

上海市延安初级中学 2025 学年第一学期初二年级

数学期中阶段性测试试卷

(测试时间: 90 分钟 满分: 100 分)

一、选择题 (每题 2 分, 共 12 分)

1. 下列各数中是无理数的是 ()

A. 3.14

B. π^0

C. $\sqrt{4}$

D. $(\sqrt{3})^{-1}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了无理数的定义, 熟练掌握其概念是做题的关键. 根据无理数是无限不循环小数逐个选项判断即可.

【详解】解:

A. 3.14 是有限小数, 是有理数, 故本选项不符合题意;

B. $\pi^0 = 1$ (任何非零数的 0 次方为 1), 是有理数, 故本选项不符合题意;

C. $\sqrt{4} = 2$, 是有理数, 故本选项不符合题意;

D. $(\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\because \sqrt{3}$ 是无理数, $\therefore \frac{1}{\sqrt{3}}$ 也是无理数, 故本选项符合题意.

故选: D.

2. 下列二次根式中, 不是最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{x^2 - 4}$

B. $\sqrt{x^2 + 2x + 4}$

C. $\sqrt{4x}$

D. $\sqrt{x^2 + 4}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查的是最简二次根式的概念, 被开方数不含分母、被开方数中不含能开得尽方的因数或因式的二次根式, 叫做最简二次根式, 掌握以上知识点是解答本题的关键.

根据最简二次根式的概念判断即可.

【详解】解: A、 $\sqrt{x^2 - 4}$ 是最简二次根式, 不符合题意;

B、 $\sqrt{x^2 + 2x + 4}$ 是最简二次根式, 不符合题意;

C、 $\sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$, 不是最简二次根式, 符合题意;

D、 $\sqrt{x^2+4}$ 是最简二次根式，不符合题意；

故选 C.

3. 下列说法正确的是 ()

A. 无理数包括正无理数、零和负无理数

B. 无理数与有理数的乘积是无理数

C. 如果 x 是实数，那么 $-x^2$ 没有平方根

D. 实数 π 可以用数轴上唯一的一个点来表示

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了无理数的定义，实数与数轴上的点一一对应，熟练掌握其概念是做题的关键. 根据无理数的定义，实数的概念逐项判断即可.

【详解】解：A. 无理数包括正无理数、负无理数，而 0 是有理数，故不符合题意；

B. 无理数与有理数的乘积不一定是无理数，例如： $\sqrt{2} \times 0 = 0$ ，而 0 是有理数，故不符合题意；

C. 当 $x = 0$ 时， $-x^2 = 0$ ，而 0 的平方根是 0，故不符合题意；

D. 所有实数都可以用数轴上唯一的点表示， π 是实数，故符合题意.

故选：D.

4. 下列二次根式中，与 $\sqrt{2}$ 属于同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{0.2}$ B. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ C. $\sqrt{2^2}$ D. $\sqrt{20}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了同类二次根式. 二次根式化为最简二次根式后，如果被开方数相同，那么这几个二次根式就叫做同类二次根式，据此把四个选项中的二次根式化简为最简二次根式，比较被开方数是否与 $\sqrt{2}$ 相同.

【详解】解：A、 $\because \sqrt{0.2} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，被开方数为 5，与 $\sqrt{2}$ 不同，故此选项不符合题意；

B、 $\because \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，被开方数为 2，与 $\sqrt{2}$ 相同，故此选项符合题意；

C、 $\because \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$ ，不是二次根式，故此选项不符合题意；

D、 $\because \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$ ，被开方数为5，与 $\sqrt{2}$ 不同，故此选项不符合题意.

$\therefore$ 故选：B.

5. 如果 $\sqrt[3]{23.7} \approx 2.872$, $\sqrt[3]{237} \approx 6.188$ ，那么 $\sqrt[3]{0.0237}$ 的结果约是（ ）

A. 0.2872

B. 0.02872

C. 0.6188

D. 0.06188

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了立方根，如果把一个数扩大1000倍，则它的立方根扩大10倍，如果把一个数缩小1000倍，则它的立方根缩小10倍，做题的关键是掌握以上规律. 根据立方根的变化特点和给出的数据进行解答即可.

【详解】解： $\because 0.0237 = \frac{23.7}{1000}$ ，且 $\sqrt[3]{23.7} \approx 2.872$ ， $\sqrt[3]{1000} = 10$ ，

$$\therefore \sqrt[3]{0.0237} = \sqrt[3]{\frac{23.7}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{23.7}}{\sqrt[3]{1000}} \approx \frac{2.872}{10} = 0.2872.$$

故选：A.

6. 两个连续的正整数，其中较小的数的算术平方根是 x ，那么较大的数的算术平方根是（ ）

A. $\sqrt{x^2+1}$

B. $\sqrt{x+1}$

C. x^2+1

D. $\sqrt{x}+1$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了算术平方根，熟知算术平方根的定义是解题的关键. 根据算术平方根的定义，较小的数等于 x 的平方，则较大的数是较小数加1，再求算术平方根即可.

【详解】解：设较小的正整数为 n ， n 的算术平方根是 x ，

则 $n = x^2$ ，

$\therefore$ 较大的正整数为： $n+1 = x^2+1$ ，

$\therefore$ 较大的数的算术平方根为： $\sqrt{x^2+1}$.

故选 A.

二、填空题（每题2分，共24分）

7. 一种细菌的直径约为0.000032米，这个数用科学记数法表示为_____米.

【答案】 3.2×10^{-5}

【解析】

【分析】 本题考查科学记数法，解题的关键是掌握科学记数法的表示形式 $a \times 10^n$ 中 a 和 n 的确定方法.

确定科学记数法中 a 和 n 的值，将 0.000032 用科学记数法表示.

【详解】 解：科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 对于小于 1 的数， n 为负整数，其绝对值等于小数点向右移动的位数，

将 0.000032 的小数点向右移动 5 位得到 3.2，所以 $a = 3.2$, $n = -5$ ，因此用科学记数法表示为 3.2×10^{-5} .

故答案为： 3.2×10^{-5} .

8. $\frac{1}{64}$ 的平方根是_____.

【答案】 $\pm \frac{1}{8}$

【解析】

【分析】 本题考查了平方根，熟练掌握平方根的定义是解题的关键；根据平方根的定义求解即可.

【详解】 解： $\frac{1}{64}$ 的平方根是 $\pm \frac{1}{8}$,

故答案为： $\pm \frac{1}{8}$.

9. 如果代数式 $\sqrt{\frac{1}{3-x}}$ 在实数范围内有意义，那么实数 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x < 3$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件和分式有意义的条件，根据二次根式有意义和分式有意义的条件解答即可.

【详解】 解：根据题意得 $\frac{1}{3-x} > 0$,

所以， $3-x > 0$,

解得 $x < 3$,

故答案为： $x < 3$.

10. 比较大小： $-\sqrt{15}$ _____ $-\sqrt{14}$. (填 “<”、“>” 或 “=”)

【答案】 <

【解析】

【分析】本题主要考查实数的大小比较，熟练掌握两个负数比较大小，绝对值大的反而小是关键．根据两个负数比较大小，绝对值大的反而小即可判断．

【详解】解：∵ $|- \sqrt{15}| = \sqrt{15}$ ， $|- \sqrt{14}| = \sqrt{14}$ 且 $\sqrt{15} > \sqrt{14}$ ，

$$\therefore -\sqrt{15} < -\sqrt{14}.$$

故答案为：<.

11. 已知关于 x 的方程 $mx^2 + x - 1 = 0$ 有 2 个实数根，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \geq -\frac{1}{4}$ 且 $m \neq 0$

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的定义及根的判别式．根据方程有两个实数根可知该方程为一元二次方程且 $\Delta \geq 0$ ，据此列不等式求解即可．

【详解】解：∵ 关于 x 的方程 $mx^2 + x - 1 = 0$ 有两个实数根，

$$\therefore m \neq 0 \text{ 且 } \Delta = 1^2 - 4m \times (-1) \geq 0,$$

$$\text{解得： } m \geq -\frac{1}{4} \text{ 且 } m \neq 0,$$

$$\text{故答案为： } m \geq -\frac{1}{4} \text{ 且 } m \neq 0.$$

12. 已知实数 a 满足 $|3-a| + \sqrt{a-4} = a$ ，那么 a 的值为_____.

【答案】

13

【解析】

【分析】本题主要考查绝对值的化简，二次根式有意义的条件，掌握以上知识的计算是关键．根据根式的定义域确定 a 的取值范围，化简绝对值表达式后求解方程．

【详解】解：由 $\sqrt{a-4}$ 可知 $a-4 \geq 0$ ，即 $a \geq 4$ ，

$$\text{当 } a \geq 4 \text{ 时， } |3-a| = a-3，\text{ 代入原方程得： } a-3 + \sqrt{a-4} = a \text{ 化简得： } \sqrt{a-4} = 3，$$

$$\text{两边平方得： } a-4 = 9，$$

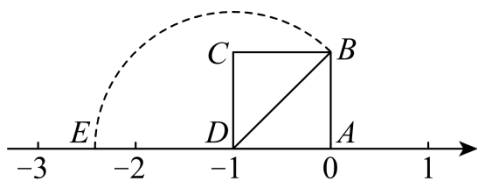
$$\text{解得： } a = 13，$$

经检验， $a = 13$ 满足原方程，

故答案为：13.

13. 如图，数轴上点 A 、点 D 所表示的数分别为 0 和 -1，以 AD 为边长作正方形 $ABCD$ ．以点 D 为圆心，

DB 为半径的弧与数轴的负半轴交于点 E ，那么点 E 表示的实数是_____.



【答案】 $-1-\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理和实数与数轴，根据勾股定理求出 DB 的长，即 DE 的长，从而求出点 E 对应的数.

【详解】 解：由勾股定理知： $DB = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ，

$\therefore DE = DB = \sqrt{2}$ ，

$\therefore$ 点 E 对应的数是 $-1-\sqrt{2}$ ，

故答案为： $-1-\sqrt{2}$.

14. 如果正数 x 满足 $x + x^{-1} = 3$ ，那么 $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的值是_____.

【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的混合运算，熟练掌握运算法则的关键.

由 $x + x^{-1} = 3$ 可得 $x + \frac{1}{x} = 3$ ，然后求出 $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的平方即可求解.

【详解】 解：由 $x + x^{-1} = 3$ ，可得 $x + \frac{1}{x} = 3$ ，

$\therefore \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x + 2 + \frac{1}{x} = 2 + 3 = 5$ ， $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ ，

$\therefore \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{5}$.

故答案为： $\sqrt{5}$.

15. 已知 a 与 b 是非零实数，且满足 $a > b$ ，化简： $\sqrt{-ab^3} =$ _____.

【答案】 $-b\sqrt{-ab}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了化简二次根式，不等式的性质，根据二次根式有意义的条件和已知条件可推出 $a > 0 > b$ ，据此化简二次根式即可.

【详解】 解： $\because$ 式子 $\sqrt{-ab^3}$ 有意义， a 与 b 是非零实数，

$$\therefore -ab^3 > 0, \text{ 即 } -ab \cdot b^2 > 0,$$

$$\therefore -ab > 0,$$

$$\therefore ab < 0,$$

$$\therefore a > b,$$

$$\therefore a > 0 > b,$$

$$\therefore \sqrt{-ab^3} = \sqrt{-ab \cdot b^2} = -b\sqrt{-ab},$$

故答案为： $-b\sqrt{-ab}$.

16. 已知 a 是 $\sqrt{7}$ 的小数部分， b 是不大于 $-\sqrt{7}$ 的最大整数，那么 a 与 b 的和是_____.

【答案】 $\sqrt{7} - 5$

【解析】

【分析】 本题主要考查了无理数的估算，正确估算出各无理数的整数部分成为解题的关键.

先确定 $\sqrt{7}$ 的整数部分，得到小数部分 a ，再求不大于 $-\sqrt{7}$ 的最大整数 b ，最后计算 $a + b$.

【详解】 解： $\because 2 < \sqrt{7} < 3$ ，

$$\therefore \sqrt{7} \text{ 的整数部分为 } 2,$$

$$\therefore a = \sqrt{7} - 2.$$

$$\text{又 } \because -\sqrt{7} \approx -2.645,$$

$$\therefore \text{不大于 } -\sqrt{7} \text{ 的最大整数为 } -3,$$

$$\text{即 } b = -3.$$

$$\therefore a + b = (\sqrt{7} - 2) + (-3) = \sqrt{7} - 5.$$

故答案为： $\sqrt{7} - 5$.

17. 已知在数轴上点 A 与点 B 关于原点对称，且点 A 在点 B 的左侧. 点 C 也在该数轴上，且表示的数是

$\sqrt{2}$. 如果 $AC = 2BC$, 那么 BC 的长为_____.

【答案】 $2\sqrt{2}$ 或 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查数轴上两点间的距离. 解题关键是数轴上两点间的距离等于它们表示的两数差的绝对值, 也可以“大减小”, 分类讨论.

设点 B 表示的数为 x , 根据数轴上点 A 与点 B 关于原点对称, 得点 A 表示的数为 $-x$, 根据点 C 表示的数是 $\sqrt{2}$. 分当 $x > \sqrt{2}$ 时, 当 $x < \sqrt{2}$ 时, 写出 BC , AC 长的表达式, 再根据 $AC = 2BC$ 建立方程, 解答即可.

【详解】 解: 设点 B 表示的数为 x ,

$\because$ 数轴上点 A 与点 B 关于原点对称,

$\therefore$ 点 A 表示的数为 $-x$.

$\because$ 点 C 表示的数是 $\sqrt{2}$.

当 $x > \sqrt{2}$ 时,

$$\therefore BC = x - \sqrt{2}, \quad AC = \sqrt{2} + x.$$

$$\because AC = 2BC,$$

$$\therefore \sqrt{2} + x = 2(x - \sqrt{2}).$$

解得 $x = 3\sqrt{2}$.

$$\therefore BC = x - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

当 $x < \sqrt{2}$ 时,

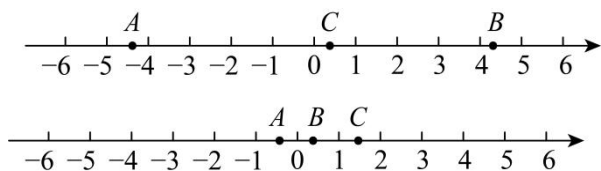
$$\therefore BC = \sqrt{2} - x, \quad AC = \sqrt{2} + x.$$

$$\therefore \sqrt{2} + x = 2(\sqrt{2} - x).$$

解得 $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

$$\therefore BC = \sqrt{2} - x = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

故答案为: $2\sqrt{2}$ 或 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.



18. 已知 α 与 β 是方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 的两个不同的根, 那么代数式 $\alpha^3 - 4\beta^2 + 10$ 的值为_____.

【答案】 -9

【解析】

【分析】 本题主要考查一元二次方程根与系数关系定理, 熟练掌握根与系数关系定理, 活用代数式的变形是解题的关键. 由根与系数的关系可得 $\alpha + \beta = -1$, $\alpha\beta = -3$, 利用方程根的性质, 将 α^3 和 β^2 用 α 和 β 表示, 代入代数式化简, 最后利用 $\alpha + \beta$ 的值求解.

【详解】 解: $\because \alpha$ 与 β 是方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 的两个不同的根,

$$\therefore \alpha^2 = -\alpha + 3, \quad \beta^2 = -\beta + 3,$$

$$\therefore \alpha^3 = \alpha \cdot \alpha^2 = \alpha(-\alpha + 3) = -\alpha^2 + 3\alpha = -(-\alpha + 3) + 3\alpha = 4\alpha - 3,$$

$$\therefore \alpha^3 - 4\beta^2 + 10 = (4\alpha - 3) - 4(-\beta + 3) + 10 = 4\alpha - 3 + 4\beta - 12 + 10 = 4\alpha + 4\beta - 5.$$

由根与系数的关系可得, $\alpha + \beta = -1$,

$$\therefore 4\alpha + 4\beta - 5 = 4(\alpha + \beta) - 5 = -4 - 5 = -9,$$

$\therefore$ 原式 = -9.

故答案为: -9.

三、计算题 (每题 4 分, 共 16 分)

19. 计算: $\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} - \left(\sqrt[3]{-2}\right)^3$

【答案】 $\frac{11}{6}$

【解析】

【分析】 本题考查了求一个数的算术平方根, 求一个数的立方根.

先计算算术平方根, 立方根, 再计算加减即可.

【详解】 解: $\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} - \left(\sqrt[3]{-2}\right)^3$

$$= \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right) - (-2)$$

$$= \frac{11}{6}.$$

20. 计算: $\frac{2}{1+\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}} - (2\sqrt{3}-3)^2$.

【答案】

$$\frac{40\sqrt{3}-66}{3}$$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式的混合运算，掌握其运算法则是关键.

先运用分母有理化，乘法公式展开，再根据二次根式的混合运算法则计算即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \frac{2}{1+\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}} - (2\sqrt{3}-3)^2 \\ &= \frac{2(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \left[(2\sqrt{3})^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 3 + 3^2\right] \\ &= \frac{2-2\sqrt{3}}{1-3} + \frac{\sqrt{3}}{3} - (21-12\sqrt{3}) \\ &= \sqrt{3}-1 + \frac{\sqrt{3}}{3} - 21 + 12\sqrt{3} \\ &= 13\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} - 22 \\ &= \frac{40\sqrt{3}-66}{3}. \end{aligned}$$

21. 计算: $\sqrt{3x^2y} \cdot \sqrt{6x} \div \sqrt{\frac{y^2}{x}}$

【答案】 $\frac{3x^2\sqrt{2y}}{y}$

【解析】

$$\begin{aligned}
 & \text{【详解】解: } \sqrt{3x^2y} \cdot \sqrt{6x} \div \sqrt{\frac{y^2}{x}} \\
 &= \sqrt{3x^2y \cdot 6x \div \frac{y^2}{x}} \\
 &= \sqrt{3x^2y \cdot 6x \cdot \frac{x}{y^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{18x^4}{y}} \\
 &= \frac{3x^2\sqrt{2y}}{y}.
 \end{aligned}$$

22. 计算: $\sqrt{15} \div \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$

【答案】 $\frac{15(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的混合运算，先通分，计算括号内，再进行除法运算即可，熟练掌握二次根式的运算法则，是解题的关键.

$$\begin{aligned}
 & \text{【详解】解: 原式} = \sqrt{15} \div \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}} \right) \\
 &= \sqrt{15} \div \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{15}} \\
 &= \sqrt{15} \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}, \\
 &= \frac{15}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \\
 &= \frac{15(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} \\
 &= \frac{15(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2}.
 \end{aligned}$$

四、解方程（每题4分，共16分）

23. 解方程： $(3-x)^2 - 10(x-3) = 24$

【答案】 $x=15$ 或 $x=1$

【解析】

【分析】 本题主要考查解一元二次方程，熟练掌握解一元二次方程的方法是做题的关键。先将方程化为一般式，再利用因式分解法解方程即可。

【详解】 解：原方程可化为： $x^2 - 16x + 15 = 0$ ，

$$\therefore (x-15)(x-1) = 0,$$

$$\therefore x-15=0 \text{ 或 } x-1=0,$$

$$\therefore x=15 \text{ 或 } x=1.$$

24. 解方程： $2x^2 - 4x - 1 = 0$ （用配方法）

【答案】 $x_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} + 1$, $x_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2} + 1$

【解析】

【分析】 本题主要考查利用配方法解一元二次方程的方法步骤，熟练掌握配方法解一元二次方程是解决问题的关键。根据配方法解一元二次方程的方法步骤求解即可得到答案。

【详解】 解： $\because 2x^2 - 4x - 1 = 0$ ，

$$\therefore x^2 - 2x = \frac{1}{2},$$

$$\therefore x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{2} + 1,$$

$$\therefore (x-1)^2 = \frac{3}{2},$$

$$\therefore x-1 = \pm \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore x_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} + 1, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2} + 1.$$

25. 解方程： $3(x^2 - 1) = 2(1-x)^2$

【答案】 $x=1$ 或 $x=-5$

【解析】

【分析】 本题主要考查解一元二次方程，熟知解一元二次方程的因式分解法是解题的关键．根据因式分解法解一元二次方程的步骤解方程即可．

【详解】 解：原方程可化为， $x^2 + 4x - 5 = 0$ ，

$$\therefore (x-1)(x+5) = 0,$$

$$\therefore x-1=0 \text{ 或 } x+5=0,$$

$$\therefore x=1 \text{ 或 } x=-5.$$

26. 解方程： $\frac{2}{3}x\left(\frac{3}{4}x - \frac{9}{2}\right) = x - 3$

【答案】 $x_1 = 4 + \sqrt{10}$ ， $x_2 = 4 - \sqrt{10}$

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程，先将方程进行化简，再利用配方法解方程即可．

【详解】 解： $\frac{2}{3}x\left(\frac{3}{4}x - \frac{9}{2}\right) = x - 3$ ，

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x = x - 3,$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 4x = -3,$$

$$x^2 - 8x = -6,$$

$$x^2 - 8x + 16 = -6 + 16,$$

$$(x-4)^2 = 10,$$

$$x-4 = \pm\sqrt{10},$$

$$\text{解得 } x_1 = 4 + \sqrt{10}, \quad x_2 = 4 - \sqrt{10}.$$

五、解答题 (5分+6分+6分+7分+8分=32分)

27. 先化简，再求值： $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ，其中 $x = \frac{7}{3-\sqrt{2}}$ ， $y = \frac{7}{3+\sqrt{2}}$ ．

【答案】 $\frac{x+y}{x-y}$ ， $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式的化简求值，先通分化简表达式，再求出 $x=3+\sqrt{2}, y=3-\sqrt{2}$ ，从而求出 $x+y=6, x-y=2\sqrt{2}$ ，最后代入数值计算.

$$\begin{aligned}
 \text{【详解】 解: } & \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\
 &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} - \frac{\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \\
 &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y}) - \sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y} \\
 &= \frac{x + \sqrt{xy} - \sqrt{xy} + y}{x-y} \\
 &= \frac{x+y}{x-y} \\
 \therefore x &= \frac{7}{3-\sqrt{2}}, y = \frac{7}{3+\sqrt{2}} \\
 \therefore x &= \frac{7}{3-\sqrt{2}} = \frac{7(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \frac{7(3+\sqrt{2})}{9-2} = 3+\sqrt{2}, \\
 y &= \frac{7}{3+\sqrt{2}} = \frac{7(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{7(3-\sqrt{2})}{9-2} = 3-\sqrt{2} \\
 \therefore x+y &= 6, x-y = 2\sqrt{2}, \\
 \therefore \text{原式} &= \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.
 \end{aligned}$$

28. 已知 $\sqrt{a-5b}=5$, $3a+b$ 的立方根为 3, 求 $\sqrt{a-2b}$ 的平方根.

【答案】 ± 2

【解析】

【分析】 本题考查平方根和立方根，根据平方根和立方根的定义，得到关于 a, b 的二元一次方程组，求出 a, b 的值，再进行求解即可.

【详解】 解: $\because \sqrt{a-5b}=5, 3a+b$ 的立方根为 3,

$$\therefore \begin{cases} a-5b=25 \\ 3a+b=27 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=10 \\ b=-3 \end{cases},$$

$$\therefore \sqrt{a-2b} = \sqrt{10-2 \times (-3)} = \sqrt{16} = 4,$$

$\therefore \sqrt{a-2b}$ 的平方根为 ± 2 .

29. 已知关于 x 的方程 $2x^2 + kx - 2k + 1 = 0$ 的两个实数根的平方和为 $\frac{29}{4}$, 求 k 的值.

【答案】 $k = 3$

【解析】

【分析】 本题考查根的判别式, 根与系数的关系, 根据根与系数的关系, 结合两个实数根的平方和为 $\frac{29}{4}$, 列出方程进行求解, 再根据方程有实数根, $\Delta \geq 0$ 进行验证即可.

【详解】 解: 设方程的两个实数根为 x_1, x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{k}{2}, \quad x_1 x_2 = \frac{-2k+1}{2},$$

$$\text{由题意, } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(-\frac{k}{2}\right)^2 - (-2k+1) = \frac{29}{4},$$

解得 $k = 3$ 或 $k = -11$;

当 $k = 3$ 时, 原方程化为 $2x^2 + 3x - 5 = 0$, $\Delta = 3^2 - 2 \times 4 \times (-5) = 49 > 0$, 符合题意;

当 $k = -11$ 时, 原方程化为 $2x^2 - 11x + 23 = 0$, $\Delta = (-11)^2 - 4 \times 2 \times 23 = -63 < 0$, 不符合题意;

$\therefore k = 3$.

30. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 4mx + 2m^2 = 1$ (m 是实数)

(1) 求证: 该方程有两个不相等的实数根;

(2) 如果一个等腰三角形的一条边长为 7, 且另外两条边长分别是该方程的两个实数根, 求这个等腰三角形的周长.

【答案】 (1) 见解析 (2) 15

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式, 解一元二次方程, 等腰三角形的定义, 构成三角形的条件, 熟练掌握以上知识点是关键.

(1) 根据根的判别式证明即可;

(2) 先得出长为 7 的边只能为腰, 即 $x^2 - 4mx + 2m^2 = 1$ 有一根为 7, 把 $x = 7$ 代入方程求出 $m_1 = 2, m_2 = 12$,

进而求出方程的解，再结合构成三角形的条件求解即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because x^2 - 4mx + 2m^2 = 1$,

$$\therefore x^2 - 4mx + 2m^2 - 1 = 0,$$

$$\therefore \Delta = (-4m)^2 - 4 \times 1 \times (2m^2 - 1) = 8m^2 + 4 > 0,$$

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根;

【小问 2 详解】

解: $\because$ 等腰三角形的一条边长为 7, 且另外两条边长分别是该方程的两个实数根, 方程有两个不相等的实数根,

$\therefore$ 长为 7 的边只能为腰,

$$\therefore x^2 - 4mx + 2m^2 = 1 \text{ 有一根为 } 7,$$

把 $x = 7$ 代入 $x^2 - 4mx + 2m^2 = 1$,

$$\therefore 7^2 - 4 \times 7m + 2m^2 = 1,$$

$$\text{解得: } m_1 = 2, m_2 = 12,$$

当 $m = 2$ 时, 方程为 $x^2 - 8x + 7 = 0$,

$$\text{解得 } x_1 = 1, x_2 = 7,$$

此时等腰三角形三边分别为 1, 7, 7, $1 + 7 > 7$,

$$\therefore \text{此时能构成三角形, } 1 + 7 + 7 = 15,$$

$\therefore$ 这个等腰三角形的周长为 15;

当 $m = 12$ 时, 方程为 $x^2 - 48x + 287 = 0$,

$$\text{解得 } x_1 = 41, x_2 = 7,$$

此时三边分别为 41, 7, 7,

$$\therefore 7 + 7 < 41,$$

$\therefore$ 此时不能构成三角形, 不存在此三角形;

综上所述, 这个等腰三角形的周长为 15.

31. 对于两个无理数, 如果它们的和等于它们的积, 那么我们称这两个无理数互为“友好无理数”. 请根据条件填空:

(1) $\sqrt{3}$ 的“友好无理数”是_____.

(2) 请写出一组符号不同且互为有理化因式的“友好无理数”，它们可以是_____和_____.

(3) 将一组无理数从左到右排列，第一个数记作 a_1 ，第二个数记作 a_2 ，第三个数记作 $a_3, \dots$ ，第 n 个数记作 a_n . 即 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. 已知 $n > 2$ ，且这 n 个数中，每相邻两个数都是“友好无理数”.

①如果 $a_1 < a_2$ ，且 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100} = 300$ ，那么 a_1 的值为_____；

②如果 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{101}} = \frac{100 + \sqrt{2}}{2}$ ，那么 a_2 的值为_____.

【答案】 (1) $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$

(2) $-1 + \sqrt{3}$ 和 $-1 - \sqrt{3}$ 或 $-2 + 2\sqrt{2}$ 和 $-2 - 2\sqrt{2}$ (答案不唯一)

(3) ① $3 - \sqrt{3}$ ；② $2 + \sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查定义新运算，二次根式的混合运算，理解“友好无理数”的概念及计算，掌握二次根式的混合运算法则是关键.

(1) 设 $\sqrt{3}$ 的“友好无理数”是 x ，根据“友好无理数”的定义列式求解即可；

(2) 设一组符号不同且互为有理化因式的“友好无理数”分别为 a, b ，结合题意列式得到 $a = \frac{1}{b-1} + 1$ ，由此代入计算验证即可；

(3) ①根据计算得到 $a_2 = \frac{a_1}{a_1 - 1}, a_3 = a_1$ ，由此代入计算即可；

②根据题意得到 $50\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) + \frac{1}{a_1} = \frac{100 + \sqrt{2}}{2}, \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = 1$ ，代入计算即可求解.

【小问 1 详解】

解：设 $\sqrt{3}$ 的“友好无理数”是 x ，

$$\therefore \sqrt{3} + x = \sqrt{3}x,$$

$$\text{解得, } x = \frac{3 + \sqrt{3}}{2},$$

故答案为: $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$;

【小问 2 详解】

解: 设一组符号不同且互为有理化因式的“友好无理数”分别为 a, b ,

$$\therefore a+b=ab,$$

$$\therefore ab-a-b=0, \text{ 则 } ab-a-b+1=1,$$

$$\therefore a(b-1)-(b-1)=1,$$

$$(a-1)(b-1)=1,$$

$\therefore a, b$ 是无理数, 即 $a \neq 1, b \neq 1$,

$$\therefore a = \frac{1}{b-1} + 1,$$

令 $b = -1 + \sqrt{3}$, 则 $a = \frac{1}{-1 + \sqrt{3} - 1} + 1 = -1 - \sqrt{3}$, 符合题意;

令 $b = -2 + 2\sqrt{2}$, 则 $a = \frac{1}{-2 + 2\sqrt{2} - 1} + 1 = -2 - 2\sqrt{2}$, 符合题意;

故答案为: $-1 + \sqrt{3}$ 和 $-1 - \sqrt{3}$ 或 $-2 + 2\sqrt{2}$ 和 $-2 - 2\sqrt{2}$ (答案不唯一);

【小问 3 详解】

解: ①将一组无理数从左到右排列, 第一个数记作 a_1 , 第二个数记作 a_2 , 第三个数记作 $a_3, \dots$, 第 n 个数记作 a_n . 即 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. 已知 $n > 2$, 且这 n 个数中, 每相邻两个数都是“友好无理数”,

$$\therefore a_1 + a_2 = a_1 a_2, \quad a_2 + a_3 = a_2 a_3, \quad a_3 + a_4 = a_3 a_4, \quad \dots\dots,$$

$$\therefore a_2 = \frac{a_1}{a_1 - 1}, \quad a_3 = \frac{a_2}{a_2 - 1} = \frac{\frac{a_1}{a_1 - 1}}{\frac{a_1}{a_1 - 1} - 1} = a_1, \quad a_4 = \frac{a_3}{a_3 - 1} = \frac{a_1}{a_1 - 1}, \quad \dots\dots,$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100} = 300,$$

$$\therefore 50 \left(a_1 + \frac{a_1}{a_1 - 1} \right) = 300,$$

整理得, $a_1^2 - 6a_1 + 6 = 0$,

解得, $a_1 = 3 \pm \sqrt{3}$,

$$\text{当 } a_1 = 3 + \sqrt{3} \text{ 时, } a_2 = \frac{a_1}{a_1 - 1} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3} - 1} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 3 - \sqrt{3};$$

$$\text{当 } a_1 = 3 - \sqrt{3} \text{ 时, } a_2 = \frac{a_1}{a_1 - 1} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3} - 1} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = 3 + \sqrt{3};$$

$$\because a_1 < a_2,$$

$$\therefore a_1 = 3 - \sqrt{3};$$

$$\textcircled{2} \text{ 根据上述计算, } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{101}} = \frac{100 + \sqrt{2}}{2},$$

$$\text{变形得, } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_1} = \frac{100 + \sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore 50 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) + \frac{1}{a_1} = \frac{100 + \sqrt{2}}{2},$$

$$\because a_1 + a_2 = a_1 a_2,$$

$$\therefore \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = 1,$$

$$\therefore \frac{1}{a_1} = \frac{100 + \sqrt{2}}{2} - 50 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{解得, } a_1 = \sqrt{2},$$

$$\therefore a_2 = \frac{a_1}{a_1 - 1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = 2 + \sqrt{2}.$$