

兰生中学 2025 学年第一学期八年级数学期中测试卷

(满分 100 分, 考试时间 90 分钟)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 若一个正整数的正平方根是 a , 则比这个正整数大 1 的数的正平方根是 ()

- A. $a+1$ B. $\sqrt{a}+1$ C. $\sqrt{a^2+1}$ D. a^2+1

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查求一个数的算术平方根, 由正整数的正平方根为 a , 可得该正整数为 a^2 , 则比它大 1 的数为 a^2+1 , 其正平方根为 $\sqrt{a^2+1}$, 即可得出结果.

【详解】解: 设这个正整数为 N ,

$\therefore N$ 的正平方根是 a ,

$\therefore N = a^2$.

$\therefore$ 比 N 大 1 的数为 $M = N + 1 = a^2 + 1$,

$\therefore M$ 的正平方根为 $\sqrt{M} = \sqrt{a^2 + 1}$.

故选 C.

2. 下列语句中, 说法正确的个数是 ()

① 4 的平方根是 ± 2 ;

② 0 的平方根和立方根都是 0;

③ $(-\sqrt{9})^2$ 的平方根是 ± 9 ;

④ 倒数是它本身的数是 1

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查平方根、立方根和倒数的概念. 逐个判断每个语句的正确性即可. 注意正数的平方根有正负两个值, 0 的平方根和立方根都是 0, 倒数是它本身的数有 1 和 -1 .

【详解】解: ① $\because (\pm 2)^2 = 4$, $\therefore 4$ 的平方根是 ± 2 , 正确.

② $\because 0^3 = 0$, $0^3 = 0$, $\therefore 0$ 的平方根和立方根都是 0, 正确.

$$\textcircled{3} \because \sqrt{9} = 3, \therefore -\sqrt{9} = -3, \therefore (-\sqrt{9})^2 = (-3)^2 = 9,$$

$\therefore 9$ 的平方根是 ± 3 , $\therefore$ 不是 ± 9 , 错误.

$$\textcircled{4} \text{ 设倒数是它本身的数为 } x, \text{ 则 } \frac{1}{x} = x, \text{ 化简得 } x^2 = 1, \text{ 解得 } x = \pm 1, \therefore \text{ 不仅是 } 1, \text{ 还有 } -1, \text{ 错误.}$$

$\therefore$ 正确的语句是 $\textcircled{1}$ 和 $\textcircled{2}$, 共 2 个.

故选: B

3. 下列二次根式中, 属于最简二次根式的是 ()

$$\text{A. } \sqrt{0.12} \quad \text{B. } \sqrt{13^2 - 12^2} \quad \text{C. } \sqrt{mn(a^2 + b^2)} (m \neq n) \quad \text{D. } \sqrt{\frac{x}{2}}$$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查的是最简二次根式的概念, 被开方数不含分母、被开方数中不含能开得尽方的因数或因式的二次根式, 叫做最简二次根式.

根据最简二次根式的条件进行判断即可.

$$\text{【详解】 解: A、} \sqrt{0.12} = \sqrt{\frac{3}{25}} = \frac{\sqrt{3}}{5}, \text{ 不是最简二次根式, 故本选项不符合题意;}$$

$$\text{B、} \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{5^2} = 5, \text{ 不是最简二次根式, 故本选项不符合题意;}$$

$$\text{C、} \sqrt{mn(a^2 + b^2)} (m \neq n) \text{ 是最简二次根式, 故本选项符合题意;}$$

$$\text{D、} \sqrt{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{2x}}{2}, \text{ 不是最简二次根式, 故本选项不符合题意;}$$

故选: C

4. 下列二次根式中, 与 $\sqrt{a+b}$ 互为有理化因式的是 ()

$$\text{A. } -\sqrt{a+b} \quad \text{B. } \sqrt{a-b} \quad \text{C. } \sqrt{a}-\sqrt{b} \quad \text{D. } \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查有理化因式, 根据有理化因式需满足相乘后结果为有理式, 对于 $\sqrt{a+b}$, 其有理化因式应为本身或相反数, 因平方后可得有理式 $a+b$ 或 $-(a+b)$, 即可得出结果.

$$\text{【详解】 解: } \because \sqrt{a+b} \times (-\sqrt{a+b}) = -(\sqrt{a+b})^2 = -(a+b), \text{ 结果为有理式,}$$

$$\therefore -\sqrt{a+b} \text{ 与 } \sqrt{a+b} \text{ 互为有理化因式;}$$

故选 A.

5. 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 下列说法中正确的有 () 个

- ①若 $b^2 - 4ac < 0$, 则该方程没有实数根;
- ②若 $b = 0$, 则该方程的两个根互为相反数;
- ③若 $c = 0$, 则该方程一定有两个实数根;
- ④若该方程的一个根是 $2 + \sqrt{3}$, 则另一个根是 $2 - \sqrt{3}$.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的判别式, 方程的解. 利用一元二次方程的判别式, 方程的解, 逐项判断, 即可求解.

【详解】 解: ①若 $b^2 - 4ac < 0$, 则该方程没有实数根, 正确;

②若 $b = 0$, 此时 $\Delta = b^2 - 4ac = -4ac$, 若 $-4ac < 0$, 该方程没有实数根, 故原说法错误;

③若 $c = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac = b^2 \geq 0$, 则该方程一定有两个实数根, 正确;

④若该方程的一个根是 $2 + \sqrt{3}$, 此时 $(7 + 4\sqrt{3})a + (2 + \sqrt{3})b + c = 0$, 即 $7a + 2b + c = -4\sqrt{3}a - \sqrt{3}b$,

当 $x = 2 - \sqrt{3}$ 时, $(7 - 4\sqrt{3})a + (2 - \sqrt{3})b + c = 7a + 2b + c - 4\sqrt{3}a - \sqrt{3}b = -8\sqrt{3}a - 2\sqrt{3}b$ 不一定为 0,

则无法确定 $2 - \sqrt{3}$ 是否为方程的根, 故原说法错误;

综上, 正确说法有①和③, 共 2 个.

故选: B

6. 若 $x = b$ 是方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的根 ($b \neq 0$), 则 $a + b$ 的值为 ()

A. $\frac{1}{2}$ B. 0 C. 1 D. -1

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的解, 将 $x = b$ 代入方程, 进行求解即可.

【详解】 解: $\because x = b$ 是方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的根,

$$\therefore b^2 + a \cdot b + b = 0,$$

$$\therefore b(b+a+1)=0,$$

$$\because b \neq 0,$$

$$\therefore b+a+1=0,$$

$$\therefore a+b=-1.$$

故选 D.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 在下列各数: $\frac{22}{7}, -\pi, \sqrt{4}, -\sqrt{5}, 1.\dot{3}, \sqrt{2}+1, \sqrt{8}, \sqrt[3]{9}, \frac{\pi^0}{2}$ 中, 无理数有_____个.

【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查无理数, 根据无理数是无限不循环小数, 进行判断即可.

【详解】 解: 在 $\frac{22}{7}, -\pi, \sqrt{4}=2, -\sqrt{5}, 1.\dot{3}, \sqrt{2}+1, \sqrt{8}, \sqrt[3]{9}, \frac{\pi^0}{2}=\frac{1}{2}$ 中, 无理数有 $-\pi, -\sqrt{5}, \sqrt{2}+1, \sqrt{8}, \sqrt[3]{9}$, 共 5 个.

故答案为: 5.

8. 若 $6.24 \approx 2.498^2, 62.4 \approx 7.899^2, \sqrt{62400} \approx$ _____

【答案】 249.8

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的性质, 根据已知条件, 得到 $\sqrt{6.24} \approx 2.498$, 将 $\sqrt{62400}$ 转化为 $\sqrt{6.24 \times 10000}$, 利用二次根式的性质, 进行求解即可.

【详解】 解: $\because 6.24 \approx 2.498^2$

$$\therefore \sqrt{6.24} \approx 2.498.$$

$$\because 62400 = 6.24 \times 10000,$$

$$\therefore \sqrt{62400} = \sqrt{6.24 \times 10000} = \sqrt{6.24} \times \sqrt{10000} \approx 2.498 \times 100 = 249.8.$$

故答案为: 249.8.

9. 比较大小: $\sqrt{3}-2$ _____ $2-\sqrt{5}$.

【答案】 <

【解析】

【分析】 本题考查二次根式比较大小，通过计算两个表达式的差值，并判断差值的正负来比较大小即可.

【详解】 解: $\sqrt{3}-2-(2-\sqrt{5})=\sqrt{3}+\sqrt{5}-4$,

$$\therefore (\sqrt{3}+\sqrt{5})^2=8+2\sqrt{15}<8+2\sqrt{16}=16,$$

$$\therefore \sqrt{3}+\sqrt{5}<4,$$

$$\therefore \sqrt{3}-2-(2-\sqrt{5})=\sqrt{3}+\sqrt{5}-4<0,$$

$$\therefore \sqrt{3}-2<2-\sqrt{5};$$

故答案为: $<$.

10. 当 x 满足_____时, $\frac{\sqrt{x+4}}{1-\sqrt{x^2}}$ 有意义.

【答案】 $x \geq -4$ 且 $x \neq \pm 1$

【解析】

【分析】 本题考查代数式有意义，根据被开方数为非负数，分式的分母不为 0，列出不等式组进行求解即可.

【详解】 解: 由题意, 得:
$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 1-\sqrt{x^2} \neq 0 \end{cases},$$

解得 $x \geq -4$ 且 $x \neq \pm 1$;

故答案为: $x \geq -4$ 且 $x \neq \pm 1$.

11. 已知 $n < 0$, 化简 $\sqrt{-\frac{n^2}{m^3}} =$ _____.

【答案】 $-\frac{n\sqrt{-m}}{m^2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质与化简，熟练掌握二次根式的性质是解题的关键.

根据二次根式有意义的条件，被开方数必须非负，结合已知 $n < 0$ ，可确定 $m < 0$ ，再化简二次根式，并理化分母即可.

【详解】 解: $\because -\frac{n^2}{m^3} \geq 0, n < 0,$

$$\therefore m < 0.$$

$$\therefore \sqrt{-\frac{n^2}{m^3}} = \sqrt{\frac{n^2}{-m^3}} = \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{-m^3}} = \frac{|n|}{\sqrt{-m^3}} = \frac{|n|\sqrt{-m}}{m^2} = -\frac{n\sqrt{-m}}{m^2}.$$

故答案为 $-\frac{n\sqrt{-m}}{m^2}$.

12. 已知某植物表皮细胞的直径约为 2×10^{-5} 米, 一个水分子的直径约为 4×10^{-10} 米, 用科学记数法表示水分子的直径是这种植物表皮细胞的直径的_____倍.

【答案】 2×10^{-5}

【解析】

【分析】 本题考查科学记数法, 同底数幂的除法; 用水分子的直径除以植物表皮细胞的直径, 得到倍数, 再根据科学记数法的要求表示结果.

【详解】 解: $\frac{4 \times 10^{-10}}{2 \times 10^{-5}} = \frac{4}{2} \times 10^{-10-(-5)} = 2 \times 10^{-5}$;

故答案为: 2×10^{-5} .

13. 点 A 、 B 、 C 是数轴上的三个点, 点 A 、 B 所对应的数分别为 -2 、 $\sqrt{5}$, 点 C 到点 A 的距离是它到点 B 距离的 2 倍, 则点 C 表示的数是_____.

【答案】 $\frac{2\sqrt{5}-2}{3}$ 或 $2+2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查实数与数轴, 一元一次方程, 两点间的距离, 分类讨论, 根据点 C 到点 A 的距离是它到点 B 距离的 2 倍, 列出方程是解题关键.

分两种情况进行讨论, 点 C 在点 A 、点 B 之间和点 C 在点 B 右侧时, 分别根据点 C 到点 A 的距离是它到点 B 距离的 2 倍, 列出方程即可解答.

【详解】 解: $\because$ 点 C 到点 A 的距离是它到点 B 距离的 2 倍,

$\therefore$ 点 C 不可能在点 A 左侧,

设 C 表示的数为 a ,

分两种情况: ①当点 C 在点 A 和点 B 之间时,

则 $AC = a - (-2) = a + 2$, $BC = \sqrt{5} - a$,

$\therefore a + 2 = 2(\sqrt{5} - a)$,

解得: $a = \frac{2\sqrt{5}-2}{3}$;

②当点 C 在点 B 右侧时,

则 $AC = a - (-2) = a + 2$, $BC = a - \sqrt{5}$,

$\therefore a + 2 = 2(a - \sqrt{5})$,

解得: $a = 2 + 2\sqrt{5}$.

综上, 点 C 表示的数是 $\frac{2\sqrt{5}-2}{3}$ 或 $2 + 2\sqrt{5}$.

故答案为: $\frac{2\sqrt{5}-2}{3}$ 或 $2 + 2\sqrt{5}$.

14. 写出一个一元二次方程, 使这个方程的二次项系数为 1, 常数项为 3, 且它的一个根为 -2 , 这个一元二次方程是_____

【答案】 $x^2 + \frac{7}{2}x + 3 = 0$

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程的解, 构造一元二次方程, 根据一元二次方程的一般形式 $ax^2 + bx + c = 0$, 由题意二次项系数 $a = 1$, 常数项 $c = 3$, 且一个根为 $x = -2$. 把 $x = -2$ 代入方程, 可求出一项系数 b , 从而得到方程.

【详解】解: 由题意, 设所求一元二次方程为 $x^2 + bx + 3 = 0$;

将 $x = -2$ 代入方程得: $(-2)^2 - 2b + 3 = 0$,

解得: $b = \frac{7}{2}$.

则方程为: $x^2 + \frac{7}{2}x + 3 = 0$;

故答案为: $x^2 + \frac{7}{2}x + 3 = 0$.

15. 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个根分别 $x_1 = -1, x_2 = 2$, 则方程 $c(x-1)^2 + b(x-1) + a = 0$ 的两个根分别是_____

【答案】 $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 0$

【解析】

【分析】本题考查根与系数的关系, 换元法解一元二次方程, 根据根与系数的关系得到 $-\frac{b}{a} = 1, \frac{c}{a} = -2$, 设 $y = x - 1$, 将方程 $c(x-1)^2 + b(x-1) + a = 0$ 化为 $cy^2 + by + a = 0$, 再将方程两边同时除以 a , 将方程化为 $-2y^2 - y + 1 = 0$, 进行求解即可.

【详解】解：∵ $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两个根分别 $x_1 = -1, x_2 = 2$,

$$\therefore x_1 + x_2 = 1 = -\frac{b}{a}, \text{ 即 } \frac{b}{a} = -1, \quad x_1 x_2 = -2 = \frac{c}{a}, \text{ 即 } \frac{c}{a} = -2.$$

设 $y = x - 1$,

则方程 $c(x-1)^2 + b(x-1) + a = 0$ 化为 $cy^2 + by + a = 0$.

两边除以 a ($a \neq 0$), 得 $\frac{c}{a}y^2 + \frac{b}{a}y + 1 = 0$.

代入 $\frac{c}{a} = -2, \frac{b}{a} = -1$, 得 $-2y^2 - y + 1 = 0$, 即 $2y^2 + y - 1 = 0$.

解得 $y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = -1$.

由 $y = x - 1$, 得 $x = y + 1$,

$$\therefore x_1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = -1 + 1 = 0.$$

∴ 方程 $c(x-1)^2 + b(x-1) + a = 0$ 的两个根为 $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 0$.

故答案为: $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 0$.

16. 已知关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - \sqrt{3k+2}x + 2 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 k 的取值范围是

【答案】 $-\frac{2}{3} \leq k < \frac{2}{5}$ 且 $k \neq 0$

【解析】

【分析】 本题考查根的判别式, 二次根式有意义的条件, 根据一元二次方程的定义得到 $k \neq 0$, 二次根式有意义, 得到 $3k+2 \geq 0$, 方程有 2 个不相等的实数根得到 $\Delta > 0$, 进行求解即可.

【详解】 解: 方程 $kx^2 - \sqrt{3k+2}x + 2 = 0$ 是一元二次方程, 故 $k \neq 0$;

$\sqrt{3k+2}$ 有意义, 故 $3k+2 \geq 0$, 解得 $k \geq -\frac{2}{3}$;

∵ 方程有 2 个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = \left[-\sqrt{3k+2}\right]^2 - 4 \cdot k \cdot 2 = (3k+2) - 8k = -5k+2 > 0, \text{ 解得 } k < \frac{2}{5};$$

综上, k 的取值范围是 $-\frac{2}{3} \leq k < \frac{2}{5}$ 且 $k \neq 0$;

故答案为: $-\frac{2}{3} \leq k < \frac{2}{5}$ 且 $k \neq 0$.

17. 如果实数 x 满足 $(x^2 - 2x)^2 + 2(x^2 - 2x) - 8 = 0$, 则代数式 $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x$ 的值为_____.

【答案】2

【解析】

【分析】本题主要考查了换元法解一元二次方程、因式分解的应用，解题时要熟练掌握并能准确计算是关键.

通过换元法，设 $t = x^2 - 2x$ ，将原方程转化为关于 t 的二次方程，解出 t 的值. 再将所求代数式用 t 表示，代入 t 的值求解. 由于 $t = -4$ 时对应方程无实数解，故只取 $t = 2$ ，得到代数式的值为 2.

【详解】解：设 $t = x^2 - 2x$ ，则原方程化为 $t^2 + 2t - 8 = 0$.

解方程 $t^2 + 2t - 8 = 0$,

判别式 $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 4 + 32 = 36 > 0$,

$$\text{所以 } t = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2},$$

得 $t_1 = 2$, $t_2 = -4$.

所求代数式 $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x = (x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x) = t^2 - t$.

当 $t = 2$ 时, $t^2 - t = 4 - 2 = 2$;

当 $t = -4$ 时, $t^2 - t = 16 - (-4) = 20$.

但 $t = -4$, 即 $x^2 - 2x = -4$, 整理得 $x^2 - 2x + 4 = 0$,

判别式 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 - 16 = -12 < 0$, 无实数解.

故只有 $t = 2$ 符合题意，代数式的值为 2.

故答案为：2.

18. $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，如 $[1.5] = 1, [-1.5] = -2$ ，则

$$[-\sqrt{1}] + [-\sqrt{2}] + [-\sqrt{3}] + \cdots + [-\sqrt{100}] = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案】-715

【解析】

【分析】本题考查新定义，估算无理数的大小，掌握算术平方根的定义，理解新定义 $[x]$ 的意义是正确解答的关键.

根据新定义得 $[-\sqrt{1}] = -1$, $[-\sqrt{2}] = -2$, $[-\sqrt{3}] = -2$, $[-\sqrt{4}] = -2$, $[-\sqrt{5}] = -3$, $[-\sqrt{6}] = -3$,
 $[-\sqrt{7}] = -3$, $[-\sqrt{8}] = -3$, $[-\sqrt{9}] = -3$, ..., $[-\sqrt{100}] = -10$, 再进行计算即可.

【详解】解: $\therefore [-\sqrt{1}] = -1$, $[-\sqrt{2}] = -2$, $[-\sqrt{3}] = -2$, $[-\sqrt{4}] = -2$, $[-\sqrt{5}] = -3$, $[-\sqrt{6}] = -3$,
 $[-\sqrt{7}] = -3$, $[-\sqrt{8}] = -3$, $[-\sqrt{9}] = -3$, ..., $[-\sqrt{100}] = -10$,

$$\begin{aligned} &\therefore [-\sqrt{1}] + [-\sqrt{2}] + [-\sqrt{3}] + \cdots + [-\sqrt{100}] \\ &= -1 + (-2) + (-2) + (-2) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + \cdots + (-10) \\ &= -1 - 2 \times 3 - 3 \times 5 - 4 \times 7 - 5 \times 9 - 6 \times 11 - 7 \times 13 - 8 \times 15 - 9 \times 17 - 10 \times 19 \\ &= -715. \end{aligned}$$

故答案为: -715 .

三、计算题 (本大题共 6 题, 每题 5 分, 满分 30 分)

19. 计算: $\sqrt[3]{-\frac{1}{64}} + \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2} + \sqrt[3]{0.125} - |2 - \sqrt{5}|$

【答案】 $3 - \sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查实数的混合运算, 先进行开方, 去绝对值运算, 再进行加减运算即可.

【详解】 解: 原式 $= -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 0.5 - \sqrt{5} + 2 = 3 - \sqrt{5}$.

20. 计算: $\sqrt{24} + 2\sqrt{\frac{3}{8}} - \sqrt{\frac{3}{2}} \div \sqrt{\frac{1}{18}} + \frac{2}{1-\sqrt{3}}$

【答案】 $\frac{5\sqrt{6}}{2} - 4\sqrt{3} - 1$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的混合运算, 先化简二次根式, 进行除法和分母有理化的运算, 再进行合并即可, 熟练掌握二次根式的混合运算是解题的关键.

【详解】 解: 原式 $= 2\sqrt{6} + \frac{1}{2}\sqrt{6} - \sqrt{\frac{3}{2} \times 18} + \frac{2(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}$

$$= 2\sqrt{6} + \frac{1}{2}\sqrt{6} - 3\sqrt{3} - 1 - \sqrt{3}$$

$$= \frac{5\sqrt{6}}{2} - 4\sqrt{3} - 1.$$

21. 计算: $\frac{4}{9}\sqrt{a^3b^2} + \left(\frac{3}{2}\sqrt{ab^3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{8}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$

【答案】 $\frac{4}{9}ab\sqrt{a} - \frac{9}{16}ab$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的混合运算，熟练掌握二次根式的化简和二次根式运算法则是解题的关键。根据二次根式的性质化简二次根式、二次根式乘法法则计算即可。

【详解】 解: $\frac{4}{9}\sqrt{a^3b^2} + \left(\frac{3}{2}\sqrt{ab^3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{8}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$

$$= \frac{4}{9}ab\sqrt{a} + \left[\frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{8}\right)\right] \sqrt{ab^3 \cdot \frac{a}{b}}$$

$$= \frac{4}{9}ab\sqrt{a} - \frac{9}{16}\sqrt{a^2b^2}$$

$$= \frac{4}{9}ab\sqrt{a} - \frac{9}{16}ab.$$

22. 解方程: $\frac{1}{3}(4x-5)^2 = 12(1-x)^2$

【答案】 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{11}{10}$

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程，熟练掌握解一元二次方程的方法是解题的关键。先去分母、移项将方程变形为 $(4x-5)^2 - [6(1-x)]^2 = 0$ ，再用因式分解法求解即可。

【详解】 解: $\frac{1}{3}(4x-5)^2 = 12(1-x)^2$,

变形得 $(4x-5)^2 - [6(1-x)]^2 = 0$,

因式分解，得 $[(4x-5) + 6(1-x)][(4x-5) - 6(1-x)] = 0$,

整理，得 $(1-2x)(10x-11) = 0$,

$\therefore 1-2x = 0$ 或 $10x-11 = 0$,

$\therefore x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{11}{10}$.

23. 用配方法解方程: $-2x^2 + \sqrt{3}x + 1 = 0$

【答案】 $x_1 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{11}}{4}, x_2 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{11}}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查配方法解一元二次方程，根据配方法的步骤，一除，二移，三配，四变形，进行求解即可.

【详解】 解： $-2x^2 + \sqrt{3}x + 1 = 0$,

$$x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2} = 0,$$

$$x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{1}{2},$$

$$x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{11}{16},$$

$$x - \frac{\sqrt{3}}{4} = \pm \frac{\sqrt{11}}{4},$$

解得 $x_1 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{11}}{4}, x_2 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{11}}{4}$.

24. 先化简再求值： $\sqrt{(a-1)^2} + \frac{2a^2 - 5a - 3}{a-3} - 2a$ ，其中 $a = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ ，

【答案】 $2-a, 2\sqrt{2}-1$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的化简求值，分式的化简求值，熟练掌握二次根式的性质与分式的性质是解题的关键.

先化简得 $a = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = 3-2\sqrt{2}$ ，则 $a-1 = 2-2\sqrt{2} < 0$ ，再化简 $\sqrt{(a-1)^2} + \frac{2a^2 - 5a - 3}{a-3} - 2a = 2-a$ ，

然后把 $a = 3-2\sqrt{2}$ 代入化简式计算即可.

【详解】 解： $\because a = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = 3-2\sqrt{2}$ ，

$$\therefore a-1=3-2\sqrt{2}-1=2-2\sqrt{2}<0,$$

$$\therefore \sqrt{(a-1)^2} + \frac{2a^2-5a-3}{a-3} - 2a$$

$$=|a-1| + \frac{(2a+1)(a-3)}{a-3} - 2a$$

$$=1-a+2a+1-2a$$

$$=2-a,$$

$$\text{当 } a=3-2\sqrt{2} \text{ 时, 原式} = 2 - (3-2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}-1.$$

四、解答题 (本大题共 4 题, 第 25, 26 题各 6 分, 第 27, 28 题各 8 分, 满分 28 分)

25. 已知 x, y 是有理数, 并且 x, y 满足 $2x^2 + \sqrt{4-2\sqrt{3}}y + \sqrt[3]{-8} = 5(x + \sqrt{12})$, 求 $x+y$ 的值.

【答案】 14 或 $\frac{17}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的化简, 解一元二次方程, 熟练掌握相关运算法则是解题的关键.

将原式化简后得到关于 x, y 的方程, 解方程即可.

$$\text{【详解】 解: } 2x^2 + \sqrt{4-2\sqrt{3}}y + \sqrt[3]{-8} = 5(x + \sqrt{12})$$

$$\text{则 } 2x^2 + \sqrt{3-2\sqrt{3}}y + \sqrt[3]{-8} = 5(x + 2\sqrt{3})$$

$$2x^2 + (\sqrt{3}-1)y + \sqrt[3]{-8} = 5(x + 2\sqrt{3})$$

$$2x^2 + \sqrt{3}y - y - 2 = 5x + 10\sqrt{3}$$

$$2x^2 - y - 2 + \sqrt{3}y = 5x + 10\sqrt{3}$$

$\because x, y$ 是有理数,

$$\therefore 2x^2 - y - 2 = 5x, \quad \sqrt{3}y = 10\sqrt{3},$$

$$\therefore y = 10,$$

$$\therefore 2x^2 - 10 - 2 = 5x,$$

$$2x^2 - 5x - 12 = 0,$$

$$(x-4)(2x+3) = 0,$$

解得: $x_1 = 4$, $x_2 = -\frac{3}{2}$,

$\therefore$ 当 $x = 4$, $y = 10$ 时, $x + y = 4 + 10 = 14$,

当 $x = -\frac{3}{2}$, $y = 10$ 时, $x + y = -\frac{3}{2} + 10 = \frac{17}{2}$.

$\therefore x + y$ 的值为 14 或 $\frac{17}{2}$.

26. 如果关于 x 的方程 $(m+1)x^2 + (2m-1)x + (m-1) = 0$ 没有实数根, 试判断关于 x 的方程 $(m-3)x^2 - 2(m+3)x - (m+5) = 0$ 的根的情况.

【答案】 当 $m = 3$ 时, 方程有一个实数根; 当 $m > \frac{5}{4}$ 且 $m \neq 3$ 时, 方程有两个不相等的实数根

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$: 当 $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$, 方程没有实数根.

首先根据已知方程无实根可得 m 的取值范围, 再计算新方程的判别式, 结合 m 的取值范围确定新方程根的判别式的情况, 进而得出新方程根的情况即可.

【详解】 解: 当 $m = -1$ 时, 方程 $(m+1)x^2 + (2m-1)x + (m-1) = 0$ 化为 $-3x - 2 = 0$,

解得 $x = -\frac{2}{3}$, 不符合题意,

当 $m \neq -1$ 时, 方程 $(m+1)x^2 + (2m-1)x + (m-1) = 0$ 没有实数根,

$$\therefore \Delta = (2m-1)^2 - 4m(m+1)(m-1) < 0,$$

解得 $m > \frac{5}{4}$;

当 $m = 3$ 时, 方程 $(m-3)x^2 - 2(m+3)x - (m+5) = 0$ 化为 $-12x - 8 = 0$,

解得 $x = -\frac{2}{3}$, 方程有一个根;

$$\text{当 } m > \frac{5}{4} \text{ 且 } m \neq 3 \text{ 时, } \Delta = 4(m+3)^2 + 4(m-3)(m+5) = 8[(m+2)^2 - 7] > 8\left[\left(\frac{5}{4} + 2\right)^2 - 7\right] = \frac{57}{2} > 0,$$

此时方程有两个不相等的实数解.

$\therefore$ 当 $m = 3$ 时, 方程有一个实数根; 当 $m > \frac{5}{4}$ 且 $m \neq 3$ 时, 方程有两个不相等的实数根.

27. (1) $m = 3 + \sqrt{5}$, $n = 3 - \sqrt{5}$, 且 $(3m^2 - 18m - a)(2n^2 - 12n - 6) = 56$, 求 a 的值.

(2) 已知实数 a 、 b 、 c 满足 $a + b - c = -5$, $ab - abc = 16$, 且 $c < 5$, 求 c 的最大值.

【答案】(1) -8

(2) 1

【解析】

【分析】(1) 先求出 $m+n=6, mn=4$, 则 m, n 是方程 $x^2-6x+4=0$ 的两根, 代入可得

$m^2-6m=-4, n^2-6n=-4$, 整体代入即可求出结果;

(2) 由题意可将 a, b 看成 $x^2-(c-5)x+\frac{16}{5-c}=0$ 的两个实数根, 再由 $\Delta \geq 0$, 结合 $c < 5$ 即可求解.

【详解】(1) 解: $\because m=3+\sqrt{5}, n=3-\sqrt{5}$,

$$\therefore m+n=6, mn=9-5=4,$$

$\therefore m, n$ 是方程 $x^2-6x+4=0$ 的两根,

$$\therefore m^2-6m=-4, n^2-6n=-4,$$

$$\therefore (3m^2-18m-a)(2n^2-12n-6)=56,$$

$$\therefore [3(m^2-6m)-a][2(n^2-6n)-6]=56,$$

$$\therefore (-12-a)(-8-6)=56,$$

$$\therefore a=-8;$$

$$(2) \because a+b-c=-5, 5ab-abc=16,$$

$$\therefore a+b=c-5, ab=\frac{16}{5-c},$$

$\therefore a, b$ 是方程 $x^2-(c-5)x+\frac{16}{5-c}=0$ 的两实根,

$$\therefore \Delta=(c-5)^2-4 \times \frac{16}{5-c} \geq 0, c < 5,$$

$$\therefore (5-c)^3 \geq 64,$$

$$\therefore c \leq 1,$$

即: c 的最大值是1.

【点睛】本题考查了一元二次方程的根与系数的关系及根的判别式; 关键是灵活应用知识点解决问题.

28. 已知 a, b, k 为实数, 关于 x 的方程 $(k^2-2k+4)x^2-2(a-k)^2x+(k^2-5ak-b)=0$, 无论 k 取何值时, 都有根 $x=1$.

(1) 求 a, b 的值.

(2) 当 k 变化时, 求方程的另一根 t 的取值范围.

【答案】(1) $a = -2$, $b = -4$

(2) $-1 \leq t \leq 7$

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的根, 根的判别式, 根与系数的关系, 能够理解题意, 得到关于 a 、 b 的方程组以及关于 t 的不等式是解题的关键.

(1) 把 $x = 1$ 代入方程, 整理得到 $(-a-2)k + (4-2a^2-b) = 0$, 根据题意得到 $-a-2=0$, $4-2a^2-b=0$, 即可求出 a 、 b 的值.

(2) 利用根与系数的关系 $1 \times t = \frac{k^2-5ak-b}{k^2-2k+4}$, 代入 $a = -2$, $b = -4$ 整理得

$(t-1)k^2 - (2t+10)k + (4t-4) = 0$, 由 k 为实数, 则 $\Delta \geq 0$, 据此列不等式并求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 关于 x 的方程 $(k^2-2k+4)x^2 - 2(a-k)^2x + (k^2-5ak-b) = 0$, 无论 k 取何值时, 都有根 $x = 1$,

$$\therefore (k^2-2k+4) - 2(a-k)^2 + (k^2-5ak-b) = 0,$$

$$\text{整理得 } (-a-2)k + (4-2a^2-b) = 0,$$

$\therefore$ 对任意 k 成立,

$$\therefore -a-2=0, \quad 4-2a^2-b=0,$$

解得 $a = -2$, $b = -4$;

【小问 2 详解】

解: 由根与系数的关系, $1 \times t = \frac{k^2-5ak-b}{k^2-2k+4}$,

$$\therefore a = -2, \quad b = -4,$$

$$\therefore t(k^2-2k+4) = k^2+10k+4,$$

$$\text{整理得 } (t-1)k^2 - (2t+10)k + (4t-4) = 0,$$

当 $t = 1$ 时, 方程化为 $-12k = 0$,

解得 $k = 0$;

当 $t \neq 1$ 时,

$\therefore k$ 为实数,

$$\therefore \Delta \geq 0,$$

$$\therefore (2t+10)^2 - 4(t-1)(4t-4) \geq 0,$$

$$\text{整理得 } t^2 - 6t - 7 \leq 0,$$

$$\therefore (t-7)(t+1) \leq 0,$$

$$\text{解得 } -1 \leq t \leq 7,$$

$$\text{综上所述, } -1 \leq t \leq 7.$$