

2025 学年第一学期期中练习卷

八年级数学试卷

2025. 11

(考试时间: 100 分钟满分: 100 分)

一、单项选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列实数中, 是无理数的是 ()

A. $\sqrt[3]{-8}$

B. $0.\dot{2}\dot{5}$

C. $\frac{22}{7}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】无理数就是无限不循环小数. 理解无理数的概念, 一定要同时理解有理数的概念, 有理数是整数与分数的统称. 即有限小数和无限循环小数是有理数, 而无限不循环小数是无理数. 由此即可判定选择项.

【详解】解: A. $\sqrt[3]{-8} = -2$, 是整数, 属于有理数, 故本选项不符合题意;

B. $0.\dot{2}\dot{5}$ 是循环小数, 属于有理数, 故本选项不符合题意;

C. $\frac{22}{7}$ 是分数, 属于有理数, 故本选项不符合题意;

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是无理数, 故本选项符合题意.

故选: D.

【点睛】本题考查无理数的定义, 会判断无理数. 解题的关键是了解它的三种形式: ①开方开不尽的数, 如: $\sqrt{7}$; ②无限不循环小数, 如: $0.2020020002\ldots$ (相邻两个 2 中间依次多 1 个 0); ③含有 π 的数, 如: -2π .

2. 下列说法正确的是 ()

A. 负数没有立方根;

B. -2 是 4 的算术平方根;

C. 立方根是它本身的数只有 0;

D. 互为相反数的两个数的立方根也互为相反数

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了立方根和算术平方根的概念, 相反数的定义, 据此相关性质内容进行逐项分析, 即可作答.

【详解】解：A、负数有立方根，且负数的立方根是负数，故该选项不符合题意；

B、4的算术平方根是2，不是-2，故该选项不符合题意；

C、立方根是本身的数有0、1、-1，故该选项不符合题意；

D、互为相反数的数的立方根也互为相反数，故该选项符合题意；

故选：D.

3. 下列二次根式中，是最简二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{8a}$

B. $\sqrt{\frac{a}{2}}$

C. $\sqrt{a^2-1}$

D. $\sqrt{a^5}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了最简二次根式的定义. 根据最简二次根式的定义（被开方数不含能开得尽方的因数、不含分母，且分母不含根号），逐一判断各选项。

【详解】解：A、 $\sqrt{8a} = \sqrt{4 \times 2a} = 2\sqrt{2a}$ ，含能开得尽方的因数4，不是最简二次根式；

B、 $\sqrt{\frac{a}{2}}$ 被开方数含分母，不是最简二次根式；

C、 $\sqrt{a^2-1}$ 被开方数不含能开得尽方的因式，且不含分母，是最简二次根式；

D、 $\sqrt{a^5} = \sqrt{a^4 \times a}$ 含能开得尽方的因数 a^4 ，不是最简二次根式.

故选：C

4. 下列关于 x 的方程中，一定是一元二次方程的是（ ）

A. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 2 = 0$

B. $(x-2)^2 = 2(x-2)$

C. $ax^2 + bx + c = 0$

D. $x^2 + 2y = 3$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程，只含一个未知数，且最高次数为2的整式方程是一元二次方程，据此判断即可求解，掌握一元二次方程的定义是解题的关键.

【详解】解：A、方程不是整式方程，不是一元二次方程，该选项不合题意；

B、方程化简为 $x^2 - 6x + 8 = 0$ ，是一元二次方程，该选项符合题意；

C、当 $a=0$ 时，方程为 $bx+c=0$ ，是一元一次方程，该选项不合题意；

D、方程含有两个未知数，不是一元二次方程，该选项不合题意；

故选：B.

5. 下列关于 x 的方程中，有两个实数根的是（ ）

A. $x^2 = 2x$

B. $x^2 + x + 2 = 0$

C. $x^2 = -2$

D. $(x-2)^2 + m^2 + 1 = 0$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的判别式. 通过计算每个方程的判别式或直接求解，判断实数根的个数，只有选项A的判别式大于0，有两个实数根，即可作答.

【详解】解：A、方程化为 $x^2 - 2x = 0$ ， $\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 0 = 4 > 0$ ，有两个实数根；

B、方程 $x^2 + x + 2 = 0$ ， $\therefore \Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0$ ，无实数根；

C、方程化为 $x^2 + 2 = 0$ ， $\therefore \Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 2 = -8 < 0$ ，无实数根；

D、方程 $(x-2)^2 + m^2 + 1 = 0$ ，得 $(x-2)^2 = -(m^2 + 1)$ ， $\therefore -(m^2 + 1) \leq -1 < 0$ ， $\therefore (x-2)^2 = -(m^2 + 1)$ 无实数根，

故选：A.

6. 当 $a > 1$ 时，化简 $\sqrt{\left(\frac{1}{a} - a\right)^2} - \frac{1}{a}$ 的结果是（ ）

A. a

B. $-a$

C. $\frac{2}{a} - a$

D. $a - \frac{2}{a}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的性质. 由 $a > 1$ 可知 $\frac{1}{a} - a < 0$ ，因此 $\sqrt{\left(\frac{1}{a} - a\right)^2} = \left|\frac{1}{a} - a\right| = a - \frac{1}{a}$ ，代入原

式，进行化简，即可作答.

【详解】解： $\because a > 1$ ，

$$\therefore \frac{1}{a} < 1 < a,$$

$$\therefore \frac{1}{a} - a < 0,$$

$$\therefore \sqrt{\left(\frac{1}{a}-a\right)^2} = \left|\frac{1}{a}-a\right| = -\left(\frac{1}{a}-a\right) = a - \frac{1}{a},$$

$$\therefore \sqrt{\left(\frac{1}{a}-a\right)^2} - \frac{1}{a} = \left(a - \frac{1}{a}\right) - \frac{1}{a} = a - \frac{2}{a},$$

故选：D.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分）

7. $\frac{25}{81}$ 的平方根是__.

【答案】 $\pm \frac{5}{9}$

【解析】

【详解】解： $\because \left(\pm \frac{5}{9}\right)^2 = \frac{25}{81},$

$\therefore \frac{25}{81}$ 的平方根是 $\pm \frac{5}{9}$ ，即 $\pm \sqrt{\frac{25}{81}} = \pm \frac{5}{9}.$

故答案为 $\pm \frac{5}{9}.$

8. 比较大小： $-2\sqrt{3}$ _____ $-\sqrt{15}$ （填 “>” “<” 或 “=”）

【答案】 >

【解析】

【分析】 本题考查了比较二次根式的大小. 先整理 $-2\sqrt{3} = \sqrt{-12}$ ，根据 $\sqrt{15} > \sqrt{12}$ ，得 $-\sqrt{12} > -\sqrt{15}$ ，则 $-2\sqrt{3} > -\sqrt{15}$ ，即可作答.

【详解】解：依题意， $-2\sqrt{3} = -\sqrt{2^2 \times 3} = -\sqrt{12},$

$\because 15 > 12,$

$\therefore \sqrt{15} > \sqrt{12},$

$\therefore -\sqrt{12} > -\sqrt{15},$

即 $-2\sqrt{3} > -\sqrt{15},$

故答案为：>.

9. 若 $\sqrt{20}$ 与最简二次根式 $\frac{1}{2}\sqrt{2-m}$ 是同类二次根式，则 m 的值为_____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 本题考查了最简二次根式，同类二次根式. 根据同类二次根式的定义，将 $\sqrt{20}$ 化为最简二次根式后，被开方数为 5，因此令 $\frac{1}{2}\sqrt{2-m}$ 的被开方数等于 5，解方程，即可作答.

【详解】 解：依题意， $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$ ，其被开方数为 5，

$\therefore \sqrt{20}$ 与最简二次根式 $\frac{1}{2}\sqrt{2-m}$ 是同类二次根式，

$\therefore 2-m=5$ ，

解得 $m=-3$ ，

故答案为：-3.

10. 计算： $2\sqrt{27} \times \frac{\sqrt{5}}{3} \div 2\sqrt{3} =$ _____.

【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的乘除法，先化简 $\sqrt{27}$ ，将除法转化为乘法，然后进行乘法运算，通过约分得到结果.

【详解】 解： $2\sqrt{27} \times \frac{\sqrt{5}}{3} \div 2\sqrt{3}$

$$= 6\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{5},$$

故答案为： $\sqrt{5}$.

11. 不等式 $2x \geq 1 + \sqrt{5}x$ 的解集是_____.

【答案】 $x \leq -2 - \sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解不等式，根据移项，系数化为 1，再分母有理化解答.

【详解】解：不等式 $2x \geq 1 + \sqrt{5}x$,

移项，得 $(2 - \sqrt{5})x \geq 1$,

两边都除以 $2 - \sqrt{5}$ ，得 $x \leq \frac{1}{2 - \sqrt{5}}$,

即 $x \leq -2 - \sqrt{5}$.

故答案为： $x \leq -2 - \sqrt{5}$.

12. 方程 $5x^2 - 4x = 0$ 的解为_____.

【答案】 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解法解一元二次方程，解题关键是掌握因式分解法解一元二次方程并能熟练运用求解.

通过因式分解法求解一元二次方程.

【详解】解：方程 $5x^2 - 4x = 0$,

提取公因式 x ，得 $x(5x - 4) = 0$,

因此 $x = 0$ 或 $5x - 4 = 0$,

解得： $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{5}$.

故答案为： $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{5}$.

13. 已知 $x = 2$ 是关于 x 的方程 $2x^2 - mx - m^2 = 0$ 的一个根，那么 m 的值是_____.

【答案】 2 或 -4

【解析】

【分析】 本题考查了由一元二次方程的解求参数，因式分解法解一元二次方程. 将 $x = 2$ 代入方程，得到关于 m 的一元二次方程，再进行解方程，即可作答.

【详解】解：依题意，把 $x = 2$ 代入方程 $2x^2 - mx - m^2 = 0$,

得 $2 \times 2^2 - m \times 2 - m^2 = 0$ ，即 $8 - 2m - m^2 = 0$ ，整理得 $m^2 + 2m - 8 = 0$,

$$\therefore (m-2)(m+4)=0,$$

解得 $m=2$ 或 $m=-4$.

故答案为: 2 或 -4.

14. 已知关于 x 的方程 $3x^2 - 2x + m = 0$ 有两个实数根, 那么实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \leq \frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了根据一元二次方程根的情况求参数. 根据一元二次方程根的判别式, 方程有两个实数根时判别式大于或等于零, 据此进行列式计算, 即可作答.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的方程 $3x^2 - 2x + m = 0$ 有两个实数根,

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times m = 4 - 12m \geq 0,$$

$$\text{解得 } m \leq \frac{1}{3},$$

$$\text{故答案为: } m \leq \frac{1}{3}.$$

15. 已知: $11.12 \approx 3.335^2$, $111.2 \approx 10.545^2$, 那么 $\sqrt{1.112} \approx$ _____.

【答案】 1.0545

【解析】

【分析】 本题考查了算术平方根, 利用平方根的性质和给定的近似值, 通过小数点移动的关系求解.

【详解】 解: 由 $111.2 \approx 10.545^2$, 得 $\sqrt{111.2} \approx 10.545$.

$$\therefore 111.2 = 100 \times 1.112,$$

$$\therefore \sqrt{111.2} = \sqrt{100 \times 1.112} = 10 \times \sqrt{1.112},$$

$$\therefore 10 \times \sqrt{1.112} \approx 10.545,$$

$$\therefore \sqrt{1.112} \approx \frac{10.545}{10} = 1.0545.$$

故答案为: 1.0545.

16. 为满足高速通信需求, 我国某企业成功开发出一款 5G 基站芯片, 其处理一个基本数据单元仅需 0.8 纳秒, 已知一纳秒等于 1×10^{-9} 秒, 则该芯片一秒可以处理_____个基本数据单元. (用科学记数法表示)

【答案】 1.25×10^9

【解析】

【分析】本题考查了科学记数法. 根据芯片处理一个基本数据单元的时间, 计算一秒内处理的数量, 需用总时间除以每个单元的时间, 并将结果用科学记数法表示, 即可作答.

【详解】解: $\because$ 处理一个基本数据单元的时间为 0.8 纳秒, 已知一纳秒等于 10^{-9} 秒,

因此处理一个单元的时间为 0.8×10^{-9} 秒,

设一秒内处理的基本数据单元个数为 n ,

$$\text{则 } n = \frac{1}{0.8 \times 10^{-9}} = \frac{1}{8} \times 10^{10} = 0.125 \times 10^{10} = 1.25 \times 10^9.$$

故答案为: 1.25×10^9 .

17. 定义: 若两个一元二次方程有且只有一个相同的实数根, 我们就称这两个方程为“同伴方程”. 例如 $x^2 = 4$ 和 $(x-2)(x+3) = 0$ 有且仅有一个相同的实数根 $x = 2$, 所以这两个方程为“同伴方程”. 若方程

$6x^2 + 7x - 5 = 0$ 和 $(x-1)(x+m) = 0$ 为“同伴方程”, 则 m 的值为_____.

【答案】 $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{5}{3}$

【解析】

【分析】本题考查解一元二次方程, 根据“同伴方程”的定义, 两个方程有且只有一个相同的实数根. 先求解方程 $6x^2 + 7x - 5 = 0$ 的根, 再分析方程 $(x-1)(x+m) = 0$ 的根, 再根据新定义进行求解即可.

【详解】解: $6x^2 + 7x - 5 = 0$,

因式分解得 $(2x-1)(3x+5) = 0$,

$$\text{解得 } x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{5}{3};$$

方程 $(x-1)(x+m) = 0$ 的根为 $x_3 = 1, \quad x_4 = -m$.

由题意, $-m = \frac{1}{2}$, 得 $m = -\frac{1}{2}$ 或 $-m = -\frac{5}{3}$, 得 $m = \frac{5}{3}$;

故 m 的值为 $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{5}{3}$;

故答案为: $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{5}{3}$.

18. 我们可以利用二次根式性质 $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$ 准确解出形如 $x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$ 的方程,

方法如下:

由题意, 可知 $x \geq 0$, 得 $x = (\sqrt{x})^2$

$$\text{原方程变形为: } (\sqrt{x})^2 - 3\sqrt{x} - 4 = 0$$

$$\therefore (\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} + 1) = 0$$

$$\therefore \sqrt{x} = 4 \text{ 或 } \sqrt{x} = -1 \text{ (舍去)}$$

$$\therefore x = 16$$

小杰同学将二次根式的性质进一步探究后发现: $(\sqrt{-a})^2 = -a (a < 0)$.

已知 $x - 3\sqrt{-xy} + 10y = 0 (x > 0)$, 参考上述方法, 可求得 $\frac{y}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{1}{25}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质, 因式分解法解一元二次方程等知识, 设 $k = \frac{y}{x}$, 代入原方程, 利用换元法将方程转化为关于 $t = \sqrt{-k}$ 的二次方程, 求解后得到 k 的值, 掌握知识点的应用是解题的关键.

【详解】 解: 由 $x > 0$, 设 $k = \frac{y}{x}$, 则 $y = kx$,

代入原方程 $x - 3\sqrt{-xy} + 10y = 0$, 得 $x - 3\sqrt{-x \cdot kx} + 10(kx) = 0$,

$$x - 3\sqrt{-kx^2} + 10kx = 0,$$

$$\because x > 0,$$

$$\therefore \sqrt{-kx^2} = \sqrt{-k} \cdot x,$$

$$\therefore x - 3x\sqrt{-k} + 10kx = 0,$$

$$1 - 3\sqrt{-k} + 10k = 0,$$

设 $t = \sqrt{-k} (t \geq 0)$, 则 $k = -t^2$,

代入得: $1 - 3t + 10(-t^2) = 0$, 即 $1 - 3t - 10t^2 = 0$,

整理为: $10t^2 + 3t - 1 = 0$,

$$\therefore t_1 = \frac{1}{5}, \quad t_2 = -\frac{1}{2} \text{ (舍去, 因为 } t \geq 0),$$

$$\therefore t = \frac{1}{5}, \text{ 即 } \sqrt{-k} = \frac{1}{5},$$

$$\therefore -k = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25},$$

$$\therefore k = -\frac{1}{25},$$

$$\therefore \frac{y}{x} = -\frac{1}{25},$$

故答案为: $-\frac{1}{25}$.

三、简答题 (本大题共 4 题, 每题 6 分, 满分 24 分)

19. 计算: $(\sqrt{0.5} + 2\sqrt{\frac{1}{3}}) - (\sqrt{18} - \sqrt{27})$

【答案】 $-\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{11\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 先将二次根式化简, 然后合并同类项即可.

【详解】 解: 原式 $= (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}) - (3\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - 3\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + 3\sqrt{3}$$

$$= -\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{11\sqrt{3}}{3}.$$

【点睛】 本题考查了二次根式的加减运算, 解答本题的关键是掌握二次根式的化简及同类二次根式的合并.

20. 计算: $\frac{1}{2+\sqrt{5}} + \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{7})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$

【答案】 $2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了分母有理化, 二次根式的性质化简, 二次根式的加减运算, 正确掌握相关性质内容是解题的关键.

先根据分母有理化以及二次根式的性质进行化简, 再运算加减法, 即可作答.

【详解】 解: $\frac{1}{2+\sqrt{5}} + \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{7})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2-\sqrt{5}}{(2+\sqrt{5}) \times (2-\sqrt{5})} + \sqrt{9+7} + |2-\sqrt{5}| \\
&= \frac{2-\sqrt{5}}{4-5} + \sqrt{16} + \sqrt{5} - 2 \\
&= \sqrt{5} - 2 + 4 + \sqrt{5} - 2 \\
&= 2\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

21. 计算: $\sqrt{\frac{a}{8}} \cdot \sqrt{2} - 5a \div \sqrt{4a}$

【答案】 $-2\sqrt{a}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算，利用二次根式的性质化简，解题关键是掌握上述知识点并能熟练运用求解.

先计算乘除，再计算减法.

【详解】 解：原式 $= \sqrt{\frac{a}{8}} \times 2 - 5a \times \frac{\sqrt{4a}}{4a}$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{a}{4}} - \frac{5 \times 2\sqrt{a}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{5\sqrt{a}}{2} \\
&= -2\sqrt{a}.
\end{aligned}$$

22. 解方程: $(x-1)^2 - 4(x+2)^2 = 0$

【答案】

$x_1 = -5, x_2 = -1$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程，本题中分别把 $x-1$ 和 $x+2$ 看作一个整体，利用平方差公式分解因式，把一元二次方程转化为两个一元一次方程，通过解一元一次方程求出一元二次方程的解.

【详解】 解: $(x-1)^2 - 4(x+2)^2 = 0,$

分解因式可得: $[(x-1)-2(x+2)][(x-1)+2(x+2)] = 0,$

整理可得: $(-x-5)(3x+3)=0$,

可得: $-x-5=0$ 或 $3x+3=0$,

解得: $x_1=-5$, $x_2=-1$.

四、解答题 (本大题共 5 题, 第 23、24、25 题每题 6 分, 第 26 题 7 分, 第 27 题 9 分, 满分 34 分)

23. 解方程 $2x^2-3x+\frac{1}{2}=0$, 乐乐的解答过程如下:

解: ①移项, 得 $2x^2-3x=-\frac{1}{2}$,

②将二次项系数化为 1, 得: $x^2-\frac{3}{2}x=-\frac{1}{4}$

③配方, 得 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}+\frac{9}{4}$

④两边开平方, 得 $x-\frac{3}{2}=\sqrt{2}$ 或 $x-\frac{3}{2}=-\sqrt{2}$

⑤所以, $x_1=\sqrt{2}+\frac{3}{2}$, $x_2=-\sqrt{2}+\frac{3}{2}$

(1) 乐乐的解答过程从第_____步开始出错的, 其错误原因是_____.

(2) 请写出正确的解答过程 (全部).

【答案】 (1) ③, 配方出错;

(2) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程, 熟练掌握配方法, 是解题的关键:

(1) 第③步, 配方出错, 方程两边应该加上一次项系数一半的平方;

(2) 根据配方法的步骤, 进行作答即可.

【小问 1 详解】

解: 第③步, 配方出错, 方程两边应该加上一次项系数一半的平方;

【小问 2 详解】

解: $2x^2-3x+\frac{1}{2}=0$,

移项, 得 $2x^2 - 3x = -\frac{1}{2}$,

将二次项系数化为 1, 得 $x^2 - \frac{3}{2}x = -\frac{1}{4}$,

配方, 得 $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = -\frac{1}{4} + \frac{9}{16}$,

即 $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{16}$,

两边开平方, 得 $x - \frac{3}{4} = \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$,

所以 $x = \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$,

即 $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{4}, x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$.

24. 先化简再求值: $\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-4}$, 其中 $x = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

【答案】 $-\frac{1}{x+2}, -\frac{4+\sqrt{3}}{13}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质化简, 分母有理化, 已知字母的值求代数式的值. 正确掌握相关性质

内容是解题的关键. 先整理 $x = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ 得 $x = 2-\sqrt{3}$, 则 $x-2 = -\sqrt{3} < 0$, 化简 $\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-4} = -\frac{1}{x+2}$,

再把 $x = 2-\sqrt{3}$ 代入 $-\frac{1}{x+2}$ 进行计算, 即可作答.

【详解】 解: 依题意, $x = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1 \times (2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3}) \times (2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$,

则 $x-2 = 2-\sqrt{3}-2 = -\sqrt{3} < 0$,

$$\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-4}$$

$$= \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{|x-2|}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{2-x}{(x+2)(x-2)}$$

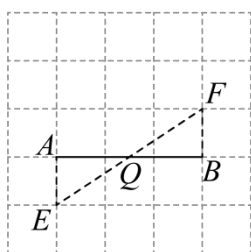
$$= -\frac{1}{x+2};$$

把 $x = 2 - \sqrt{3}$ 代入 $-\frac{1}{x+2}$,

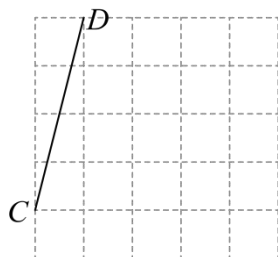
$$\text{得 } -\frac{1}{x+2} = -\frac{1}{2-\sqrt{3}+2} = -\frac{1}{4-\sqrt{3}} = -\frac{4+\sqrt{3}}{(4-\sqrt{3}) \times (4+\sqrt{3})} = -\frac{4+\sqrt{3}}{13}.$$

25. 如图(a)、(b)是由边长为1的小正方形组成的 5×5 网格, 每个小正方形的顶点叫做格点, 每个小正方形的边叫做格线. 请仅用一根无刻度直尺作图在网格图中完成下列画图, 画图过程用虚线表示, 画图结果用实线表示(不要求说明理由, 需保留必要的作图痕迹, 写出结论)

例如: 在图(a)中, A 、 B 是格点, 要作出线段 AB 的中点 Q , 可利用无刻度直尺, 连接格点 E 、 F 所得线段 EF 与线段 AB 交点 Q 就是线段 AB 中点, 利用 $\triangle AEQ \cong \triangle BFQ$ 可说明 $AQ = BQ$.



图(a)



图(b)

- (1) 在图(a)中, A 、 B 是格点, 请仅用一根无刻度直尺作出线段 AB 的垂直平分线 MQ ;
- (2) 在图(b)中, C 、 D 是格点, 请仅用一根无刻度直尺作出等腰直角三角形 CDH , 点 H 是格点;
- (3) 在(2)的基础上, 请仅用一根无刻度直尺作出线段 CD 的垂直平分线.

【答案】 (1) 图见解析

(2) 图见解析 (3) 图见解析

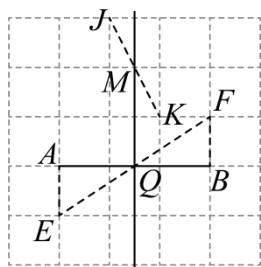
【解析】

【分析】 本题考查作图-应用与设计作图, 线段垂直平分线的性质, 等腰直角三角形, 解题的关键是掌握相关知识解决问题.

- (1) 取格点 J, K , 连接 JK 交网格线于点 M , 作直线 MQ 即可;
- (2) 根据等腰直角三角形的判定画出图形即可;
- (3) 取 CD 与格线交点, 即 CD 的中点 M , CH 与 DH' 的交点为 N , 作直线 MN 即可, 由图知 $\angle CDN = \angle DCN = 45^\circ$ 则 $DN = CN$, 即点 M, N 都在 CD 的垂直平分线上, 故为所求作.

【小问 1 详解】

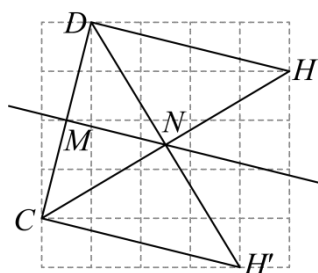
解: 如图 a 中, 直线 MQ 即为所求;



图(a)

【小问 2 详解】

解: 如图 b 中, 点 $\triangle CDH$ 或 $\triangle CDH'$ 即为所求;

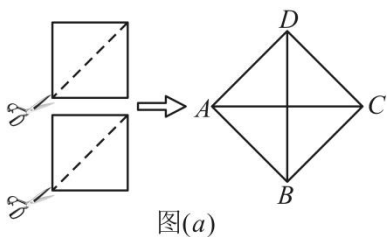


图(b)

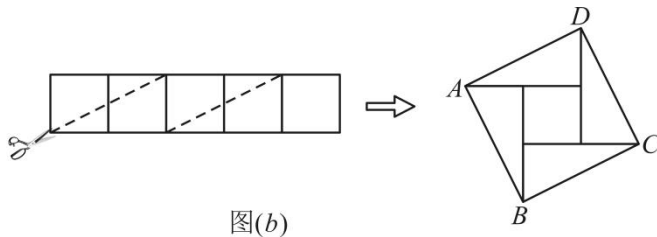
【小问 3 详解】

解: 如图 b 中, 直线 NM 即为所求.

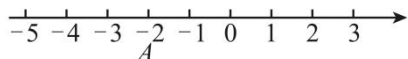
26. 小李同学在学习无理数时, 将边长为 1 的两个正方形沿着他们的一条对角线剪开, 得到四个形状、大小都相等的等腰直角三角形, 再把这四个等腰直角三角形拼成了一个面积为 2 的正方形, 由此得到了无理数 $\sqrt{2}$. 他受此启发: 将一个由 5 个边长为 1cm 的小正方形组成的长方形, 通过剪拼组成了一个大的正方形 (没有重叠和空隙).



图(a)



图(b)



图(c)

(1) 图(b)中大正方形的边长 $m =$ _____ cm, 边长 m 介于两个连续整数 _____ 和 _____ 之间.

(2) 如图(c)是一个数轴, 把图(b)中大正方形旋转使得边 AB 落到数轴上, 且点 A 与 -2 重合, 则点 B 在数轴上表示的数为 _____;

(3) 在(2)的基础上, 点 B 在点 A 的右侧, 点 P 表示数 1 , 将数轴沿着点 P 所在的某条直线翻折使得点 B 恰好落在数轴上的点 B' 处, 此时点 B' 所表示的数为 _____.

【答案】 (1) $\sqrt{5}, 2, 3$

(2) $-2 + \sqrt{5}$ 或 $-2 - \sqrt{5}$;

(3) $4 - \sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了算术平方根的应用, 实数与数轴, 无理数的估算, 数轴上两点间的距离, 正确掌握相关性质内容是解题的关键.

(1) 根据等面积法得大的正方形的面积, 结合算术平方根的性质, 得大的正方形的边长, 然后运用无理数的估算, 得出边长 m 介于两个连续整数 2 和 3 之间;

(2) 由(1)得 $AB = \sqrt{5}$, 把图(b)中大正方形旋转使得边 AB 落到数轴上, 且点 A 与 -2 重合, 列式表达出点 B 在数轴上表示的数为 $-2 + \sqrt{5}$ 或 $-2 - \sqrt{5}$;

(3) 先整理得点 B 在数轴上表示的数为 $-2 + \sqrt{5}$, 根据数轴上的两点间的距离进行列式计算, 即可作答.

【小问1详解】

解: $\because$ 将一个由 5 个边长为 1cm 的小正方形组成的长方形, 通过剪拼组成了一个大的正方形,

$\therefore$ 大的正方形的面积为 $1 \times 5 = 5\text{cm}^2$

$\therefore$ 大的正方形的边长为 $\sqrt{5}\text{cm}$,

即 $m = \sqrt{5}\text{cm}$

$\because \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$,

$\therefore 2 < \sqrt{5} < 3$,

即边长 m 介于两个连续整数 2 和 3 之间;

【小问2详解】

解: 由(1)得 $AB = \sqrt{5}$,

把图(b)中大正方形旋转使得边 AB 落到数轴上, 且点 A 与 -2 重合,

则点 B 在数轴上表示的数为 $-2 + \sqrt{5}$ 或 $-2 - \sqrt{5}$;

【小问3详解】

解: 在(2)的基础上, 点 B 在点 A 的右侧, $AB = \sqrt{5}$, 点 A 与 -2 重合,

$\therefore$ 点 B 在数轴上表示的数为 $-2 + \sqrt{5}$,

$\therefore$ 点 P 表示数 1 , 将数轴沿着点 P 所在的某条直线翻折使得点 B 恰好落在数轴上的点 B' 处,

设点 B' 所表示的数为 r ,

$$\therefore \frac{-2 + \sqrt{5} + r}{2} = 1,$$

$$\therefore -2 + \sqrt{5} + r = 2,$$

解得 $r = 4 - \sqrt{5}$,

即点 B' 所表示的数为 $4 - \sqrt{5}$.

27. 数学课上, 某数学小组正在认真研究: 到三个定点距离之和最小的点

【实际背景】设要建造一座发电厂向附近的三座工厂输电, 将发电厂建造在哪里, 可以使从发电厂出发的输电线的总长度最短?

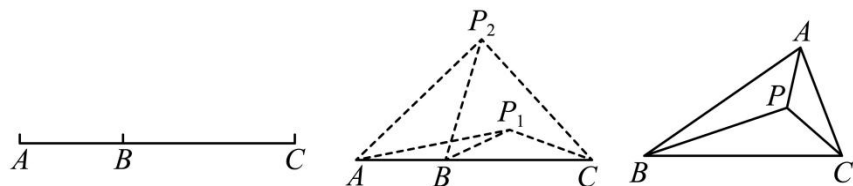
【数学问题】在平面内, 假设三座工厂分别记作点 A 、 B 、 C , 发电厂记作点 P , 请在平面内找一点 P , 使得 $PA + PB + PC$ 最小.

(1) 探究 1. 当点 A 、 B 、 C 在同一直线上 (如图 1), 点 B 在点 A 和点 C 之间, 要使得 $PA + PB + PC$ 最小, 点 P 的位置为_____

依据是: _____ (填写序号)

①三角形任意两边之和大于第三边;

②线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等.



图(1)

图(2)

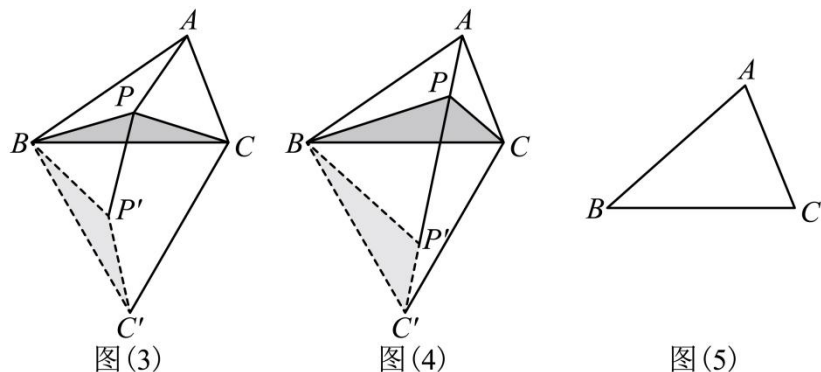
(2) 探究 2. 当点 A 、 B 、 C 不共线时 (如图 2), $\triangle ABC$ 中, 最大内角 $\angle BAC < 120^\circ$, 点 P 在 $\triangle ABC$ 内.

小敏说: 两条折线段之和最小值就是连结两点的线段长;

小丽提出困惑：如何把题目中共顶点三条线段转化为首尾相连的三条折线段呢？

欢欢说：目前线段相等转化的方法有：构造全等三角形、等边三角形（或等腰三角形）……

聪聪说：将 $\triangle BPC$ 绕点 B 顺时针旋转 60° 得 $\triangle BP'C'$ ，连接 PP' （如图3）；此时要使得 $PA+PB+PC$ 最小，则点 A 、 P 、 P' 、 C' 在同一直线上（如图4），可以得出 $\angle APB = \angle BPC = \angle APC = 120^\circ$ 。



①你同意该小组同学的说法吗？如果不同意，请说出理由；如果同意，请写出证明

$\angle APB = \angle BPC = \angle APC = 120^\circ$ 的推理过程。

②从上面的证明还可以得到 $\triangle BC'C$ 是等边三角形，此时点 P 在线段 AC' 上；请用直尺和圆规在图5中作出点 P 使得 $PA+PB+PC$ 最小。

【答案】 (1) 点 B ，①

(2) ①同意，理由见解析②见解析

【解析】

【分析】 本题是几何变换综合题，主要考查旋转的性质，全等三角形的判定和性质，两点之间线段最短以及等边三角形的性质，深入理解题意是解决问题的关键。

(1) 利用三角形任意两边之和大于第三边判断即可；

(2) ①利用旋转变换的性质判断出：点 A 、 P 、 P' 、 C' 在同一直线上， $PA+PB+PC$ 的值最小，可得结论；

②在 BC 的下方作等边 $\triangle BCC'$ ，在 AC 的右侧作等边 $\triangle ACB'$ ，连接 AC' 、 BB' 交于点 P ， BB' 与 AC 交于点 O ，连接 PB 、 PC ，根据 $CB' = CA$ 、 $CB = CC'$ 、 $\angle ACB' = \angle BCC' = 60^\circ$ ，则 $\angle BCB' = \angle C'CA$ ，可得 $\triangle BCB' \cong \triangle C'CA$ (ASA)，则 $\angle PAC = \angle PB'C$ ，再根据 $\angle AOP = \angle B'OC$ 可得 $\angle APB' = \angle ACB' = 60^\circ$ ，则 $\angle APB = 120^\circ$ ，故点 P 即为所求。

【小问1详解】

解：当点 A 、 B 、 C 在同一直线上（如图1），点 B 在点 A 和点 C 之间，要使得 $PA+PB+PC$ 最小，点 P 的位置为点 B 。依据是三角形任意两边之和大于第三边。

故答案为：点 B ，①；

【小问 2 详解】

解：①同意.

理由：由旋转变换的性质可知， $BP = BP'$ ， $PC = P'C'$ ， $\angle PBP' = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle PBP'$ 是等边三角形，

$\therefore PB = PP'$ ， $\angle BPP' = \angle BP'P = 60^\circ$ ，

$\therefore PA + PB + PC = PA + PP' + P'C' \geq AC'$ ，

$\therefore$ 点 A 、 P 、 P' 、 C' 在同一直线上， $PA + PB + PC$ 的值最小，

$\therefore \angle APB = 180^\circ - \angle BPP' = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle BPC = \angle BP'C' = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle APC = 360^\circ - \angle APB - \angle BPC = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle APB = \angle BPC = \angle APC = 120^\circ$ ；

②如图 5 中，点 P 即为所求.

