

2025 学年度第一学期初二年级数学学科期中考试

一、单选题

1. 下列二次根式中，属于最简二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{0.12}$ B. $\sqrt{a^2+b^2}$ C. $\sqrt{a^4}$ D. $\sqrt{\frac{x}{3}}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据最简二次根式的定义即可求解.

【详解】解：A、 $\sqrt{0.12}$ 中被开方数含有分母，故不是最简二次根式，不合题意；

B、 $\sqrt{a^2+b^2}$ 是最简二次根式，符合题意；

C、 $\sqrt{a^4}$ 中被开方数含有偶次项，故不是最简二次根式，不合题意；

D、 $\sqrt{\frac{x}{3}}$ 中被开方数含有分母，故不是最简二次根式，不合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查了最简二次根式的定义，能熟记最简二次根式的定义是解此题的关键，满足以下两个条件的二次根式，叫最简二次根式：①被开方数中的因数是整数，因式是整式，②被开方数中不含有能开得尽方的因数和因式.

2. 下列说法正确的是（ ）

- A. 9 是 $\sqrt{81}$ 的算术平方根 B. $(-3)^2$ 的平方根是 3
C. 25 的平方根是 ± 5 D. $\sqrt[3]{-27} = 3$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了求一个数的平方根，立方根，算术平方根，掌握这些是解题的关键. 根据平方根，立方根，算术平方根的定义进行判断即可.

【详解】解：对于 A： $\because \sqrt{81} = 9$ ， $\therefore 9$ 不是 $\sqrt{81}$ 的算术平方根，故 A 不符合题意；

对于 B： $\because (-3)^2 = 9$ ，9 的平方根是 ± 3 ， $\therefore$ B 不符合题意；

对于 C： $\because 25$ 的平方根是 ± 5 ， $\therefore$ C 符合题意；

对于 D: $\because \sqrt[3]{-27} = -3 \neq 3$, $\therefore$ D 不符合题意.

故选: C.

3. 下列方程是一元二次方程的是 ()

- A. $x^2 + 1 = 0$ B. $x^2 + \frac{1}{x} = 0$ C. $x^2 + y = 3$ D. $2x - \frac{x+2}{3} = 1$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的定义, 根据一元二次方程的定义 (整式方程、一个未知数、未知数最高次数为 2) 逐一判断选项.

【详解】 解: 选项 A: 方程 $x^2 + 1 = 0$ 为整式方程, 仅含未知数 x , 且 x 的最高次数为 2, 符合一元二次方程的定义, 是一元二次方程;

选项 B: 方程 $x^2 + \frac{1}{x} = 0$ 中含分式 $\frac{1}{x}$, 分母含未知数, 不是整式方程, 不符合一元二次方程的定义, 不是一元二次方程;

选项 C: 方程 $x^2 + y = 3$ 含两个未知数 x 和 y , 不符合一元二次方程的定义, 不是一元二次方程;

选项 D: 方程 $2x - \frac{x+2}{3} = 1$ 化简后为 $5x = 5$, 是一元一次方程, 最高次数为 1, 不符合一元二次方程的定义, 不是一元二次方程.

故选: A.

4. 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx - a = 0$ (a 、 b 为常数, 且 $a \neq 0$), 这个方程的根的情况是 ()

- A. 有两个不相等的实数根 B. 有两个相等的实数根
C. 无实数根 D. 不能判断

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式, 熟知 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时, 一元二次方程有两个不相等的实数根是解题的关键.

【详解】 解: $\Delta = b^2 - 4a \cdot (-a) = b^2 + 4a^2$,

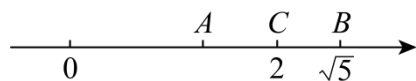
$\because a \neq 0$,

$\therefore \Delta > 0$,

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根,

故选 A.

5. 数轴上点 C 、点 B 表示数如图所示，且点 A 与点 B 关于点 C 成中心对称，则点 A 表示的数是 ()



- A. $\sqrt{2}$ B. $4-\sqrt{5}$ C. $\sqrt{5}-2$ D. $2\sqrt{5}-2$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查实数与数轴的对应关系和中心对称的性质，先根据点 A 与点 B 关于点 C 成中心对称，得到 $CB=CA=\sqrt{5}-2$ ，再由数轴上两点之间距离公式求解即可.

【详解】 解： $\because$ 点 A 与点 B 关于点 C 成中心对称，

$$\therefore CB=CA=\sqrt{5}-2,$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 表示的数是 } 2-(\sqrt{5}-2)=4-\sqrt{5},$$

故选： B.

6. 规定：若一个实数的算术平方根等于它的立方根，则称这样的数为“最美实数”. 若 $\sqrt{2}+a$ 是“最美实数”，则 a 的值是 ()

- A. $\sqrt{2}-1$ B. $-\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}-1$ D. $-\sqrt{2}$ 或 $1-\sqrt{2}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查算术平方根及立方根，根据“最美实数”的定义，可知 $\sqrt{2}+a=0$ 或 $\sqrt{2}+a=1$ ，求出 a 的值即可.

【详解】 解： 若 $\sqrt{2}+a$ 是“最美实数”，

$$\text{则有 } \sqrt{2}+a=0 \text{ 或 } \sqrt{2}+a=1,$$

$$\text{若 } \sqrt{2}+a=0, \text{ 解得 } a=-\sqrt{2},$$

$$\text{若 } \sqrt{2}+a=1, \text{ 解得 } a=1-\sqrt{2},$$

$$\text{综上, } a \text{ 的值为 } -\sqrt{2} \text{ 或 } 1-\sqrt{2},$$

故选： D.

二、填空题

7. $\sqrt{\frac{x-2}{x-5}} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-5}}$ 成立的条件是_____.

【答案】 $x > 5$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式商的性质，解题的关键是利用二次根式商的性质，商的算术平方根等于算术平方根的商，其中要满足的条件是分子的被开方数必须大于等于 0，分母的被开方数大于 0，列出关于 x 的一元一次不等式组.

【详解】 解：要使 $\sqrt{\frac{x-2}{x-5}} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-5}}$ 有意义，则：

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-5 > 0 \end{cases},$$

解得： $x > 5$,

故答案为： $x > 5$.

8. 计算： $\sqrt{(\pi-4)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $4 - \pi$

【解析】

【分析】 直接利用二次根式的性质化简得出答案.

【详解】 解： $\sqrt{(\pi-4)^2} = |\pi-4| = 4-\pi$.

故答案为： $4-\pi$.

【点睛】 本题主要考查了二次根式的性质与化简，二次根式的性质是解题关键.

9. 若最简二次根式 $2a\sqrt[4]{3a+b}$ 与 $\sqrt{a-b}$ 是同类根式，则 $a-3b = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 12

【解析】

【分析】 此题考查了同类二次根式的定义，熟记定义是解题的关键.

根据同类二次根式的定义，可得 $2a-4=2$ ， $3a+b=a-b$ ，求出 a 、 b ，代入 $a-3b$ 即可求解.

【详解】 $\because$ 二次根式 $2a\sqrt[4]{3a+b}$ 与 $\sqrt{a-b}$ 是同类根式，

$$\therefore 2a-4=2, \quad 3a+b=a-b,$$

解得： $a=3$ ， $b=-3$ ，

$$\therefore a-3b=3-3 \times (-3)=12,$$

故答案为：12.

10. 已知 $mn < 0$ ，化简： $\sqrt{-m^2n} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $m\sqrt{-n}$

【解析】

【分析】此题主要考查了二次根式的化简求值. 先根据二次根式的被开方数为非负数确定 m, n 的取值范围，然后化简二次根式是解题关键.

【详解】解： $\because -m^2n \geq 0, \quad mn < 0$

$\therefore m > 0, \quad n < 0,$

$\therefore \sqrt{-m^2n} = m\sqrt{-n},$

故答案为： $m\sqrt{-n}$.

11. 若 $x = -1$ 是方程 $2x^2 + mx - 5 = 0$ 的一个根，则该方程的另一个根是_____.

【答案】 $x = \frac{5}{2}$

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程根与系数的关系，对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，若 x_1, x_2 是该方程的两个实数根，则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ ，据此设方程的另一个根为 t ，则由根与系数的关系可得 $-1 \cdot t = -\frac{5}{2}$ ，即 $t = \frac{5}{2}$ ，据此可得答案.

【详解】解：设方程的另一个根为 t ,

$\because x = -1$ 和 $x = t$ 是方程 $2x^2 + mx - 5 = 0$ 的一个根,

$\therefore -1 \cdot t = -\frac{5}{2},$

$\therefore t = \frac{5}{2},$

$\therefore$ 方程的另一个根为 $x = \frac{5}{2},$

故答案为： $x = \frac{5}{2}$.

12. 方程 $kx^2 - (2k+1)x + k = 0$ 有两个实数根，则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \geq -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$

【解析】

【分析】 本题考查根的判别式，根据方程有两个实数根，得到 $\Delta \geq 0$ ，结合一元二次方程的二次项的系数不为 0，进行求解即可.

【详解】 解：由题意，得： $\Delta = (2k+1)^2 - 4k^2 = 4k+1 \geq 0$ ，且 $k \neq 0$ ，

解得： $k \geq -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$ ；

故答案为： $k \geq -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$.

13. 不等式 $x - 3\sqrt{2} > \sqrt{2}x$ 的解集是_____.

【答案】 $x < -6 - 3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 求得不等式的解集，进一步化简求得答案即可.

【详解】 解： $x - 3\sqrt{2} > \sqrt{2}x$ ，

$$\sqrt{2}x - x < -3\sqrt{2},$$

$$(\sqrt{2} - 1)x < -3\sqrt{2}$$

$$x < -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1},$$

$$\therefore -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = -\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = -6 - 3\sqrt{2},$$

$$\therefore x < -6 - 3\sqrt{2},$$

故答案为： $x < -6 - 3\sqrt{2}$.

【点睛】 此题考查二次根式的应用，掌握解不等式的方法与步骤是解决本题的关键.

14. 方程 $2x(x+1) = 3x+3$ 的解为_____.

【答案】 $x_1 = -1$ ， $x_2 = \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，利用因式分解法求解即可，解题的关键是熟记常见的解法，直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法及正确掌握一元二次方程的解法.

【详解】 解: $2x(x+1)=3x+3$

$$2x(x+1)=3(x+1)$$

$$2x(x+1)-3(x+1)=0$$

$$(x+1)(2x-3)=0$$

$$x+1=0 \text{ 或 } 2x-3=0$$

$$\therefore x_1=-1, \quad x_2=\frac{3}{2},$$

故答案为: $x_1=-1, \quad x_2=\frac{3}{2}$.

15. 在实数范围内分解因式: $2x^2-2xy-5y^2=$ _____.

【答案】 $2\left(x-\frac{1-\sqrt{11}}{2}y\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{11}}{2}y\right)$

【解析】

【分析】 首先将原式等于 0, 解关于 x 的方程, 进而分解因式得出即可.

【详解】 解: 令 $2x^2-2xy-5y^2=0$

解得: $x_1=\frac{1-\sqrt{11}}{2}y, \quad x_2=\frac{1+\sqrt{11}}{2}y,$

$$\therefore 2x^2-2xy-5y^2=2\left(x-\frac{1-\sqrt{11}}{2}y\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{11}}{2}y\right),$$

故答案为: $2\left(x-\frac{1-\sqrt{11}}{2}y\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{11}}{2}y\right)$.

【点睛】 此题主要考查了实数范围内分解因式, 正确解方程得出是解题关键.

16. 学校“930”艺术节需用红纸花 3000 朵, 某班全体同学自愿承担这批红纸花的制作任务, 在实际制作时, 有 10 名同学因排练节目而没有参加, 这样参加劳动的同学平均每人制花的数量比原定全班同学平均每人要完成的数量多 15 朵, 设这个班级共有 x 名同学, 根据题意可得方程_____.

【答案】 $\frac{3000}{x-10}-\frac{3000}{x}=15$

【解析】

【分析】本题考查了分式方程的实际应用，正确理解题意，找到等量关系是解题的关键。

设班级共有 x 名同学，根据实际平均每人制花数量比原定多 15 朵，列出分式方程即可。

【详解】解：设这个班级共有 x 名同学，则原定全班平均每人制作 $\frac{3000}{x}$ 朵红纸花。实际有 10 名同学因排

练节目未参加，因此实际参加劳动的同学有 $(x-10)$ 人，平均每人制作 $\frac{3000}{x-10}$ 朵。

根据题意，实际平均每人制花数量比原定全班平均每人数量多 15 朵，故可得方程 $\frac{3000}{x-10} - \frac{3000}{x} = 15$ 。

故答案为： $\frac{3000}{x-10} - \frac{3000}{x} = 15$ 。

17. 下列命题：①若 $x=1$ 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根，则 $x=1$ 也是方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 的根；

②若 $b > a + c$ ，则一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 一定有两个不相等的实数根；③若一元二次方程

$ax^2 + bx + c = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ，则一元二次方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 的两根为 $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ ；④一元二次方程

$ax^2 + bx + c = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ，若 $abc > 0$ ，则 $x_1 < 0, x_2 < 0$ 。

其中正确的是_____（填序号）。

【答案】①③##③①

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程的解，根的判别式，根与系数的关系，一元二次方程

$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当

$\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根。一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的

两个根 x_1, x_2 ，满足 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ 。

①把 $x=1$ 分别代入方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 和 $cx^2 + bx + a = 0$ 进行判断即可；②根据根的判别式进行判断即

可；③根据根与系数的关系进行判断即可；④根据 $a < 0, b > 0, c < 0$ 时，满足 $abc > 0$ ，由 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$ ，

$x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0$ ，得出 $x_1 > 0, x_2 > 0$ ，即可判断此项错误。

【详解】解：①把 $x=1$ 分别代入方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 和 $cx^2 + bx + a = 0$ 得：

$$a + b + c = 0, \quad c + b + a = 0,$$

$$\therefore a + b + c = c + b + a,$$

∴若 $x=1$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，则 $x=1$ 也是方程 $cx^2+bx+a=0$ 的根，故①正确；

②设 $a=-1, b=1, c=-1$ ，满足 $b>a+c$ ，

$$\text{但 } \Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = -3 < 0,$$

∴一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有实数根，故②错误；

$$\text{③} \because x_1+x_2 = -\frac{b}{a}, x_1x_2 = \frac{c}{a},$$

$$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = -\frac{b}{c},$$

$$\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1x_2} = \frac{a}{c},$$

∴ $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ 是一元二次方程 $cx^2+bx+a=0$ 的两根，故③正确；

④当 $a<0, b>0, c<0$ 时，满足 $abc>0$ ，

$$\text{此时 } x_1+x_2 = -\frac{b}{a} > 0, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a} > 0,$$

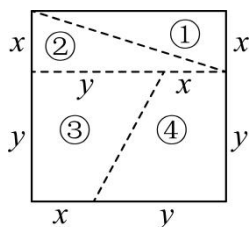
∴ $x_1>0, x_2>0$ ，故④错误；

综上所述可知：正确的是①③.

故答案为：①③.

18. 如图，将正方形沿图中虚线（其中 $x<y$ ）剪成①②③④四块图形，用这四块图形恰能拼成一个矩形（非

正方形），则 $\frac{x}{y}$ 的值为_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【解析】

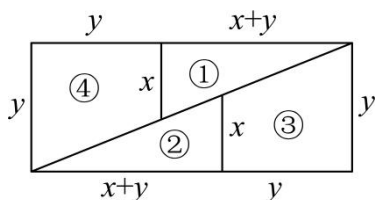
【分析】 本题考查了整式的运算与图形面积，一元二次方程的根的计算，理解图示，掌握整式的运算，求

根式公式的计算是关键.

根据图示, 把正方形面积, 拼接矩形的面积运用整式的混合运算表示出来, 再根据一元二次方程的求根公式的计算即可求解.

【详解】解: 根据题意, 正方形的面积为 $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$,

拼成一个矩形 (非正方形) 如下图,



$\therefore$ 矩形的面积为 $y(y+x+y) = xy + 2y^2$,

$$\therefore x^2 + 2xy + y^2 = xy + 2y^2,$$

$$\therefore x^2 + xy - y^2 = 0,$$

$$\therefore y \neq 0,$$

$$\therefore \text{等式两边同时除以 } y^2, \text{ 整理得, } \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 1 = 0,$$

$$\text{令 } \frac{x}{y} = t (t > 0), \text{ 则 } t^2 + t - 1 = 0,$$

$$\text{解得, } t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times (-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore t = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ (负值舍去),}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

三、计算题

$$19. \text{ 计算: } \left(3\sqrt{12} - 2\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{48}\right) \div 2\sqrt{3}$$

$$\text{【答案】 } \frac{14}{3}$$

【解析】

【分析】 先把括号内的各二次根式化为最简二次根式，然后合并后进行二次根式的除法运算；

【详解】 解：原式 $= \left(6\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} + 4\sqrt{3} \right) \div 2\sqrt{3}$ ，

$$= \frac{28\sqrt{3}}{3} \div 2\sqrt{3}，$$
$$= \frac{14}{3}.$$

【点睛】 本题考查了二次根式的混合运算：先把各二次根式化为最简二次根式，再进行二次根式的乘除运算，然后合并同类二次根式.

20. 计算： $\frac{3}{5}\sqrt{ab^2} \cdot \left(-\frac{5}{6}\sqrt{a^3b} \right) \div \frac{4}{15}\sqrt{\frac{b^2}{a}}$.

【答案】 $-\frac{15}{8}a^2\sqrt{ab}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的混合运算. 利用运算法则计算即可.

【详解】 解： $\frac{3}{5}\sqrt{ab^2} \cdot \left(-\frac{5}{6}\sqrt{a^3b} \right) \div \frac{4}{15}\sqrt{\frac{b^2}{a}}$ ，

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{a^4b^3} \div \frac{4}{15}\sqrt{\frac{b^2}{a}}，$$
$$= -\frac{1}{2}\sqrt{a^4b^3} \times \frac{15}{4}\sqrt{\frac{a}{b^2}}，$$
$$= -\frac{15}{8}\sqrt{a^5b}，$$
$$= -\frac{15}{8}a^2\sqrt{ab}.$$

21. 计算： $\frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{2}{1-\sqrt{3}} + \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

【答案】 1

【解析】

【分析】 先分母有理化，再根据二次根式的加减法法则进行计算即可.

【详解】 解：原式 $= 2\sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}$

$$= 1.$$

【点睛】 本题考查二次根式的运算，能正确分母有理化是解题的关键.

22. 化简: $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-b}+1\div\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{b}}{a+\sqrt{a}}$

【答案】 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\frac{\sqrt{ab}}{b}$.

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式的化简运算，计算量比较大，涉及平方差公式以及因式分解，熟练掌握二次根式的运算法则以及平方差公式和因式分解是解题的关键.

先将二次根式化简，然后将除法转化为乘法，再计算即可.

【详解】 解: 原式 $=\frac{\sqrt{b}(a-b)}{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}+1\div\frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}$

$$=\frac{\sqrt{b}(a-b)}{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}+1\div\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$$
$$=\frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}+1\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$
$$=\frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}+1\times\frac{\sqrt{ab}}{b}$$
$$=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\frac{\sqrt{ab}}{b}.$$

23. 解方程: $(x-3)(2x-5)=10$.

【答案】 $x_1=\frac{1}{2}, x_2=5$.

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，掌握一元二次方程的解法是解题的关键.

将方程化为一般形式，用因式分解法解方程即可.

【详解】 解: $(x-3)(2x-5)=10$

$$2x^2-11x+5=0$$

$$(2x-1)(x-5)=0$$

$$2x-1=0 \text{ 或 } x-5=0$$

$$\therefore x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 5.$$

24. 解方程: $2x^2 - 8x + 3 = 0$ (配方法)

【答案】 $x_1 = 2 + \frac{\sqrt{10}}{2}, \quad x_2 = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2}.$

【解析】

【分析】 本题主要考查了配方法解一元二次方程, 熟练掌握配方法解一元二次方程的步骤是解决此题的关键.

利用配方法解方程即可得解.

【详解】 解: $2x^2 - 8x + 3 = 0$

$$2(x^2 - 4x + 4) - 8 + 3 = 0$$

$$2(x-2)^2 = 5$$

$$(x-2)^2 = \frac{5}{2}$$

$$x-2 = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\therefore x_1 = 2 + \frac{\sqrt{10}}{2}, \quad x_2 = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

四:简答题

25. 请阅读下列材料:

问题: 已知 $x = \sqrt{5} + 2$, 求代数式 $x^2 - 4x - 7$ 的值. 小敏的做法是: 根据 $x = \sqrt{5} + 2$ 得 $(x-2)^2 = 5$,

$\therefore x^2 - 4x + 4 = 5$, 得 $x^2 - 4x = 1$. 把 $x^2 - 4x$ 作为整体代入得 $x^2 - 4x - 7 = 1 - 7 = -6$. 即: 把已知条件

适当变形, 再整体代入解决问题. 请你用上述方法解决下面问题:

(1) 已知 $x = \sqrt{5} - 2$, 求代数式 $x^2 + 4x - 10$ 的值;

(2) 已知 $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 求代数式 $x^3 + x^2 + 1$ 的值.

【答案】 (1) -9

(2) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

【解析】

【分析】(1) 本题主要考查了完全平方公式的应用、整体思想等知识点，根据完全平方公式求出 $x^2 + 4x = 1$ ，然后代入计算即可；掌握整体思想是解题的关键；

(2) 本题主要考查了二次根式的乘法、完全平方公式等知识点根据二次根式的乘法法则、完全平方公式计算可得 $x^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ， $x^3 = \sqrt{5} - 2$ ，然后整体代入计算即可；灵活运用相关运算法则是解题的关键.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \because x = \sqrt{5} - 2,$$

$$\therefore (x+2)^2 = 5,$$

$$\therefore x^2 + 4x + 4 = 5,$$

$$\therefore x^2 + 4x = 1,$$

$$\therefore x^2 + 4x - 10 = 1 - 10 = -9.$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because x = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore x^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore x^3 = x \cdot x^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} - 2,$$

$$\therefore x^3 + x^2 + 1 = \sqrt{5} - 2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

26. 上海市公安交警部门提醒市民，骑车出行必须严格遵守“一盔一带”的规定. 某头盔经销商统计了某品牌头盔 9 月份到 11 月份的销量，该品牌头盔 9 月份销售 500 个，11 月份销售 720 个，9 月份到 11 月份销量的月增长率相同.

(1) 求该品牌头盔销售量的月增长率；

(2) 若此种头盔的进价为 40 元/个，商家经过调查统计，当售价为 50 元/个时，月销售量为 500 个，若在此基础上售价每上涨 2 元/个，则月销售量将减少 10 个，为使月销售利润达到 9000 元，且尽可能让顾客得到实惠，则该品牌头盔每个售价应定为多少钱？

【答案】(1) 该品牌头盔销售量的月增长率为 20%

(2) 该品牌头盔每个售价应定为 60 元

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的实际应用，解题的关键是根据等量关系列出方程.

(1) 设该品牌头盔销售量的月增长率为 x ，根据该品牌头盔 10 月份销售 50 个，12 月份销售 72 个列出方程求解即可；

(2) 设该品牌头盔每个售价为 y 元，根据利润 = (售价 - 进价) $\times$ 销售量列出方程求解即可.

【小问 1 详解】

解：设该品牌头盔销售量的月增长率为 x ，

依题意，得： $500(1+x)^2 = 720$

解得 $x_1 = 0.2 = 20\%$, $x_2 = -2.2$ (不合题意，舍去)

答：设该品牌头盔销售量的月增长率为 20%.

【小问 2 详解】

解：设该品牌头盔每个售价为 y 元，依题意，得：

$$(y-40)\left(500-10\times\frac{y-50}{2}\right)=9000,$$

整理，得 $y^2 - 120y + 3500 = 0$

解得 $y_1 = 60, y_2 = 130$

因为尽可能让顾客得到实惠，所以 $y = 130$ 不合题意，舍去.

所以 $y = 60$.

答：该品牌头盔每个售价应定为 60 元.

27. 若一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有两个实数根为 α 、 β ，那么 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ ， $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ ，这就是一元二次方程的根与系数的关系. 利用该结论，不解方程便可以求二次方程的两根之和与积，例如

$2x^2 + x - 3 = 0$ 的两个根分别为 α 、 β . 则 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$ ， $\alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2}$.

(1) 小聪同学喜爱思考，他发现利用根与系数的关系不仅可以求解两根之和与两根之积，还可求解方程两根的倒数和. 不解方程，请求一元二次方程 $2x^2 + x - 3 = 0$ 的两个根的倒数和.

(2) 小明同学酷爱数学，他进一步研究根与系数的关系，发现了一种解一元二次方程的新方法. 例如方程

$$2x^2 - 3x - 7 = 0, \therefore a = 2, b = -3, c = -7, \therefore x_1 + x_2 = \frac{3}{2}, x_1 x_2 = -\frac{7}{2}.$$

设 $x_1 = \frac{3}{4} + k$, $x_2 = \frac{3}{4} - k$, 则 $x_1 x_2 = \left(\frac{3}{4} + k\right)\left(\frac{3}{4} - k\right) = \frac{7}{2}$, 即 $\frac{9}{16} - k^2 = -\frac{7}{2}$, 解得 $k = \pm \frac{\sqrt{65}}{4}$, 所以原

方程的解为 $x_1 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{65}}{4}$, $x_2 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{65}}{4}$. 请利用小明的方法解方程 $3x^2 - 4x - 2 = 0$.

(3) 小睿同学善于发现, 他对三次方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ 的根与系数关系作了探究, 将该方程两边同时除以 a 可得 $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$. 若该方程的三个根分别为 α 、 β 、 γ , 则

$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0$, 将其展开后为 $x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma = 0$, 于是

$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$ 、 $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a}$ 、 $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$. 若三次方程 $x^3 - x^2 - 3x - 10 = 0$ 的三个根分别为 α 、

β 、 γ , 且 $\mu = -\alpha + \beta + \gamma$. 请先说明 $\mu + 2\alpha = 1$ 、再直接 (不必书写过程) 写一个三次方程且使得该三

次方程的三个根分别为 $-\alpha + \beta + \gamma$ 、 $\alpha - \beta + \gamma$ 、 $\alpha + \beta - \gamma$.

【答案】 (1) $\frac{1}{3}$

$$(2) x_1 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3}, x_2 = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$(3) x^3 - x^2 - 13x - 93 = 0, \text{ 详见解析}$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的根与系数关系的综合应用等知识点,

(1) 把两根倒数和通分后代入计算即可;

(2) 仿照小明同学的求解即可;

(3) 由根与系数的关系, 可得 $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -3$, $\alpha\beta\gamma = 10$, 代入即可证出 $\mu + 2\alpha = 1$,

可设新方程为 $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$, 由题意和根与系数的关系化简即可得出 m , n , p 的值, 进而即可得解;

熟练掌握其性质并灵活运用是解决此题的关键.

【小问 1 详解】

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{b}{a} = -\frac{1}{2}, \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} = \frac{a+\beta}{a\beta} = -\frac{1}{2} \div \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3};$$

【小问2 详解】

$$3x^2 - 4x - 2 = 0,$$

$$\therefore a = 3, b = -4, c = -2,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{4}{3}, \quad x_1 x_2 = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{设 } x_1 = \frac{2}{3} + k, \quad x_2 = \frac{2}{3} - k,$$

$$\therefore x_1 x_2 = \left(\frac{2}{3} + k\right)\left(\frac{2}{3} - k\right) = -\frac{2}{3}, \quad \text{即 } \frac{4}{9} - k^2 = -\frac{2}{3},$$

$$\text{解得 } k = \pm \frac{\sqrt{10}}{3},$$

$$\therefore \text{原方程的解为 } x_1 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{3};$$

【小问3 详解】

$$\therefore \text{三次方程 } x^3 - x^2 - 3x - 10 = 0 \text{ 的三个根分别为 } a, \beta, \gamma, \text{ 且 } \mu = -a + \beta + \gamma,$$

$$\therefore \text{由根与系数的关系, 可得 } a + \beta + \gamma = 1, \quad a\beta + a\gamma + \beta\gamma = -3, \quad a\beta\gamma = 10,$$

$$\therefore \mu + 2a = (-a + \beta + \gamma) + 2a = a + \beta + \gamma = 1,$$

$$\text{由题意得, 可设新方程为 } x^3 + mx^2 + nx + p = 0,$$

$$\therefore \text{新的三次方程, 其三个根分别为 } -a + \beta + \gamma, \quad a - \beta + \gamma, \quad a + \beta - \gamma,$$

$$\text{又 } \therefore a + \beta + \gamma = 1,$$

$$\therefore \text{新的三次方程, 其三个根分别可化为 } 1 - 2a, \quad 1 - 2\beta, \quad 1 - 2\gamma,$$

$$\therefore (1 - 2a) + (1 - 2\beta) + (1 - 2\gamma) = -m, \quad (1 - 2a)(1 - 2\beta) + (1 - 2a)(1 - 2\gamma) + (1 - 2\beta)(1 - 2\gamma) = n,$$

$$(1 - 2a)(1 - 2\beta)(1 - 2\gamma) = p,$$

$$\therefore m = -[3 - 2(a + \beta + \gamma)] = -(3 - 2) = -1, \quad 3 - 4(a + \beta + \gamma) + 4(a\beta + a\gamma + \beta\gamma) = n,$$

$$1 - 2(a + \beta + \gamma) + 4(a\beta + a\gamma + \beta\gamma) - 8a\beta\gamma = p,$$

$$\therefore n = 3 - 4 \times 1 + 4 \times (-3) = -13, \quad p = 1 - 2 \times 1 + 4 \times (-3) - 8 \times 10 = -93,$$

∴ 新方程为 $x^3 - x^2 - 13x - 93 = 0$.