{2}$$

$$\therefore -\frac{1}{2} (AC - 5)^2 \leq 0,$$

$\therefore$ 当 $AC = 5$, 四边形 $ABCD$ 的面积最大, 最大值为 $\frac{25}{2}$.

(4) 连结 MC , 如图,



$\therefore$ 点 M 是 BD 的中点,

$$\therefore S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABD}, \quad S_{\triangle BCM} = \frac{1}{2} S_{\triangle BCD},$$

$$\therefore S_{\triangle ABM} + S_{\triangle BCM} = \frac{1}{2} (S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}) = \frac{1}{2} S_{\text{四边形}ABCD},$$

$\therefore$ 点 M 是 BD 的中点, 点 N 是 AC 的中点,

$$\therefore S_{\triangle CPM} = S_{\triangle MPD} + S_{\triangle MCD} = \frac{1}{2} S_{\triangle BPD} + \frac{1}{2} S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} S_{\triangle BCP},$$

$$\therefore S_{\triangle CPN} = \frac{1}{2} S_{\triangle CPA}, \quad S_{\triangle CMN} = \frac{1}{2} S_{\triangle CAM},$$

$$\begin{aligned}
\therefore S_{\triangle PMN} &= S_{\triangle CPM} - S_{\triangle CPN} - S_{\triangle CMN} \\
&= \frac{1}{2}S_{\triangle BCP} - \frac{1}{2}S_{\triangle CAP} - \frac{1}{2}S_{\triangle CAM} \\
&= \frac{1}{2}(S_{\triangle BCP} - S_{\triangle CAP} - S_{\triangle CAM}) \\
&= \frac{1}{2}(S_{\triangle ABM} + S_{\triangle BCM}) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}S_{\text{四边形}ABCD} \\
&= \frac{1}{4}S_{\text{四边形}ABCD},
\end{aligned}$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积最大值为 $\frac{25}{2}$,

$\therefore \triangle PMN$ 面积的最大值为 $\frac{25}{8}$.

【点睛】 本题主要考查完全平方公式的应用，涉及配方法和非负性、不等式的性质、中点的性质，解题的关键是熟悉配方法和中点的性质.