

2025 学年第一学期八年级数学学科期中自适应练习

时间：90 分钟 满分：100 分

一、选择题（本大题共 8 题，每题 3 分，满分 24 分）

1. 下列各数中，是无理数的是（ ）

A. 3.14

B. $\sqrt{\frac{9}{16}}$

C. 0

D. $\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了无理数，无理数是无限不循环小数，不能表示为两个整数之比。分别判断各选项即可。

【详解】解：A 选项：∵3.14 是有限小数，可写为分数，

∴3.14 是有理数，故 A 选项不符合题意；

B 选项：∵ $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ ，可写为分数，

∴ $\sqrt{\frac{9}{16}}$ 是有理数，故 B 选项不符合题意；

C 选项：∵0 是整数，

∴0 是有理数，故 C 选项不符合题意；

D 选项：∵ $\sqrt{2}$ 是开不尽方的数，是无限不循环小数，

∴ $\sqrt{2}$ 不能写为分数，是无理数，故 D 选项符合题意。

故选：D。

2. 下列各式计算正确的是（ ）

A. $\sqrt{3} + \sqrt{3} = \sqrt{6}$

B. $2\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2$

C. $2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6$

D. $2\sqrt{3} \div \frac{1}{\sqrt{3}} = 2$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查二次根式的运算，包括加法、减法、乘法和除法。需要根据二次根式的运算法则逐一判断。

【详解】解：A. $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ ，选项错误，不符合题意；

B. $2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$ ，选项错误，不符合题意；

C. $2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=6$ ，选项正确，符合题意；

D. $2\sqrt{3}\div\frac{1}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=6$ ，选项错误，不符合题意；

故选：C.

3. 在下列各式中，是 $\sqrt{2a+b}$ 的有理化因式的是（ ）

A. $\sqrt{2a+b}$

B. $\sqrt{2a-b}$

C. $\sqrt{2a}+b$

D. $\sqrt{2a}-b$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查有理化因式的概念.

有理化因式：两个含有根式的非零代数式相乘，如果它们的积不含有根式，那么这两个代数式就互为有理化因式，分别将选项代入计算看乘积是否含有根式即可.

【详解】A. $\sqrt{2a+b}\cdot\sqrt{2a+b}=2a+b$ ，结果不带根式，符合题意.

B. $\sqrt{2a+b}\cdot\sqrt{2a-b}=\sqrt{4a^2-b^2}$ ，结果带根式，不符合题意.

C. $\sqrt{2a+b}\cdot(\sqrt{2a}+b)=\sqrt{4a^2+2ab}+b\sqrt{2a+b}$ ，结果带根式，不符合题意.

D. $\sqrt{2a+b}\cdot(\sqrt{2a}-b)=\sqrt{4a^2+2ab}-b\sqrt{2a+b}$ ，结果带根式，不符合题意.

故选：A.

4. 下列方程中，是一元二次方程的是（ ）

A. $ax^2+bx+c=0$

B. $x^2-5x=0$

C. $y-2x=0$

D. $2x^3-2x-1=0$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的定义，一元二次方程需满足：①只含一个未知数；②未知数的最高次数为2；③整式方程.

根据一元二次方程的定义：只含有一个未知数，且未知数的最高次数为2的整式方程，逐一判断各选项.

【详解】解：A: $ax^2+bx+c=0$ 中， a 、 b 、 c 为参数，若 $a=0$ 则不是二次方程，故不一定是一元二次方程；

B: $x^2-5x=0$ 只含未知数 x ，且最高次数为2，是一元二次方程；

C: $y - 2x = 0$ 含两个未知数 y 和 x , 不是一元二次方程;

D: $2x^3 - 2x - 1 = 0$ 最高次数为 3, 不是一元二次方程;

故选: B.

5. 将一元二次方程 $x^2 - 8x - 5 = 0$ 化成 $(x + a)^2 = b$ (a 、 b 为常数) 的形式, 则 a 、 b 的值分别是 ()

A. -4 , 21

B. -4 , 11

C. 4 , 21

D. 4 , 11

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了配方法解一元二次方程.

通过配方法将方程左边化为完全平方式, 比较系数确定 a 和 b 的值.

【详解】解: $x^2 - 8x - 5 = 0$,

$$x^2 - 8x = 5,$$

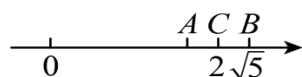
$$x^2 - 8x + 16 = 5 + 16,$$

$$(x - 4)^2 = 21,$$

可得 $a = -4$, $b = 21$,

故选: A.

6. 如图, 已知点 A 、 B 、 C 是数轴上的三个点, 且点 C 是线段 AB 的中点, 若点 C 、 B 所对应的实数依次是 2 、 $\sqrt{5}$, 则点 A 所对应的实数是 ()



A. $\sqrt{5} - 1$

B. $\sqrt{5} - 2$

C. $3 - \sqrt{5}$

D. $4 - \sqrt{5}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了实数与数轴, 数轴上两点之间的距离. 根据点 C 是线段 AB 的中点得到 $AC = BC = \sqrt{5} - 2$, 再由数轴上两点之间的距离公式求解.

【详解】解: 点 A 所对应的实数是 $2 - (\sqrt{5} - 2) = 4 - \sqrt{5}$,

故选: D.

7. 关于等腰三角形的描述, 下列说法错误的是 ()

- A. 等腰三角形是轴对称图形
B. 等腰三角形的两个底角相等
C. 等腰三角形的对称轴是它的高
D. 等腰三角形顶角的平分线垂直于底边

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查等腰三角形的性质，包括轴对称性、底角相等、对称轴的位置以及顶角平分线的性质，根据等腰三角形的性质逐项分析即可得解，熟练掌握等腰三角形的性质是解此题的关键。

【详解】解：A、等腰三角形是轴对称图形，故原说法正确，不符合题意；
B、等腰三角形的两个底角相等，故原说法正确，不符合题意；
C、等腰三角形的对称轴是顶角平分线所在的直线，故原说法错误，符合题意；
D、等腰三角形顶角的平分线垂直于底边，故原说法正确，不符合题意；
故选：C.

8. 已知整数 x 、 y 满足 $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = \sqrt{50}$ ，那么能满足条件的整数 x 的个数是（ ）

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查二次根式的加法运算，根据题意，分 $x=0$ ， $y=0$ ，以及 $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ 化简后为被开方数为 2 的同类二次根式，三种情况进行讨论求解即可。

【详解】解： $\because \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ ，

$\therefore x \geq 0, y \geq 0$ ，

$\therefore x=0$ 或 $y=0$ 或 $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ 化简后为被开方数为 2 的同类二次根式，

当 $x=0$ 时，此时 y 不是整数，不符合题意；

当 $y=0$ 时，此时 $x=50$ ，符合题意；

当 $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ 化简后为被开方数为 2 的同类二次根式时：设 $\sqrt{x} = a\sqrt{2}, \sqrt{y} = b\sqrt{2}$ ，

$\therefore a\sqrt{2} + 2b\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ ，

$\therefore a + 2b = 5$ ，

当 $a=1$ 时， $b=2$ ，符合题意，此时 $\sqrt{x} = \sqrt{2}$ ，故 $x=2$ ；

当 $a=3$ 时， $b=1$ ，符合题意，此时 $\sqrt{x} = 3\sqrt{2} = \sqrt{18}$ ，故 $x=18$ ；

综上: $x = 2, 18, 50$;

故选 D.

二、填空题 (本大题共 10 题, 每题 3 分, 满分 30 分)

9. $-\frac{8}{27}$ 立方根是_____.

【答案】 $-\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 此题考查了立方根的定义, 熟练掌握立方根的定义是解答问题的关键.

如果一个数的立方等于 a , 这个数叫做 a 的立方根, 根据立方根的定义求解即可.

【详解】 解: $-\frac{8}{27}$ 立方根是 $-\frac{2}{3}$,

故答案为: $-\frac{2}{3}$.

10. 用科学记数法表示 -0.000000325 为_____.

【答案】 -3.25×10^{-7}

【解析】

【分析】 本题考查了科学记数法的表示方法, 科学记数法的表现形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同, 当原数绝对值大于等于 10 时, n 是非负数, 当原数绝对值小于 1 时, n 是负数, 表示时关键是要正确确定 a 的值以及 n 的值.

【详解】 解: $-0.000000325 = -3.25 \times 10^{-7}$,

故答案为: -3.25×10^{-7} .

11. 比较大小: $\frac{\sqrt{15}}{2}$ _____ 2. (填 “>”、“=” 或 “<”)

【答案】 <

【解析】

【分析】 本题主要考查实数大小的比较, 关键要熟记实数大小的比较方法. 通过将两个数转换为同分母形式, 比较分子的大小即可.

【详解】 解: $\because \sqrt{15} < 4$,

$$\therefore \frac{\sqrt{15}}{2} < \frac{4}{2},$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{15}}{2} < 2.$$

故答案为: $<$.

12. 如果最简二次根式 $\sqrt{2a+5}$ 与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式, 那么 $a =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查了同类二次根式, 解一元一次方程, 根据同类二次根式的定义, 两个最简二次根式的被开方数必须相等, 得出 $2a+5=3$, 解方程即可得解, 熟练掌握同类二次根式的定义是解此题的关键.

【详解】 解: $\because$ 最简二次根式 $\sqrt{2a+5}$ 与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式,

$\therefore$ 被开方数相等, 即 $2a+5=3$,

解得: $a=-1$,

故答案为 -1 .

13. 一元二次方程 $x^2-5x-6=0$ 的根为 _____.

【答案】 $x_1=-1$, $x_2=6$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程, 熟练掌握解一元二次方程的常用方法 (直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法、换元法等) 是解题关键.

利用因式分解法解一元二次方程即可得.

【详解】 解: $x^2-5x-6=0$,

$$(x+1)(x-6)=0,$$

$$x+1=0 \text{ 或 } x-6=0,$$

$$x=-1 \text{ 或 } x=6,$$

即方程 $x^2-5x-6=0$ 的根为 $x_1=-1$, $x_2=6$,

故答案为: $x_1=-1$, $x_2=6$.

14. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k-1)x=-1$ 有两个相等的实数根, 则实数 k 的值是 _____.

【答案】 $k = \frac{3}{2}$ 或 $k = -\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的判别式.

根据一元二次方程有两个相等的实数根的条件, 判别式等于零, 列方程求解.

【详解】 解: 将原方程化为标准形式: $x^2 - (2k-1)x + 1 = 0$,

其中 $a = 1$, $b = -(2k-1)$, $c = 1$,

$$\text{所以 } \Delta = [-(2k-1)]^2 - 4 \times 1 \times 1 = (2k-1)^2 - 4 = 0.$$

$$\text{即 } (2k-1)^2 = 4,$$

解得 $2k-1 = 2$ 或 $2k-1 = -2$.

当 $2k-1 = 2$ 时, $k = \frac{3}{2}$;

当 $2k-1 = -2$ 时, $k = -\frac{1}{2}$.

故答案为: $k = \frac{3}{2}$ 或 $k = -\frac{1}{2}$.

15. 已知 $y = \sqrt{x-7} + \sqrt{7-x} + 9$, 那么 $x+y$ 的平方根为_____.

【答案】 ± 4

【解析】

【分析】 本题考查了求一个数的平方根, 二次根式有意义的条件, 根据二次根式有意义的条件确定 x 的值, 进而求出 y 的值, 计算 $x+y$ 后求其平方根即可.

【详解】 解: $\because$ 式子 $y = \sqrt{x-7} + \sqrt{7-x} + 9$ 有意义,

$$\therefore x-7 \geq 0 \text{ 且 } 7-x \geq 0,$$

$$\therefore x = 7,$$

$$\therefore y = \sqrt{7-7} + \sqrt{7-7} + 9 = 0 + 0 + 9 = 9,$$

$$\therefore x+y = 7+9 = 16$$

$\therefore 16$ 的平方根为 ± 4 ,

$\therefore x+y$ 的平方根为 ± 4 ,

故答案为: ± 4 .

16. 已知 m 是方程 $2x^2 - x - 1 = 0$ 的根, 则代数式 $27 - 4m^2 + 2m$ 的值为_____.

【答案】 25

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的解的定义，根据一元二次方程的解的定义可得 $2m^2 - m = 1$ ，而 $27 - 4m^2 + 2m = 27 - 2(2m^2 - m)$ ，据此代入数值计算即可.

【详解】 解： $\because m$ 是方程 $2x^2 - x - 1 = 0$ 的根，

$$\therefore 2m^2 - m - 1 = 0, \text{ 即 } 2m^2 - m = 1,$$

$$\therefore 27 - 4m^2 + 2m = 27 - 2(2m^2 - m) = 27 - 2 \times 1 = 25,$$

故答案为： 25.

17. 已知 a 、 b 是等腰三角形的两边长，且 a 、 b 满足 $\sqrt{a-b+4} + (a+b-10)^2 = 0$ ，则这个等腰三角形的周长为_____.

【答案】 17

【解析】

【分析】 本题主要考查非负数的性质、等腰三角形的定义，三角形的三边关系等知识点，利用三角形的三边关系进行验证是解题的关键. 根据非负数的性质，算术平方根和平方均为非负数，它们的和为零则每个部分为零，从而得到关于 a 和 b 的方程组，解出 a 和 b 的值；再根据等腰三角形的性质，分情况讨论，并利用三角形三边关系判断是否构成三角形，最后计算周长.

【详解】 解： $\because \sqrt{a-b+4} + (a+b-10)^2 = 0$ ，且 $\sqrt{a-b+4} \geq 0$ ， $(a+b-10)^2 \geq 0$ ，

$$\therefore a-b+4=0 \text{ 且 } a+b-10=0.$$

$$\text{解方程组得, } \begin{cases} a=3 \\ b=7 \end{cases}$$

$\because a$ 、 b 是等腰三角形的两边长，

$\therefore$ 需分情况讨论：

当 a 为腰时，则腰长为 3，底边为 7，此时两边之和 $3+3=6 < 7$ ，不满足三角形三边关系，故不成立；

当 b 为腰时，则腰长为 7，底边为 3，此时两边之和 $7+3=10 > 7$ ， $7+7=14 > 3$ ，满足三角形三边关系，故成立.

综上，等腰三角形的三边分别为： 7、7、3，周长为： $7+7+3=17$.

故答案为： 17.

18. 中国古代大数学家张丘建在其著作《张丘建算经》三卷中，用开方法解决了求自然数算术平方根的近似

值问题. 即若设自然数为 N , 它的算术平方根的整数部分为 a , 则 $\sqrt{N} \approx a + \frac{N-a^2}{2a+1}$. 按照上述取近似值的方法, $\sqrt{10} \approx$ _____ (精确到 0.001)

【答案】 3.143

【解析】

【分析】 本题考查了估算无理数的大小, 代数式的求值, 利用估算得出 a 的值是解题的关键.

先估算出 $\sqrt{10}$ 的大小, 得到 a 的值, 代入求解即可.

【详解】 解: $\because 9 < 10 < 16$,

$$\therefore 3 < \sqrt{10} < 4,$$

$$\therefore \sqrt{10} \text{ 的整数部分为 } 3, \text{ 即 } a = 3,$$

$$\therefore \sqrt{10} \approx 3 + \frac{10-3^2}{2 \times 3 + 1} = 3 + \frac{1}{7} \approx 3.143.$$

故答案为: 3.143.

三、解答题 (本大题共 7 题, 第 19 题 8 分, 第 20~22 题每题 4 分, 第 23~24 题每题 8 分, 第 25 题 10 分, 满分 46 分)

19. 计算:

$$(1) \sqrt[3]{-64} + \sqrt{(-4)^2} + |2 - \sqrt{5}|;$$

$$(2) \frac{2}{3}\sqrt{9x} - 2x\sqrt{\frac{1}{x}} + 6\sqrt{\frac{x}{4}}.$$

【答案】 (1) $\sqrt{5} - 2$

$$(2) 3\sqrt{x}$$

【解析】

【分析】 本题考查了实数的混合运算, 二次根式的加减运算, 解题的关键是熟练掌握运算法则.

(1) 分别计算立方根和算术平方根以及化简绝对值, 再进行加减计算;

(2) 先化简二次根式, 再进行合并即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \sqrt[3]{-64} + \sqrt{(-4)^2} + |2 - \sqrt{5}|$$

$$= -4 + 4 + \sqrt{5} - 2$$

$$= \sqrt{5} - 2.$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \frac{2}{3}\sqrt{9x} - 2x\sqrt{\frac{1}{x}} + 6\sqrt{\frac{x}{4}}$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x}$$

$$= 3\sqrt{x}.$$

$$20. \text{ 用配方法解方程: } 3x^2 - 4x = \frac{2}{3}.$$

$$\text{【答案】 } x_1 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3}$$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，先将二次项系数化为1，再将方程两边同时加上 $\frac{4}{9}$ ，进行配方，计算即可得解，熟练掌握配方法解一元二次方程是解此题的关键.

$$\text{【详解】 解: } \because 3x^2 - 4x = \frac{2}{3},$$

$$\therefore x^2 - \frac{4}{3}x = \frac{2}{9},$$

$$\therefore x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = \frac{2}{9} + \frac{4}{9}, \text{ 即 } \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{6}{9},$$

$$\therefore x - \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ 或 } x - \frac{2}{3} = -\frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore x_1 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$21. \text{ 解方程: } \frac{(2x-1)^2}{3} = \frac{1-2x}{4}$$

$$\text{【答案】 } x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{8}$$

【解析】

【分析】 先去分母，化简成一元二次方程一般式，再用因式分解法解一元二次方程即可.

$$\text{【详解】 解: } \frac{(2x-1)^2}{3} = \frac{1-2x}{4}$$

$$4(4x^2 - 4x + 1) = 3(1 - 2x)$$

$$16x^2 - 16x + 4 = 3 - 6x$$

$$16x^2 - 10x + 1 = 0$$

$$(2x - 1)(8x - 1) = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{8}.$$

【点睛】 本题考查因式分解法解一元二次方程，正确计算是解题的关键.

22. 解不等式: $\sqrt{5}x > 3x - 4\sqrt{3}$.

【答案】 $x < 3\sqrt{3} + \sqrt{15}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次不等式，分母有理化，根据解一元一次不等式的步骤计算并结合二次根式分母有理化的法则计算即可得解，熟练掌握运算法则是解此题的关键.

【详解】 解: $\because \sqrt{5}x > 3x - 4\sqrt{3}$,

$$\therefore (3 - \sqrt{5})x < 4\sqrt{3},$$

$$\because 5 < 9,$$

$$\therefore \sqrt{5} < \sqrt{9}, \text{ 即 } \sqrt{5} < 3,$$

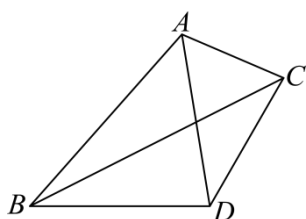
$$\therefore x < \frac{4\sqrt{3}}{3 - \sqrt{5}},$$

$$\therefore x < \frac{4\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})},$$

$$\therefore x < 3\sqrt{3} + \sqrt{15}.$$

所以原不等式的解集是 $x < 3\sqrt{3} + \sqrt{15}$.

23. 如图，已知：在 $\triangle ABD$ 中， $\angle BAC = 100^\circ$ ， AD 平分 $\angle BAC$ (D 为 $\triangle ABC$ 外一点)， $\angle ADB = 80^\circ$.



- (1) 求证: $\triangle ABD$ 是等腰三角形;
 (2) 如果 $CD \perp AC$, 求证: $AB = 2AC$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查了三角形内角和定理, 等腰三角形的性质与判定, 全等三角形的性质与判定;

- (1) 根据已知结合三角形内角和定理得出 $\angle ABD = \angle BAD$, 根据等角对等边即可得证;
 (2) 过点 D 作 $DE \perp AB$, 垂足为点 E , 根据三线合一可得 $AB = 2AE$, 进而证明 $\triangle ADE \cong \triangle ADC$ 得出 $AC = AE$, 即可得 $AB = 2AC$.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle BAC = 100^\circ$, AD 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 50^\circ.$$

$$\because \angle ADB + \angle ABD + \angle BAD = 180^\circ, \angle ADB = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = 50^\circ.$$

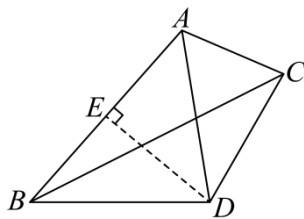
$$\therefore \angle ABD = \angle BAD.$$

$$\therefore AD = BD,$$

即 $\triangle ABD$ 是等腰三角形.

【小问 2 详解】

证明: 过点 D 作 $DE \perp AB$, 垂足为点 E .



$$\because DB = DA, DE \perp AB,$$

$$\therefore AB = 2AE.$$

$$\because CD \perp AC, DE \perp AB,$$

$$\therefore \angle AED = \angle ACD = 90^\circ.$$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ADC$ 中,

$$\therefore \begin{cases} \angle AED = \angle ACD, \\ \angle BAD = \angle DAC, \\ AD = AD, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ADC.$$

$$\therefore AC = AE.$$

$$\therefore AB = 2AC.$$

24. 定义: 若 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = c$, c 是有理数, 则称 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 与 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ 是关于 c 的“美好数”例

如: $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 1$, 则称 $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ 是关于 1 的“美好数”.

(1) $2 + \sqrt{3}$ 关于 1 的“美好数”是_____;

(2) 化简: $\frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11} + \sqrt{13}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{119} + \sqrt{121}};$

(3) 若 y 是 $\sqrt{10} - 1$ 关于 9 的“美好数”, 请直接写出 $4y^2 - 8y + 2025$ 的值.

【答案】 (1) $2 - \sqrt{3}$;

(2) 4;

(3) 2061.

【解析】

【分析】 本题考查了“美好数”的新定义, 分母有理化, 二次根式的运算, 因式分解的应用, 掌握知识点的应用是解题的关键.

(1) 利用“美好数”的新定义, 分母有理化解答即可求解;

(2) 利用“美好数”的新定义, 分母有理化解答即可求解;

(3) 利用“美好数”的新定义, 分母有理化求出 y , 再把 $4y^2 - 8y + 2025$ 变形为 $4(y-1)^2 + 2021$, 最后代入求值即可.

【小问 1 详解】

解: 由“美好数”的新定义可得,

$$\text{则 } 2 + \sqrt{3} \text{ 关于 1 的“美好数”是 } \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3},$$

故答案为: $2 - \sqrt{3}$;

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11} + \sqrt{13}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{119} + \sqrt{121}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(-\sqrt{9} + \sqrt{11} - \sqrt{11} + \sqrt{13} + \cdots - \sqrt{119} + \sqrt{121}) \\
&= \frac{1}{2}(-\sqrt{9} + \sqrt{121}) \\
&= \frac{1}{2}(-3 + 11) \\
&= \frac{1}{2} \times 8 \\
&= 4;
\end{aligned}$$

【小问3 详解】

解: $\sqrt{10}-1$ 关于 9 的“美好数” $y = \frac{9}{\sqrt{10}-1} = \sqrt{10}+1$,

$$\begin{aligned}
&\therefore 4y^2 - 8y + 2025 \\
&= 4(y-1)^2 + 2021 \\
&= 4(\sqrt{10}+1-1)^2 + 2021 \\
&= 4 \times (\sqrt{10})^2 + 2021 \\
&= 4 \times 10 + 2021 \\
&= 2061.
\end{aligned}$$

25. 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2 + mx + n = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1 、 x_2 , 小普发现对于这个方程的两根, 有 $x_1 + x_2 = -m$, $x_1 x_2 = n$. 假设 x_1 、 x_2 在数轴上对应的点分别为 P_1 、 P_2 , 点 P_1 、 P_2 之间的距离为 2, $P_1 P_2$ 的中点表示的数是 p .

(1) 当 $m = \sqrt{5}$ 时, $p =$ _____;

(2) 根据小普的结论, 求 m 、 n ; (结果用含 p 的代数式表示)

(3) 如果 n 是一个正整数的平方, 现保持 $P_1 P_2$ 的中点不变, P_1 、 P_2 之间的距离变为 8, 对应的方程 $x^2 + m_1 x + n_1 = 0$ 中 n_1 也是一个正整数的平方, 求 $P_1 P_2$ 的中点表示的数.

【答案】(1) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

(2) $m = -2p$, $n = p^2 - 1$

(3) $\sqrt{65}$ 或 $-\sqrt{65}$ 或 $\sqrt{17}$ 或 $-\sqrt{17}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根与系数的关系，利用完全平方公式变形求值，因式分解的应用，求一个数的平方根等知识点.

(1) 根据数轴上中点坐标公式求解；

(2) 根据 $p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-m}{2}$ ，即可表示 $m = -2p$ ；由题意得 $|x_1 - x_2| = 2$ ，再由 $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = 2$ 代入化简即可；

(3) 当 $P_1P_2 = 2$ 时， $n = p^2 - 1 = c^2$ (c 为正整数)，则当 $P_1P_2 = 8$ 时， $n_1 = p^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2 = d^2$ (d 为正整数，且 $d < c$)，则 $c^2 - d^2 = 15$ ，即 $(c + d)(c - d) = 15$ ，再分类讨论求解.

【小问 1 详解】

解： $\because P_1P_2$ 的中点表示的数是 p ，

$$\therefore p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-m}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2},$$

故答案为： $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ ；

【小问 2 详解】

解： $\because p = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ，

$$\therefore x_1 + x_2 = 2p,$$

$$\because x_1 + x_2 = -m,$$

$$\therefore m = -2p;$$

由题意得 $|x_1 - x_2| = 2$ ，

$$\therefore |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{(-m)^2 - 4n} = \sqrt{(2p)^2 - 4n} = \sqrt{4p^2 - 4n} = 2,$$

$$\therefore 4p^2 - 4n = 4,$$

$$\therefore n = p^2 - 1;$$

【小问 3 详解】

解： 当 $P_1P_2 = 2$ 时， $n = p^2 - 1 = c^2$ (c 为正整数)，

$$\text{当 } P_1P_2 = 8 \text{ 时, } n_1 = p^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2 = d^2 \quad (d \text{ 为正整数, 且 } d < c),$$

$$\therefore \text{ 两式相减得 } c^2 - d^2 = 15,$$

$$\text{即 } (c+d)(c-d) = 15.$$

$$\therefore \begin{cases} c+d=15 \\ c-d=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} c+d=5 \\ c-d=3 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} c_1=8 \\ d_1=7 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} c_2=4 \\ d_2=1 \end{cases},$$

$$\therefore p^2 = 7^2 + 4^2 = 65 \text{ 或 } p^2 = 1^2 + 4^2 = 17$$

$$\therefore p_1 = \sqrt{65}, \quad p_2 = -\sqrt{65}, \quad p_3 = \sqrt{17}, \quad p_4 = -\sqrt{17},$$

$$\text{即 } P_1P_2 \text{ 的中点表示的数是 } \sqrt{65} \text{ 或 } -\sqrt{65} \text{ 或 } \sqrt{17} \text{ 或 } -\sqrt{17}.$$