

2025-2026 学年八年级数学上学期期中模拟卷

强化卷·考试版

(考试时间: 100 分钟 试卷满分: 150 分)

注意事项:

- 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。
- 测试范围: 沪教版 2024 五四制八年级上册第 19 章~20 章。

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 共 24 分. 下列各题四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题卡的相应位置上.)

1. 在数字 $\frac{22}{7}$, 3.33 , $\frac{\pi}{2}$, $-2\frac{1}{2}$, 0 , $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$, $-\sqrt{0.9}$, $2.121121112\ldots$ (相邻两个 2 之间 1 的个数逐次多 1) 中, 无理数的个数是 ()

- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

【答案】B

【分析】根据无理数的定义逐个判断即可. 无限不循环小数叫无理数, 常见形式有: ①开方开不尽的数, 如 $\sqrt{2}$ 等; ②无限不循环小数, 如 $0.101001000\ldots$ 等; ③含 π 的基本都是无理数.

【详解】

解: 无理数有: $\frac{\pi}{2}$, $-\sqrt{0.9}$, $2.121121112\ldots$ (相邻两个 2 之间 1 的个数逐次多 1), 共 3 个,

故选: B.

【点睛】本题考查了无理数的定义, 熟记定义是解题的关键.

2. 下列说法正确的是 ()

- A. $\sqrt{16}$ 的平方根是 ± 4 B. 负数没有立方根
C. 64 的立方根是 ± 4 D. $(-5)^2$ 的算术平方根是 5

【答案】D

【分析】本题考查平方根、立方根及算术平方根的概念, 熟练掌握相关概念是解题的关键. 需逐一分析各选项的正确性.

【详解】A 中， $\sqrt{16}=4$ ，4 的平方根是 ± 2 ，而非 ± 4 ，故 A 错误；

B 中，负数有立方根，如 -8 的立方根是 -2 ，故 B 错误；

C 中，64 的立方根是 4（因 $4^3=64$ ），而非 ± 4 ，故 C 错误；

D 中， $(-5)^2=25$ ，25 的算术平方根是 5，故 D 正确；

故选：D.

3. 下列运算正确的是（ ）

A. $(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})=-1$

B. $(\sqrt{3}+1)^2=4$

C. $\sqrt{3.6}=0.6$

D. $\sqrt{9+16}=3+4$

【答案】A

【分析】本题考查了化简二次根式，二次根式的乘法，根据二次根式的乘法运算法则与二次根式的化简逐一分析各选项即可.

【详解】解：A、 $(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})=4-5=-1$ ，故正确；

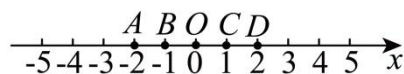
B、 $(\sqrt{3}+1)^2=4+2\sqrt{3}$ ，故错误；

C、 $\sqrt{3.6}=\sqrt{\frac{18}{5}}=\frac{3}{5}\sqrt{10}$ ，故错误；

D、 $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ ，故错误；

故选：A.

4. 如图，数轴上的点 A、B、O、C、D 分别表示数 -2 、 -1 、 0 、 1 、 2 ，那么表示数 $\sqrt{3}-2$ 的点应落在（ ）



A. 线段 AB 上

B. 线段 BO 上

C. 线段 OC 上

D. 线段 CD 上

【答案】B

【分析】本题考查了无理数的估算，不等式的性质，数轴与实数，掌握无理数的估算方法是解题关键. 先估算出 $1<\sqrt{3}<2$ ，进而得到 $-1<\sqrt{3}-2<0$ ，即可得到答案.

【详解】解： $\because 1<3<4$ ，

$\therefore \sqrt{1}<\sqrt{3}<\sqrt{4}$ ，即 $1<\sqrt{3}<2$ ，

$\therefore -1<\sqrt{3}-2<0$ ，

∴表示数 $\sqrt{3}-2$ 的点应落在线段 BO 上,

故选: B.

5. 二次根式 $x\sqrt{-\frac{1}{x}}$ 化成最简结果为 ()

A. $\sqrt{x}$

B. $-\sqrt{-x}$

C. $-\sqrt{x}$

D. $\sqrt{-x}$

【答案】B

【分析】本题考查了二次根式的性质, 熟练掌握性质是解答本题的关键. 根据二次根式的性质

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a(a \geq 0) \\ -a(a < 0) \end{cases} \text{化简即可.}$$

【详解】解: ∵ $-\frac{1}{x} > 0$,

$$\therefore x < 0,$$

$$\therefore x\sqrt{-\frac{1}{x}} = x\sqrt{-\frac{x}{x^2}} = x \times \left| \frac{1}{x} \right| \sqrt{-x} = x \times \left(-\frac{1}{x} \right) \sqrt{-x} = -\sqrt{-x}.$$

故选 B.

6. 下列结论中正确的个数是 ()

① $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = 1-\sqrt{2}$;

② $\sqrt{a^2+b^2}$ 是最简二次根式;

③ $\sqrt{32}$ 和 $\sqrt{27}$ 不是同类二次根式;

④ $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 的有理化因式是 $\sqrt{x}-\sqrt{y}$;

⑤ 不等式 $(2-\sqrt{5})x > 1$ 的解集是 $x > -2-\sqrt{5}$;

⑥ 将 0.0326 用科学计数法表示, 并保留两个有效数字, 则可表示为 0.03×10^{-2} .

A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 5 个

【答案】A

【分析】根据二次根式的性质, 判断①, 最简二次根式的定义, 判断②, 同类二次根式的定义, 判断③, 分母有理化, 判断④, 解不等式, 分母有理化判断⑤, 求一个数的近似数, 判断⑥.

【详解】解: $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}-1$; 故①错误;

$\sqrt{a^2+b^2}$ 是最简二次根式, 故②正确;

$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ ， $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ ，故 $\sqrt{32}$ 和 $\sqrt{27}$ 不是同类二次根式，故③正确；

$\sqrt{x} - \sqrt{y}$ 的有理化因式是 $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ ；故④错误；

不等式 $(2 - \sqrt{5})x > 1$ 的解集是 $x < -2 - \sqrt{5}$ ；故⑤错误；

将0.0326用科学计数法表示，并保留两个有效数字，则可表示为 3.3×10^{-4} ；故⑥错误；故⑥错误；

故选A.

【点睛】本题考查二次根式的性质，最简二次根式，同类二次根式，分母有理化，解不等式，求一个数的近似数等知识点，熟练掌握相关知识点，是解题的关键.

二、填空题：(本大题共12题，每题4分，共48分.)

7. 比较大小： $-2\sqrt{3}$ _____ $-3\sqrt{2}$.

【答案】>

【分析】本题考查的是二次根式的大小比较，先比较两数的绝对值，再根据绝对值大的反而小可得答案.

【详解】解： $\because |-2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ ， $|-3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2} = \sqrt{18}$ ，

$\therefore \sqrt{12} < \sqrt{18}$ ，

$\therefore -2\sqrt{3} > -3\sqrt{2}$ ，

故答案为：>

8. 实数 a 的立方根是3，那么 $a =$ _____.

【答案】27

【分析】本题考查的是已知一个数的立方根，求原数，根据立方根的含义可得 $a = 3^3$ ，从而可得答案.

【详解】解： $\because$ 实数 a 的立方根是3，

$\therefore a = 3^3 = 27$ ，

故答案为：27

9. 化简 $\sqrt{12} =$ _____.

【答案】 $2\sqrt{3}$

【分析】本题主要考查了化简二次根式，利用二次根式性质化简即可.

【详解】解： $\sqrt{12} = \sqrt{3 \times 4} = 2\sqrt{3}$ ，

故答案为： $2\sqrt{3}$.

10. 已知一个正数的两个平方根分别是 $x-1$ 和 $3x+5$ ，则 x 的值为_____.

【答案】 -1

【分析】 根据已知得出方程 $x-1+3x+5=0$ 即可求出 x . 本题考查了平方根，能根据题意得出关于 x 的方程是解此题的关键，注意：一个正数有两个平方根，它们互为相反数.

【详解】 根据题意知 $x-1+3x+5=0$,

解得: $x=-1$,

故答案为: -1 .

11. 化简: $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} =$ _____.

【答案】 $\sqrt{2}-1$ / $-1+\sqrt{2}$

【分析】 本题主要考查了利用二次根式的性质进行化简，解题的关键是熟练掌握二次根式的性质，根据 $\sqrt{a^2}=|a|$ 进行化简，即可求解.

【详解】 解: $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$

故答案为: $\sqrt{2}-1$.

12. 若最简二次根式 $^{2a-4}\sqrt{3a+b}$ 与 $\sqrt{a-b}$ 是同类根式，则 $2a-b =$ _____.

【答案】 9

【分析】 本题考查了同类二次根式，以及最简二次根式，熟练掌握以上知识点是解题的关键. 根据同类二次根式的概念进行解答即可.

【详解】 解: 由题意可知, $2a-4=2$, $3a+b=a-b$,

解得 $a=3$, $b=-3$,

$\therefore 2a-b=2\times 3-(-3)=9$;

故答案为: 9 .

13. 化简: $\sqrt{12x^2y}(x<0) =$ _____.

【答案】 $-2x\sqrt{3y}$

【分析】 本题主要考查了化简二次根式，根据 $\sqrt{x^2}=|x|$ 进行求解即可.

【详解】 解: $\sqrt{12x^2y} = 2|x|\sqrt{3y} = -2x\sqrt{3y}(x<0)$,

故答案为: $-2x\sqrt{3y}$.

14. 等式 $\sqrt{\frac{3-x}{2-x}} = \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{2-x}}$ 成立的条件是_____.

【答案】 $x < 2$

【分析】 本题考查二次根式有意义的条件、分式有意义的条件，根据二次根式的被开方数为非负数、分式的分母不为零求解即可.

【详解】 解：由题意，等式 $\sqrt{\frac{3-x}{2-x}} = \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{2-x}}$ 成立的条件是 $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 2-x > 0 \end{cases}$,

解得 $x < 2$,

故答案为: $x < 2$.

15. $\sqrt{14}$ 的小数部分为 a , 则 $a(6+a) =$ _____.

【答案】 5

【分析】 此题考查了估算无理数的大小和平方差公式的运用，熟练掌握无理数估算的方法是解本题的关键. 根据题意表示出 a ，代入原式计算即可求出值.

【详解】 解：由题意得: $9 < 14 < 16$, 即 $3 < \sqrt{14} < 4$,

$\therefore a = \sqrt{14} - 3$,

则 $a(6+a) = (6 + \sqrt{14} - 3) \times (\sqrt{14} - 3) = 14 - 9 = 5$,

故答案为: 5

16. 将 $0.4\dot{1}\dot{3}$ 化成分数: $0.4\dot{1}\dot{3} =$ _____.

【答案】 $\frac{409}{990}$

【分析】 本题考查了循环小数化分数的方法. 根据混循环小数化分数的方法化为分数即可.

【详解】 解: $0.4\dot{1}\dot{3} = \frac{413-4}{990} = \frac{409}{990}$.

故答案为: $\frac{409}{990}$.

17. 阅读材料: 一般地, 我们把被开方数中含有二次根式的二次根式称为复合二次根式, 例如:

$\sqrt{\sqrt{3}}, \sqrt{6-\sqrt{3}}, \sqrt{6+2\sqrt{5}}$ 等都是复合二次根式. 其中有一些特殊的复合二次根式可以进行化简, 例如:

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{1+2\sqrt{5}+5} = \sqrt{1^2+2 \times 1 \times \sqrt{5}+(\sqrt{5})^2} = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} = 1+\sqrt{5}.$$

请利用上述运算法则化简: $\sqrt{7-\sqrt{21+4\sqrt{5}}} =$ _____.

【答案】 $\sqrt{5}-1$

【分析】 本题考查了利用完全平方公式进行因式分解，利用二次根式的性质进行化简等知识。熟练掌握利用完全平方公式进行因式分解，利用二次根式的性质进行化简是解题的关键。

由题意知， $\sqrt{21+4\sqrt{5}} = \sqrt{(1+2\sqrt{5})^2} = 1+2\sqrt{5}$ ，则 $\sqrt{7-\sqrt{21+4\sqrt{5}}} = \sqrt{7-(1+2\sqrt{5})} = \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$ ，
求解作答即可。

【详解】 解：由题意知， $\sqrt{21+4\sqrt{5}} = \sqrt{(1+2\sqrt{5})^2} = 1+2\sqrt{5}$ ，
 $\therefore \sqrt{7-\sqrt{21+4\sqrt{5}}} = \sqrt{7-(1+2\sqrt{5})} = \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \sqrt{5}-1$ ，

故答案为： $\sqrt{5}-1$ 。

18. 已知 a 、 b 、 c 为互不相同的有理数，且满足 $(b+\sqrt{2})^2 = (a+\sqrt{2})(c+\sqrt{2})$ ，则符合条件的 a 、 b 、 c 的组数共有_____组。

【答案】 0

【分析】 此题主要考查了二次根式的综合应用，首先整理 $(b+\sqrt{2})^2 = (a+\sqrt{2})(c+\sqrt{2})$ ，得出 $b^2+2\sqrt{2}b = ac+(a+c)\sqrt{2}$ ，再分析得出无理数的系数相等，有理项也相等，进而求出。

【详解】 解： $\because (b+\sqrt{2})^2 = (a+\sqrt{2})(c+\sqrt{2})$ ，
 $\therefore b^2+2\sqrt{2}b+2 = ac+(a+c)\sqrt{2}+2$ ，

因为 a 、 b 、 c 为有理数，

所以无理数的系数部分相等，有理数部分也相等，即 $b^2 = ac$ ①， $2b = a+c$ ②，

将②代入①得： $\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = ac$ ，

整理得 $(a-c)^2 = 0$ ，

得 $a=c$ ，与 a 、 b 、 c 为互不相同的有理数矛盾，

所以符合条件的 a 、 b 、 c 共有 0 组。

故答案为：0。

三、解答题：(本大题共 11 题，共 78 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

19. 判断下列说法是否正确:

(1)无理数的平方一定是正数;

(2)两个无理数的积仍为无理数;

(3)分数一定可化为有限小数或无限循环小数.

【答案】(1)正确;

(2)错误 ;

(3)正确

【分析】 本题主要考查了实数的性质, 对于每个说法, 要依据无理数、分数的定义和性质, 通过举例或推理来判断.

(1) 设无理数为 a , (a 不等于 0), 根据平方的性质, $a^2 > 0$ 即可判断.

(2) 举例说明即可.

(3) 举例说明即可.

【详解】(1) 解: 无理数是无限不循环小数, 不为 0, 设无理数为 a , (a 不等于 0), 根据平方的性质, $a^2 > 0$, 所以无理数的平方一定是正数, 该说法正确.

(2) 解: 例如 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$, $\sqrt{2}$ 是无理数, 但它们的积 2 是有理数, 所以“两个无理数的积仍为无理数”说法错误.

(3) 解: 分数是有理数, 有理数包括整数和分数, 分数可以通过分子除以分母化为有限小数 (如 $\frac{1}{2} = 0.5$) 或无限循环小数 (如 $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$), 所以该说法正确.

20. 计算:

$$(1) \sqrt{0.04} + \sqrt[3]{-8} + \sqrt{\frac{1}{4}} + |\sqrt{3} - 2| + \sqrt{3}$$

$$(2) \left(2\sqrt{12} - \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \times \sqrt{6} - \frac{\sqrt{27} + \sqrt{12}}{\sqrt{3}}$$

【答案】(1) 0.7

(2) $11\sqrt{2} - 5$

【分析】 本题主要考查二次根式的混合运算, 熟练掌握运算法则是解题的关键.

(1) 先算算术平方根和立方根和去绝对值, 然后进行加减运算;

(2) 先化简二次根式, 然后进行乘法运算.

【详解】(1) 解: $\sqrt{0.04} + \sqrt[3]{-8} + \sqrt{\frac{1}{4}} + |\sqrt{3} - 2| + \sqrt{3}$

$$= 0.2 + (-2) + \frac{1}{2} + (2 - \sqrt{3}) + \sqrt{3}$$

$$= 0.2 - 2 + 0.5 + 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3}$$

$$= 0.7;$$

(2) 解: $\left(2\sqrt{12} - \sqrt{\frac{1}{3}}\right) \times \sqrt{6} - \frac{\sqrt{27} + \sqrt{12}}{\sqrt{3}}$

$$= \left(4\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \times \sqrt{6} - \frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{11\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{6} - (3 + 2)$$

$$= \frac{11\sqrt{18}}{3} - 5$$

$$= \frac{33\sqrt{2}}{3} - 5$$

$$= 11\sqrt{2} - 5.$$

21. 计算:

(1) 计算: $4\sqrt{5} + \sqrt{45} - \sqrt{8} + 4\sqrt{2}$;

(2) 计算: $\frac{2}{\sqrt{3}+1} - \sqrt{6} \times \sqrt{2} + 1 \div (2 - \sqrt{3})$;

(3) 计算: $8x^2\sqrt{xy} \times 3\sqrt{\frac{y^2}{x}} \div 12\sqrt{\frac{x}{y}}$;

(4) 计算: $\left(\frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} + \frac{m-2\sqrt{mn}+n}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}\right) \div \frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$;

(5) 解不等式: $\sqrt{20}x - 4\sqrt{3} > 3\sqrt{5}x$.

【答案】 (1) $7\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$

(2) 1

(3) $2xy^2\sqrt{x}$

(4) $2m - 2n$

(5) $x < -\frac{4\sqrt{15}}{5}$

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算，分式的混合运算，解一元一次不等式，熟练掌握运算法则是解答本题的关键.

(1) 先化简二次根式，再合并同类二次根式即可；

(2) 先进行分母有理化，然后算乘法，将除法转化为乘法并进行分母有理化，最后合并即可；

(3) 根据二次根式的乘除运算法则计算即可；

(4) 将除法转化为乘法，然后利用乘法分配律计算即可；

(5) 先化简二次根式，然后按照移项、合并同类项、系数化为 1 的一般步骤解不等式即可。

【详解】(1) 解： $4\sqrt{5} + \sqrt{45} - \sqrt{8} + 4\sqrt{2}$

$$= 4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$$

$$= 7\sqrt{5} + 2\sqrt{2} ;$$

(2) 解： $\frac{2}{\sqrt{3}+1} - \sqrt{6} \times \sqrt{2} + 1 \div (2 - \sqrt{3})$

$$= \sqrt{3} - 1 - 2\sqrt{3} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{3} - 1 - 2\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}$$

$$= 1 ;$$

(3) 解： $8x^2\sqrt{xy} \times 3\sqrt{\frac{y^2}{x}} \div 12\sqrt{\frac{x}{y}}$

$$= 8x^2 \times 3 \div 12 \sqrt{xy \cdot \frac{y^2}{x} \div \frac{x}{y}}$$

$$= 2x \sqrt{x^2 \cdot xy \cdot \frac{y^2}{x} \cdot \frac{y}{x}}$$

$$= 2x\sqrt{xy^4}$$

$$= 2xy^2\sqrt{x} ;$$

(4) 解： $\left(\frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} + \frac{m-2\sqrt{mn}+n}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} \right) \div \frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$

$$= \left[\frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} + \frac{(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} \right] \cdot (\sqrt{m}+\sqrt{n})$$

$$= \frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} \cdot (\sqrt{m}+\sqrt{n}) + (\sqrt{m}-\sqrt{n}) \cdot (\sqrt{m}+\sqrt{n})$$

$$= m-n + m-n$$

$$= 2m-2n ;$$

(5) 解： $\sqrt{20x} - 4\sqrt{3} > 3\sqrt{5x}$,

化简得， $2\sqrt{5x} - 4\sqrt{3} > 3\sqrt{5x}$,

移项得， $2\sqrt{5x} - 3\sqrt{5x} > 4\sqrt{3}$,

合并同类项得, $-\sqrt{5}x > 4\sqrt{3}$,

系数化为 1 得, $x < -\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$, 即 $x < -\frac{4\sqrt{15}}{5}$.

22. 先化简, 后求值: $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{a-4\sqrt{ab}+4b}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}}$, 其中 $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$.

【答案】 $2\sqrt{a}-3\sqrt{b}$, $-2\sqrt{2}$

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算, 先根据二次根式的混合运算化简, 再代入字母的值进行计算即可求解.

【详解】 解: 原式 $= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{(\sqrt{a}-2\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}}$

$$= \sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{a} - 2\sqrt{b}$$
$$= 2\sqrt{a} - 3\sqrt{b}$$

当 $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$ 时,

原式 $= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2} - 3\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$.

23. 当 $0 < x < 1$ 时, 化简: $\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1} - \frac{1}{x} \right)$.

【答案】 -1

【分析】 本题考查了二次根式的化简, 解题的关键是掌握二次根式的运算法则. 根据二次根式的运算法则、完全平方公式和平方差公式求解即可.

【详解】 解: $\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1} - \frac{1}{x} \right)$

$$= \left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{(1+x)(1-x)}+\sqrt{(1-x)^2}} \right) \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$$
$$= \left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \right) \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$$
$$= \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x} \\
&= \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2}{(1+x) - (1-x)} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x} \\
&= \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2}{2x} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x} \\
&= \frac{1+x + 2\sqrt{(1+x)(1-x)} + 1-x}{2x} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x} \\
&= \frac{2 + 2\sqrt{1-x^2}}{2x} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x} \\
&= \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x} \\
&= \frac{(1-x^2) - 1}{x^2} \\
&= -1
\end{aligned}$$

24. (1) 一个正方体形状の木箱容积是 4m^3 ，求这个木箱的棱长. (结果精确到 0.1m).

(2) 一个篮球的体积是 9850cm^3 ，求这个篮球的半径. (球体积公式为 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, π 取 3.14 , 结果精确到 0.1cm)

【答案】 (1) 这个木箱的棱长约 1.6m ；(2) 这个篮球的半径约 13.3cm

【分析】 本题考查了立方根的应用，解题的关键是能根据题意得出方程.

(1) 设这个正方体木箱的棱长为 $x\text{m}$ ，由题意得出方程，求出 x 即可.

(2) 设这个篮球的半径为 $R\text{cm}$ ，由题意得出方程，求出 R 即可.

【详解】 解：(1) 设这个木箱的棱长为 $x\text{m}$ ，

则 $x^3 = 4$ ，

解得 $x = \sqrt[3]{4} \approx 1.6$.

答：这个木箱的棱长约 1.6m .

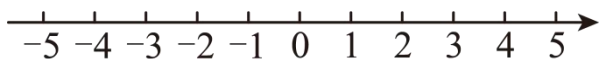
(2) 设这个篮球的半径为 $R\text{cm}$ ，

根据题意，得 $\frac{4}{3}\pi R^3 = 9850$ ，

解得 $R \approx 13.3$.

答：这个篮球的半径约 13.3cm .

25. 如图，已知点 A 表示的数为 $-\sqrt{2}$ ，点 A 向右运动 2 个单位长度到达点 B ，点 C 表示的数为 $\frac{1}{2}$.



(1) 在数轴上画出点 A ;

(2) 点 B 表示的数为_____, 其绝对值为_____;

(3) 利用数轴比较大小: $-\sqrt{2}$ _____ $\frac{1}{2}$ (填“>”“=”或“<”), 所以点 C 在点 A _____. (填“左侧”或“右侧”)

【答案】 (1) 见解析;

(2) $-\sqrt{2}+2$, $-\sqrt{2}+2$;

(3) <, 右侧.

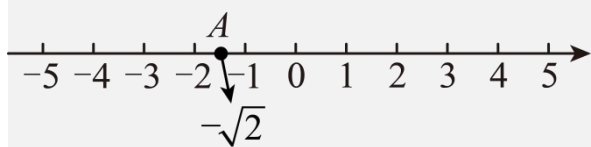
【分析】 本题考查了数轴上表示数, 绝对值定义, 实数比较大小, 掌握知识点的应用是解题的关键.

(1) 在数轴上表示点即可;

(2) 由点 A 向右运动 2 个单位长度到达点 B , 则有点表示的数为 $-\sqrt{2}+2$, 然后通过绝对值定义即可求解;

(3) 根据数轴特点即可求解.

【详解】 (1) 解: 如图,



$\therefore$ 点 A 即为所求;

(2) 解: 点 B 表示的数为 $-\sqrt{2}+2$, 其绝对值 $|\sqrt{2}+2| = -\sqrt{2}+2$,

故答案为: $-\sqrt{2}+2$, $-\sqrt{2}+2$;

(3) 解: 根据数轴可知, $-\sqrt{2} < \frac{1}{2}$, 点 C 在点 A 的右侧,

故答案为: <, 右侧.

26. 定义: 若 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=c$, c 是有理数, 则称 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 与 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 是关于 c 的“美好数”例如:

$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2=1$, 则称 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 是关于 1 的“美好数”.

(1) $2+\sqrt{3}$ 关于 1 的“美好数”是_____;

(2) 化简: $\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{13}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{19}+\sqrt{21}}$;

(3) 若 y 是 $\sqrt{10}-1$ 关于 9 的“美好数”, 请直接写出 $4y^2-8y+2025$ 的值.

【答案】 (1) $2-\sqrt{3}$;

(2) 4;

(3) 2061.

【分析】本题考查了“美好数”的新定义，分母有理化，二次根式的运算，因式分解的应用，掌握知识点的应用是解题的关键.

(1) 利用“美好数”的新定义，分母有理化解答即可求解；

(2) 利用“美好数”的新定义，分母有理化解答即可求解；

(3) 利用“美好数”的新定义，分母有理化求出 y ，再把 $4y^2 - 8y + 2025$ 变形为 $4(y-1)^2 + 2021$ ，最后代入求值即可.

【详解】(1) 解：由“美好数”的新定义可得，

则 $2+\sqrt{3}$ 关于 1 的“美好数”是 $\frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$ ，

故答案为： $2-\sqrt{3}$ ；

$$\begin{aligned} (2) \text{ 解：} & \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{13}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{19}+\sqrt{21}} \\ &= \frac{1}{2}(-\sqrt{9} + \sqrt{11} - \sqrt{11} + \sqrt{13} + \cdots - \sqrt{19} + \sqrt{21}) \\ &= \frac{1}{2}(-\sqrt{9} + \sqrt{21}) \\ &= \frac{1}{2}(-3 + 11) \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \\ &= 4; \end{aligned}$$

(3) 解： $\sqrt{10}-1$ 关于 9 的“美好数” $y = \frac{9}{\sqrt{10}-1} = \sqrt{10}+1$ ，

$$\therefore 4y^2 - 8y + 2025$$

$$= 4(y-1)^2 + 2021$$

$$= 4(\sqrt{10}+1-1)^2 + 2021$$

$$= 4 \times (\sqrt{10})^2 + 2021$$

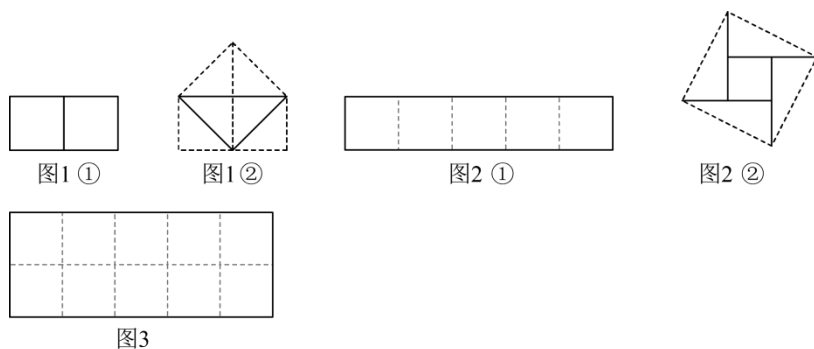
$$= 4 \times 10 + 2021$$

$$= 2061.$$

27. 阅读材料，并完成下列问题：

寻找无理数：小明把两个面积为 1 的小正方形（图 1①）分别沿对角线剪开，将所得的 4 个直角三角形拼成

一个面积为 2 的大正方形 (图 1②), 从而找到无理数 $\sqrt{2}$. 问题再发现:



- (1) 小刚受到小明的启发, 把图 2①剪拼成图 2②后, 找到无理数 $\sqrt{5}$, 请你在图 2①中画出裁剪线 (用实线);
- (2) 参考小明、小刚的作法, 请你将图 3 中长为 5, 宽为 2 的长方形裁剪成若干块, 拼成一个正方形;
- ①求该正方形的边长;
- ②请在图 3 中画出一一种满足条件的裁剪线 (用实线).

【答案】 (1) 见解析

(2) ① $\sqrt{10}$; ② 见解析

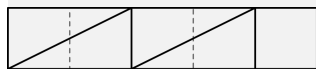
【分析】 本题考查无理数的表示方法, 勾股定理和无理数, 解题的关键是理解题意, 模仿题目中给出的解题方法进行求解.

(1) 根据 $1^2 + 2^2 = (\sqrt{5})^2$ 求解即可;

(2) ①首先根据题意得到拼成的正方形的面积为 10, 进而求解即可;

②根据 $1^2 + 3^2 = (\sqrt{10})^2$ 求解即可.

【详解】 (1) 如图所示,

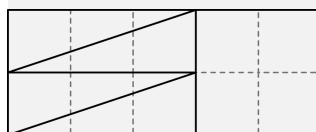


(2) ① $\because$ 长为 5, 宽为 2 的长方形的面积为 $5 \times 2 = 10$

$\therefore$ 拼成的正方形的面积为 10

$\therefore$ 该正方形的边长为 $\sqrt{10}$;

② 如图所示.



28. **【阅读理解】** 公元前 5 世纪, 毕达哥拉斯学派中的一名成员希伯索斯发现了无理数 $\sqrt{2}$, 导致了第一次

数学危机.

定义：可以表示为两个互素整数的商的形式为数称为有理数，整数可以看做分母为 1 的有理数；反之为无理数. 如 $\sqrt{2}$ 不能表示为两个互素的整数的商，所以 $\sqrt{2}$ 是无理数. 可以这样证明：

设 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ， a 与 b 是互素的两个整数，且 $b \neq 0$ ，

则 $2 = \frac{a^2}{b^2}$ ，即 $a^2 = \underline{\text{①}}$.

因为 b 是整数且不为 0，

所以 a 是不为 0 的偶数.

设 $a = 2n$ (n 是整数，且 $n \neq 0$)，则 $a^2 = 4n^2$.

所以 $b^2 = \underline{\text{②}}$.

所以 b 也是偶数，与 a, b 是互素的整数矛盾.

所以 $\sqrt{2}$ 是无理数.

【解决问题】

(1) 写出①，②表示的代数式，使证明过程完整；

(2) 证明： $\sqrt[3]{6}$ 是无理数.

【答案】 (1) ① $2b^2$ ；② $2n^2$

(2) 见解析

【分析】 本题主要考查了无理数的概念，解题的关键是根据所给事例模仿去做，做到举一反三.

(1) 根据等式性质得出结论即可；

(2) 类比 $\sqrt[3]{6}$ 是无理数的证明进行证明即可.

【详解】 (1) 解：设 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ， a 与 b 是互素的两个整数，且 $b \neq 0$ ，

则 $2 = \frac{a^2}{b^2}$

即 $a^2 = 2b^2$.

因为 b 是整数且不为 0，

所以 a 是不为 0 的偶数.

设 $a = 2n$ (n 是整数，且 $n \neq 0$)，

则 $a^2 = 4n^2$.

所以 $b^2 = 2n^2$.

所以 b 也是偶数，与 a, b 是互素的整数矛盾.

所以 $\sqrt{2}$ 是无理数.

(2) 设 $\sqrt[3]{6} = \frac{a}{b}$, a 与 b 是互素的两个整数, 且 $b \neq 0$, 则 $6 = \frac{a^3}{b^3}$,

所以 $a^3 = 6b^3$,

$\therefore a, b$ 是整数且不为 0,

$\therefore a$ 为 6 的倍数.

设 $a = 6n$ (n 是整数),

$\therefore a^3 = 216n^3$,

$\therefore b^3 = 36n^3$,

$\therefore b$ 也是 6 的倍数, 与 a 与 b 是互素的整数矛盾,

$\therefore \sqrt[3]{6}$ 是无理数.

29. 材料一: 由 $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 2$ 可以看出, 两个含有二次根式的代数式相乘, 积不含有二次根式, 我们称这两个代数式互为有理化因式, 在进行二次根式计算时, 利用有理化因式, 有时可以化去分母中的根号, 例如:

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \sqrt{3} - \sqrt{2};$$

材料二: 根式化简

$$\frac{1}{3 + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right);$$

$$\frac{1}{5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{15}(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{15}(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

根据以上材料, 请完成下列问题:

(1) $\frac{3}{3 - \sqrt{6}} =$ _____; (直接写结果)

(2) 计算: $\frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100} + \sqrt{99}};$

(3) 计算: $\frac{1}{3 + \sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}} + \frac{1}{7\sqrt{5} + 5\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{49\sqrt{47} + 47\sqrt{49}};$

(4) 计算: $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{3 \times 5}} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{5 \times 7}} + \dots + \frac{\sqrt{2025} - \sqrt{2023}}{1 + \sqrt{2023} + \sqrt{2025} + \sqrt{2023 \times 2025}};$

【答案】(1) $3+\sqrt{6}$

(2)9

(3) $\frac{3}{7}$

(4) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{12}{23}$

【分析】本题考查分母有理数、二次根式的混合运算，理解分母有理化的求解过程并灵活运用是解答的关键。

(1) 仿照题中例题解过程求解即可；

(2) 仿照题中求解过程化简各式，然后加减运算即可求解；

(3) 仿照题中求解过程化简各式，然后加减运算即可求解；

(4) 先对分母分解因式，再进行裂项化简各数，然后加减运算即可。

【详解】(1) 解： $\frac{3}{3-\sqrt{6}} = \frac{3(3+\sqrt{6})}{(3-\sqrt{6})(3+\sqrt{6})} = \frac{3(3+\sqrt{6})}{9-6} = 3+\sqrt{6}$ ，

故答案为： $3+\sqrt{6}$

(2) 解： $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$

$$= \frac{1 \times (\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{1 \times (\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \frac{1 \times (\sqrt{4}-\sqrt{3})}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})} + \dots + \frac{1 \times (\sqrt{100}-\sqrt{99})}{(\sqrt{100}+\sqrt{99})(\sqrt{100}-\sqrt{99})}$$
$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3} + \dots + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{100-99} = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{100}-\sqrt{99})$$
$$= -1 + \sqrt{100}$$
$$= -1 + 10$$
$$= 9;$$

(3) 解： $\frac{1}{3+\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} + \frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{49\sqrt{47}+47\sqrt{49}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} + \frac{1}{\sqrt{3 \times 5}(\sqrt{5}+\sqrt{3})} + \frac{1}{\sqrt{5 \times 7}(\sqrt{7}+\sqrt{5})} + \dots + \frac{1}{\sqrt{47 \times 49}(\sqrt{49}+\sqrt{47})}$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3 \times 5}(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{5 \times 7}(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} + \dots + \frac{\sqrt{49}-\sqrt{47}}{\sqrt{47 \times 49}(\sqrt{49}+\sqrt{47})(\sqrt{49}-\sqrt{47})}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times 5} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\times 7} + \dots + \frac{\sqrt{49}-\sqrt{47}}{2\sqrt{47}\times 49} \\
&= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{47}} - \frac{1}{\sqrt{49}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{\sqrt{49}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{7} \right) \\
&= \frac{3}{7};
\end{aligned}$$

(4) 解: $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{3}\times 5} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{5}\times 7} + \dots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}{1+\sqrt{2023}+\sqrt{2025}+\sqrt{2023}\times 2025}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}} + \dots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}{1+\sqrt{2023}+\sqrt{2025}+\sqrt{2023}\cdot\sqrt{2025}} \\
&= \frac{(\sqrt{5}+1)-(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)} + \frac{(\sqrt{7}+1)-(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{7}+1)} + \dots + \frac{(\sqrt{2025}+1)-(\sqrt{2023}+1)}{(\sqrt{2023}+1)(\sqrt{2025}+1)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+1} - \frac{1}{\sqrt{7}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2023}+1} - \frac{1}{\sqrt{2025}+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{2025}+1} \\
&= \frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} - \frac{1}{45+1} \\
&= \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{1}{46} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{12}{23}.
\end{aligned}$$