

上海市震旦外国语中学 2025 学年第一学期八年级期中考试数学试卷

(考试时间 100 分钟)

一、选择题

1. 已知下列各数: $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{2025}{2026}$, 2π , $\sqrt[3]{-8}$, 0.010010001, 其中无理数有 ()
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】B

【解析】

【分析】此题主要考查了无理数的定义，算术平方根与立方根，注意带根号的要开方开不尽的才是无理数，无限不循环小数是无理数. 如 π , $\sqrt{6}$, 0.8080080008... (每两个 8 之间依次多 1 个 0) 等形式. 先化简，再根据有理数、无理数的定义判断即可.

【详解】解: $\sqrt[3]{-8} = -2$,

在实数 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{2025}{2026}$, 2π , $\sqrt[3]{-8}$, 0.010010001 中, 无理数有 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 2π , 共 2 个.

故选: B.

2. 下列各式中, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 的有理化因式是 ().

- A. $\sqrt{a+b}$ B. $\sqrt{a-b}$ C. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ D. $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了有理化因式，如果两个含有二次根式的非零代数式相乘，它们的积不含有二次根式，就说这两个非零代数式互为有理化因式. 单项二次根式的有理化因式是它的同类二次根式；其他代数式的有理化因式可用平方差公式来进行分步确定.

对于形如 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 的表达式，其有理化因式通常为 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ，据此进行分析，即可作答.

【详解】解: 依题意, $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$, 为有理数,

$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b}$ 的有理化因式是 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$,

故选: D.

3. 若 $(a+1)x^{a^2+1} - x + 3 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程，则 a 的值是 ()

A. ± 1 B. -1 C. 1 D. 0

【答案】C

【解析】

【分析】此题主要考查了一元二次方程的定义，关键是掌握一元二次方程的定义：只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是2的整式方程叫一元二次方程．根据一元二次方程的定义可得： $a^2+1=2$ 且 $a+1\neq 0$ ，再解即可．

【详解】解：由题意得： $a^2+1=2$ 且 $a+1\neq 0$ ，

解得 $a=1$ ，

故选：C．

4. 若 $\sqrt[3]{3}=1.442$ ， $\sqrt[3]{0.3}=0.6694$ ，那么 $\sqrt[3]{300\times 64}$ 等于（ ）

A. 57.68

B. 115.36

C. 26.776

D. 53.552

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了立方根，根据立方根的性质：立方根中，被开方数的小数点每向右移动三个单位，它的立方根的小数点向相同的方向移动一位，即可求解．

【详解】解： $\because \sqrt[3]{3}=1.442$ ，

$\therefore \sqrt[3]{300}\times\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{0.3\times 1000}\times 4=\sqrt[3]{0.3}\times\sqrt[3]{1000}\times 4=0.6694\times 10\times 4=26.776$ ，

故选：C．

5. 已知 a 是无理数，但 $(a+3)(a-5)$ 是有理数，则下列各式是有理数的是（ ）

A. a^2+5 B. $(a-3)(a+5)$ C. $(a+1)^2$ D. $(a-1)^2$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了多项式的化简，将多项式化简后，得出带有字母的多项式，再将选项整理观察与已知相同的部分．去括号，合并同类项，或通过多项式乘法展开可得 $a^2-2a-15$ 是有理数．

【详解】解： $\because (a+3)(a-5)$

$=a^2-2a-15$ ，

$\therefore a$ 是无理数，但 $(a+3)(a-5)$ 是有理数，

$\therefore a^2 - 2a - 15$ 是有理数, $a^2 - 2a$ 是有理数,

A. $a^2 + 5 = (a^2 - 2a) + 2a + 5$, 因 $a^2 - 2a$ 和 5 为有理数, a 为无理数, 则 $2a$ 为无理数, 故 $a^2 + 5$ 为无理数, 故 A 选项错误;

B. $(a-3)(a+5) = a^2 + 2a - 15 = (a^2 - 2a) + 4a - 15$, 因 $a^2 - 2a$ 和 -15 为有理数, a 为无理数, 则 $4a$ 为无理数, 故 $(a-3)(a+5)$ 为无理数, 故 B 选项错误;

C. $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 = (a^2 - 2a) + 4a + 1$, 因 $a^2 - 2a$ 和 1 为有理数, a 为无理数, 则 $4a$ 为无理数, 故 $(a+1)^2$ 为无理数, 故 C 选项错误;

D. $(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1$, $\because a^2 - 2a$ 是有理数, $(a-1)^2$ 是有理数, 故 D 选项正确;

故选: D.

6. 定义: 若两个一元二次方程有且只有一个相同的实数根, 我们就称这两个方程为“同伴方程”. 例如 $x^2 = 4$ 和 $(x-2)(x+3) = 0$ 有且仅有一个相同的实数根 $x = 2$. 所以这两个方程为“同伴方程”, 若关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的参数同时满足 $a + b + c = 0$ 和 $a - b + c = 0$. 且该方程与 $(x+2)(x-n) = 0$ 互为“同伴方程”, 则 n 的值为 ()

A. 1 或 -1

B. -1

C. 1

D. 2

【答案】A

【解析】

【分析】由 $a + b + c = 0$ 和 $a - b + c = 0$ 可得关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 两个实数根为 $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, 由 $(x+2)(x-n) = 0$, 可得 $(x+2)(x-n) = 0$ 的根为 $x = -2$ 或 $x = n$, 根据 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 与 $(x+2)(x-n) = 0$ 互为“同伴方程”, 即得 $n = 1$ 或 $n = -1$. 掌握“同伴方程”的定义是解题的关键.

【详解】解: $\because$ 同时满足 $a + b + c = 0$ 和 $a - b + c = 0$,

$\therefore$ 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 两个实数根为 $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

$\therefore (x+2)(x-n) = 0$,

$\therefore x + 2 = 0$ 或 $x - n = 0$,

$\therefore (x+2)(x-n) = 0$ 的根为 $x = -2$ 或 $x = n$,

$\therefore ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 与 $(x+2)(x-n) = 0$ 互为“同伴方程”，

$\therefore n = 1$ 或 $n = -1$.

故答案为：1 或 -1.

二、填空题

7. 化简： $\sqrt{8a^3} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2a\sqrt{2a}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质与化简，利用二次根式的性质进行化简即可，解题的关键是正确理解二次根式的性质 $\sqrt{a^2} = |a|$.

【详解】 解： $\sqrt{8a^3} = \sqrt{4a^2 \cdot 2a} = \sqrt{(2a)^2 \cdot 2a} = 2a\sqrt{2a}$,

故答案为： $2a\sqrt{2a}$.

8. 比较大小： $-2\sqrt{6}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $-3\sqrt{3}$ (填“>”或“<”).

【答案】 >

【解析】

【分析】 此题主要考查了二次根式大小比较，正确掌握二次根式的性质是解题关键. 直接利用二次根式的性质比较得出答案.

【详解】 解： $\because 2\sqrt{6} = \sqrt{24}$, $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$,

$\therefore \sqrt{24} < \sqrt{27}$,

$\therefore 2\sqrt{6} < 3\sqrt{3}$.

$\therefore -2\sqrt{6} > -3\sqrt{3}$.

故答案为：>.

9. 若 $1 < x < 2$ ，化简 $\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2x - 3$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式的性质及化简、完全平方公式，熟练掌握以上知识点是解题的关键. 先判断 $x - 1 > 0$ ， $x - 2 < 0$ ，再根据二次根式的性质化简，进而得出答案.

【详解】解：原式 $= \sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(x-2)^2}$ ，

$\therefore 1 < x < 2$ ，

$\therefore x-1 > 0$ ， $x-2 < 0$ ，

$\therefore$ 原式 $= x-1-(2-x)$

$= x-1+x-2$

$= 2x-3$ 。

故答案为： $2x-3$ 。

10. 在数轴上表示 $-\sqrt{3}$ 的点与表示数 2 的点之间的距离是_____。

【答案】 $2+\sqrt{3}$ 。

【解析】

【分析】在数轴上表示 $-\sqrt{3}$ 和 2， $-\sqrt{3}$ 在左边，2 在右边，即可确定两个点之间的距离。

【详解】在数轴上表示 $-\sqrt{3}$ 和 2， $-\sqrt{3}$ 在左边，2 在右边，

在数轴上表示 $-\sqrt{3}$ 的点与表示数 2 的点之间的距离是：

$2-(-\sqrt{3})=2+\sqrt{3}$ 。

故答案为： $2+\sqrt{3}$ 。

【点睛】本题考查了数轴，解题的关键是知道确定两个点之间的距离，就是用右边的数减去左边的数。

11. 不等式 $x > \sqrt{2}x+1$ 的解集是_____。

【答案】 $x < -1-\sqrt{2}$

【解析】

【分析】根据解一元一次不等式基本步骤：移项、合并同类项、系数化为 1 可得。

【详解】移项，得： $x-\sqrt{2}x > 1$ ，

合并同类项，得： $(1-\sqrt{2})x > 1$ ，

系数化为 1，得： $x < -1-\sqrt{2}$ ，

故答案为 $x < -1-\sqrt{2}$ 。

【点睛】本题主要考查解一元一次不等式基本步骤，熟练掌握是关键。

12. 方程 $x^2 = 2x$ 的解是_____.

【答案】 $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程. 掌握解一元二次方程的方法是解题关键. 通过移项将方程化为标准形式, 然后因式分解, 再求解即可.

【详解】 解: $x^2 = 2x$,

移项, 提公因式得 $x(x-2) = 0$,

$\therefore x = 0$ 或 $x - 2 = 0$,

$\therefore$ 方程 $x^2 = 2x$ 的解是 $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

故答案为: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

13. 若最简二次根式 $\sqrt{x^2 - 3x}$ 与最简二次根式 $\sqrt{x + 5}$ 是同类二次根式, 则 x 的值为_____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查了同类二次根式, 最简二次根式, 解一元二次方程—因式分解法, 掌握同类二次根式的定义, 最简二次根式的定义, 解一元二次方程的方法是解题的关键. 根据最简二次根式和同类二次根式的定义可得: $x^2 - 3x = x + 5$, 再根据解一元二次方程的方法解方程即可.

【详解】 解: $\because$ 最简二次根式 $\sqrt{x^2 - 3x}$ 与 $\sqrt{x + 5}$ 是同类二次根式,

$\therefore x^2 - 3x = x + 5$, 即 $x^2 - 4x - 5 = 0$,

$\therefore (x+1)(x-5) = 0$,

$\therefore x + 1 = 0$ 或 $x - 5 = 0$,

解得: $x_1 = -1$, $x_2 = 5$,

当 $x = -1$ 时, $\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{x + 5} = \sqrt{4} = 2$, 不是最简二次根式;

当 $x = 5$ 时, $\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{x + 5} = \sqrt{10}$, 是最简二次根式,

$\therefore x$ 的值为 5.

故答案为: 5.

14. 若 m 是方程 $x^2 - 2x - 4 = 0$ 的一个根, 则代数式 $2m^2 - 4m - 2025$ 的值为_____.

【答案】 -2017

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的解的特征. 把 $x=m$ 代入方程 $x^2-2x-4=0$ 得到 $m^2-2m=4$, 将原式转化为 $2(m^2-2m)-2025$, 然后代入求值即可.

【详解】 解: $\because m$ 是方程 $x^2-2x-4=0$ 的一个根,

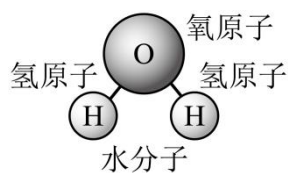
$$\therefore m^2-2m-4=0,$$

$$\therefore m^2-2m=4,$$

$$\therefore 2m^2-4m-2025=2(m^2-2m)-2025=2\times 4-2025=-2017,$$

故答案为: -2017.

15. 水由氢、氧两种元素组成, 一个水分子包含两个氢原子和一个氧原子, 1 个氢原子的质量约为 $1.674\times 10^{-27}\text{kg}$, 一个氧原子的质量约为 $2.657\times 10^{-26}\text{kg}$, 一个水分子的质量大约是_____kg. (结果用科学记数法表示)



【答案】 2.9918×10^{-26}

【解析】

【分析】 本题主要考查科学记数法—表示较小的数, 读懂题意是解题的关键. 根据一个水分子的质量=两个氢原子的质量+一个氧原子的质量, 列式计算即可得出答案.

【详解】 解: $2\times 1.674\times 10^{-27}+2.657\times 10^{-26}$

$$=0.3348\times 10^{-26}+2.657\times 10^{-26}$$

$$=2.9918\times 10^{-26}(\text{kg}),$$

故答案为: 2.9918×10^{-26} .

16. 在实数范围内分解因式: $2x^2-5x+1=$ _____.

【答案】 $2(x-\frac{5+\sqrt{17}}{4})(x-\frac{5-\sqrt{17}}{4})$

【解析】

【分析】本题考查了实数范围内分解因式. 先求出方程的两个根, 再根据 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ 即可因式分解. 设多项式等于 0, 解出方程两根, 再分解因式即可.

【详解】解: 令 $2x^2 - 5x + 1 = 0$,

$$\Delta = 25 - 8 = 17 > 0,$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4},$$

$$\therefore 2x^2 - 5x + 1 = 2\left(x - \frac{5 + \sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{5 - \sqrt{17}}{4}\right).$$

$$\text{故答案为: } 2\left(x - \frac{5 + \sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{5 - \sqrt{17}}{4}\right).$$

17. 如果一元二次方程 $x^2 + 3x - 2 = 0$ 的两个根为 x_1, x_2 , 则 $x_1^2 + 5x_1 - x_1x_2 + 2x_2 =$ _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】本题考查的知识点是一元二次方程中根与系数的关系, 解题关键是熟练掌握根与系数的关系.

由根与系数的关系可得, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, 根据该一元二次方程求出所对应的值后, 代入

$$x_1^2 + 5x_1 - x_1x_2 + 2x_2 = x_1(x_1 + 3) + 2(x_1 + x_2) - x_1x_2 \text{ 即可求解.}$$

【详解】解: 根据根与系数的关系可得:

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} = -2, \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -3,$$

$$\therefore x_1 + 3 = -x_2,$$

$$\therefore \text{原式} = x_1(x_1 + 3) + 2(x_1 + x_2) - x_1x_2,$$

$$= -2x_1x_2 + 2(x_1 + x_2),$$

$$= -2 \times (-2) + 2 \times (-3),$$

$$= -2.$$

故答案为: -2.

18. 阅读下列材料:

当 x 为实数时, 求 $\frac{3x^2 + 2x}{x^2 + x + 0.25}$ 的最大值. 设 $y = \frac{3x^2 + 2x}{x^2 + x + 0.25}$, 将其化为关于 x 的一元二次方程, 得

$(y - 3)x^2 + (y - 2)x + \frac{1}{4}y = 0$. 因为 x 为实数, 就是这个方程有实数根, 所以

$b^2 - 4ac = (y-2)^2 - 4(y-3) \times \frac{1}{4}y = -y + 4 \geq 0$, 得 $y \leq 4$, 即 $\frac{3x^2 + 2x}{x^2 + x + 0.25}$ 的最大值为 4, 则 x 为实数

时, $\frac{3x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 1}$ 的最小值是_____.

【答案】 $\frac{23}{16}$

【解析】

【分析】 本题考查根的判别式, 将函数化为关于 x 的一元二次方程, 利用根的判别式求函数的最值是本题的关键. 设 $y = \frac{3x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 1}$, 将 $y = \frac{3x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 1}$ 化为关于 x 的一元二次方程, 若此方程有实数解, 则根的判别式 $\Delta \geq 0$, 从而得到关于 y 的不等式, 解此不等式即可求得原函数的最小值.

【详解】 解: 设 $y = \frac{3x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 1}$,

将 $y = \frac{3x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 1}$ 化为关于 x 的一元二次方程 $(y-3)x^2 + (2y-1)x + y-2 = 0$.

$\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(y-3)x^2 + (2y-1)x + y-2 = 0$ 有实数解,

$$\therefore \Delta = (2y-1)^2 - 4(y-3)(y-2) = 16y - 23 \geq 0,$$

$$\text{解得 } y \geq \frac{23}{16},$$

$$\therefore, \frac{3x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 1} \text{ 的最小值是 } \frac{23}{16}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{23}{16}.$$

三、解答题

19. 计算:

$$(1) \frac{1}{6}\sqrt{1\frac{3}{5}} \times \left(-5\sqrt{3\frac{3}{5}}\right) \div \left(-2\sqrt{\frac{1}{2}}\right);$$

$$(2) \frac{2}{\sqrt{3}-2} - (3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}).$$

【答案】 (1) $\sqrt{2}$;

(2) $-2\sqrt{3}-5$.

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算，平方差公式，熟练掌握运算法则是解题的关键.

(1) 根据二次根式乘除运算法则即可求解；

(2) 先分母有理化，二次根式乘法运算，然后进行二次根式加减运算即可.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: } & \frac{1}{6}\sqrt{1\frac{3}{5}}\times\left(-5\sqrt{3\frac{3}{5}}\right)\div\left(-2\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \\ & =\left[\frac{1}{6}\times(-5)\div(-2)\right]\sqrt{\frac{8}{5}\times\frac{18}{5}\div\frac{1}{2}} \\ & =\left[\frac{1}{6}\times(-5)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\sqrt{\frac{8}{5}\times\frac{18}{5}\times 2} \\ & =\frac{5}{12}\times\frac{12}{5}\sqrt{2} \\ & =\sqrt{2};\end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: } & \frac{2}{\sqrt{3}-2}-\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right) \\ & =\frac{2\left(\sqrt{3}+2\right)}{\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+2\right)}-\left[3^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2\right] \\ & =\frac{2\sqrt{3}+4}{3-4}-(9-8) \\ & =-2\sqrt{3}-4-1 \\ & =-2\sqrt{3}-5.\end{aligned}$$

20. 解方程:

(1) $(x-1)^2-3(x-1)=0$

(2) $\frac{1}{2}x^2+x=4$

(3) $3x^2-x-1=0$ (用配方法)

$$(4) (x-1)(x+3)=2$$

【答案】(1) $x_1=1, x_2=4$

$$(2) x_1=-4, x_2=2$$

$$(3) x_1=\frac{1+\sqrt{13}}{6}, x_2=\frac{1-\sqrt{13}}{6}$$

$$(4) x_1=-1+\sqrt{6}, x_2=-1-\sqrt{6}$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程，熟练掌握解一元二次方程的方法，是解题的关键.

(1) 用因式分解法解一元二次方程即可；

(2) 将一元二次方程化为一般形式，再用因式分解法解一元二次方程即可；

(3) 用配方法解一元二次方程即可；

(4) 先将一元二次方程变为一般形式，再用公式法解一元二次方程即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } (x-1)^2 - 3(x-1) = 0,$$

$$\text{因式分解得: } (x-1)(x-4) = 0,$$

$$\therefore x-1=0 \text{ 或 } x-4=0,$$

$$\text{解得: } x_1=1, x_2=4;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \frac{1}{2}x^2 + x = 4,$$

$$\text{原方程可变为: } x^2 + 2x - 8 = 0,$$

$$\text{因式分解得: } (x+4)(x-2) = 0,$$

$$\therefore x+4=0 \text{ 或 } x-2=0,$$

$$\text{解得: } x_1=-4, x_2=2;$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: } 3x^2 - x - 1 = 0,$$

$$\text{移项得: } 3x^2 - x = 1,$$

方程两边同除以 3 得: $x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}$,

配方得: $\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{13}{36}$,

开平方得: $x - \frac{1}{6} = \pm \frac{\sqrt{13}}{6}$,

$\therefore x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{6}, x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{6}$;

【小问 4 详解】

解: $(x-1)(x+3) = 2$,

变为一般形式得: $x^2 + 2x - 5 = 0$,

$a = 1, b = 2, c = -5$,

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 24$,

$\therefore x = \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{2} = -1 \pm \sqrt{6}$,

即 $x_1 = -1 + \sqrt{6}, x_2 = -1 - \sqrt{6}$.

21. 先化简, 后求值: $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{a-4\sqrt{ab}+4b}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}}$, 其中 $a = \frac{1}{2}, b = 2$.

【答案】 $2\sqrt{a} - 3\sqrt{b}, -2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算, 先根据二次根式的混合运算化简, 再代入字母的值进行计算即可求解.

【详解】 解: 原式 $= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{(\sqrt{a} - 2\sqrt{b})^2}{\sqrt{a} - 2\sqrt{b}}$

$= \sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{a} - 2\sqrt{b}$

$= 2\sqrt{a} - 3\sqrt{b}$

当 $a = \frac{1}{2}, b = 2$ 时,

$$\text{原式} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2} - 3\sqrt{2} = -2\sqrt{2}.$$

22. 已知关于 x 的方程 $x^2 + \sqrt{b}x + \frac{1}{2}c - \frac{1}{4}a = 0$ 有两个相等的实数根，且方程 $ax^2 + bx = 0$ 有一个根为 $x = -1$.

(1) 判断以 a 、 b 、 c 为边的三角形的形状，并说明理由；

(2) 若方程 $x^2 + mx - 2m = 0$ 的两根为 a 、 b ，求 m 的值.

【答案】(1) 等边三角形，见解析

(2) -8

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的解，以及一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 与根的关系，当 $\Delta > 0$ 时，一元二次方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，一元二次方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，一元二次方程没有实数根.

(1) 由方程 $x^2 + \sqrt{b}x + \frac{1}{2}c - \frac{1}{4}a = 0$ 有两个相等的实数根，可得 $a + b = 2c$ ①，再结合方程 $ax^2 + bx = 0$ 有一个根为 $x = -1$ 得 $a - b = 0$ ②，联立即可求出 a 、 b 、 c 的关系；(2) 根据 (1) 求出的 a 、 b 的关系，可以得出方程 $x^2 + mx - 2m = 0$ 有两个相等的实数根，由 $\Delta = 0$ 即可求出 m .

【小问 1 详解】

解：等边三角形. 理由如下：

$\because$ 关于 x 的方程 $x^2 + \sqrt{b}x + \frac{1}{2}c - \frac{1}{4}a = 0$ 有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = 0, \text{ 即: } (\sqrt{b})^2 - 4 \times 1 \times \left(\frac{1}{2}c - \frac{1}{4}a \right) = 0,$$

$$\therefore a + b = 2c \text{①},$$

$\because$ 方程 $ax^2 + bx = 0$ 有一个根为 $x = -1$,

$\therefore$ 把 $x = -1$ 代入得: $a - b = 0$ ②,

联立①②，解得: $a = b = c$,

$\therefore$ 以 a 、 b 、 c 为边的三角形是等边三角形.

【小问 2 详解】

解：方程 $x^2 + mx - 2m = 0$ 的两根为 a 、 b ,

由 (1) 可知, $a = b$,

$\therefore$ 方程 $x^2 + mx - 2m = 0$ 有两个相等的实数根,

$\therefore \Delta = 0$, 即: $m^2 - 4 \times 1 \times (-2m) = 0$,

化简得: $m^2 + 8m = 0$,

解得: $m_1 = 0$, $m_2 = -8$.

当 $m = 0$ 时, 方程 $x^2 + mx - 2m = 0$ 变为 $x^2 = 0$, 则 $x_1 = x_2 = 0$, 即 $a = b = 0$, 此时与方程 $ax^2 + bx = 0$ 有一个根为 $x = -1$ 矛盾, 舍去.

当 $m = -8$ 时, 方程 $x^2 + mx - 2m = 0$ 变为 $x^2 - 8x + 16 = 0$, 则 $x_1 = x_2 = 4$, 符合题意.

所以 $m = -8$.

23. 已知数轴上有 A 、 B 、 C 、 D 四个点, 其中 A 、 B 分别表示 $1 - \sqrt{3}$ 和 $1 + \sqrt{3}$, 点 C 向左移动 4 个单位后与点 A 重合.

(1) 点 C 表示的数是_____;

(2) 对于数轴上三个点, 若其中两个点关于第三个点对称, 则称这三个点有“优美关系”. 如果点 A 、 B 、 D 有“优美关系”, 则点 D 表示的数为_____;

(3) 若点 C 所表示的数的整数部分为 x , 小数部分为 y , 求 $y^3 - 6y^2 + x + 8y - 2025$ 的值.

【答案】 (1) $5 - \sqrt{3}$

(2) $1 - 3\sqrt{3}$ 或 1 或 $1 + 3\sqrt{3}$

(3) $\sqrt{3} - 2022$

【解析】

【分析】 本题主要考查了实数与数轴, 熟练掌握数轴上点的特征是解题的关键.

(1) 点 C 向左平移 4 个单位长度后与点 A 重合, 也就是点 A 向右平移 4 个单位长度得到点 C 解答即可.

(2) 分三种情况考虑, 利用数轴上点的特征和对称性解答即可.

(3) 通过估算 $5 - \sqrt{3}$ 的取值范围, 求出 x 和 y 的值, 然后代入 $y^3 - 6y^2 + x + 8y - 2025$ 计算即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 C 向左平移 4 个单位后与点 A 重合,

$\therefore$ 点 C 表示的数是 $1 - \sqrt{3} + 4 = 5 - \sqrt{3}$

故答案为: $5-\sqrt{3}$;

【小问 2 详解】

解: 设点 D 表示的数为 x_D ,

$\because$ 点 A 、点 B 、点 D 为优美关系, 且点 A 、 B 分别表示数 $1-\sqrt{3}$ 和 $1+\sqrt{3}$.

当点 B 和点 D 关于点 A 对称时, 则点 A 为线段 BD 的中点, 即 $AD=AB$,

$$\text{即 } (1+\sqrt{3})-(1-\sqrt{3})=(1-\sqrt{3})-x_D,$$

$$\text{解得 } x_D=2(1-\sqrt{3})-(1+\sqrt{3})=1-3\sqrt{3};$$

当点 B 和点 A 关于点 D 对称时, 则点 D 为线段 AB 的中点, 即 $AD=BD$,

$$\text{即 } (1+\sqrt{3})-x_D=x_D-(1-\sqrt{3}),$$

$$\text{解得 } x_D=1;$$

当点 A 和点 D 关于点 B 对称时, 则点 B 为线段 AD 的中点, 即 $AB=BD$,

$$\text{即 } x_D-(1+\sqrt{3})=(1+\sqrt{3})-(1-\sqrt{3}),$$

$$\text{解得 } x_D=1+3\sqrt{3};$$

$\therefore$ 点 D 对应的实数为 $1-3\sqrt{3}$ 或 1 或 $1+3\sqrt{3}$.

故答案为: $1-3\sqrt{3}$ 或 1 或 $1+3\sqrt{3}$;

【小问 3 详解】

$$\text{解: } \because \sqrt{1}<\sqrt{3}<\sqrt{4}$$

$$\therefore 1<\sqrt{3}<2$$

$$\therefore -2<-\sqrt{3}<-1$$

$$\therefore 3<5-\sqrt{3}<4$$

$\therefore$ 点 C 所表示的数的整数部分为 x , 小数部分为 y ,

$$\therefore x=3, y=5-\sqrt{3}-3=2-\sqrt{3}$$

$$\therefore y^3-6y^2+x+8y-2025$$

$$=y(y^2-6y+8)+x-2025$$

$$\begin{aligned}
&= y(y-4)(y-2) + x - 2025 \\
&= (2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3}-4)(2-\sqrt{3}-2) + 3 - 2025 \\
&= -(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})(-\sqrt{3}) - 2022 \\
&= \sqrt{3} - 2022.
\end{aligned}$$

24. 已知关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), 满足 $3a + 2b + c = 1$, 就把这个一元二次方程称为“波浪方程”.

- (1) 判断方程 $x^2 + 3x - 8 = 0$ 是不是“波浪方程”: _____; (填“是”或“不是”)
- (2) 已知 $ax^2 + bx - 1 = 0$ 是关于 x 的“波浪方程”, 它有一个根是 $x = 2$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____;
- (3) 若一个“波浪方程” $mx^2 + nx + p = 0$ 的两个根分别是 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, 求 $p^2 - mn$ 的值.

【答案】(1) 是 (2) $-1, \frac{5}{2}$

(3) $p^2 - mn$ 的值为 7.

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程根与系数的关系, 解二元一次方程组等知识, 解题的关键是读懂题意, 理解“波浪方程”的定义.

(1) 计算 $3a + 2b + c = 3 \times 1 + 2 \times 3 - 8 = 1$, 知方程 $x^2 + 3x - 8 = 0$ 是“波浪方程”;

(2) 由 $ax^2 + bx - 1 = 0$ 是关于 x 的“波浪方程”, 它有一个根是 $x = 2$, 可得
$$\begin{cases} 3a + 2b - 1 = 1 \\ 4a + 2b - 1 = 0 \end{cases}$$
, 即可解得

答案;

(3) 由 $mx^2 + nx + p = 0$ 的两个根分别是 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, 得 $-\frac{n}{m} = 1 + 2 = 3$, $\frac{p}{m} = 1 \times 2$, 即 $n = -3m$, $p = 2m$,

而 $mx^2 + nx + p = 0$ 是“波浪方程”, 有 $3m + 2n + p = 1$, 再解出 m , n , p 的值, 代入计算即可.

【小问 1 详解】

解: 在 $x^2 + 3x - 8 = 0$ 中, $a = 1$, $b = 3$, $c = -8$,

$$\therefore 3a + 2b + c = 3 \times 1 + 2 \times 3 - 8 = 1,$$

$\therefore$ 方程 $x^2 + 3x - 8 = 0$ 是“波浪方程”;

故答案为: 是;

【小问 2 详解】

解：∵ $ax^2 + bx - 1 = 0$ 是关于 x 的“波浪方程”，它有一个根是 $x = 2$ ，

$$\therefore \begin{cases} 3a + 2b - 1 = 1 \\ 4a + 2b - 1 = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{5}{2} \end{cases},$$

故答案为： $-1, \frac{5}{2}$ ；

【小问 3 详解】

解：∵ $mx^2 + nx + p = 0$ 的两个根分别是 $x_1 = 1, x_2 = 2$ ，

$$\therefore -\frac{n}{m} = 1 + 2 = 3, \quad \frac{p}{m} = 1 \times 2,$$

$$\therefore n = -3m, \quad p = 2m,$$

∵ $mx^2 + nx + p = 0$ 是“波浪方程”，

$$\therefore 3m + 2n + p = 1,$$

$$\therefore 3m + 2 \times (-3m) + 2m = 1,$$

解得 $m = -1$ ，

$$\therefore n = -3m = 3, \quad p = 2m = -2,$$

$$\therefore p^2 - mn = (-2)^2 - (-1) \times 3 = 4 + 3 = 7,$$

即 $p^2 - mn$ 的值为 7.

25. 综合理解:

一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，当 $b^2 - 4ac \geq 0$ ，它有两个实数根 x_1 和 x_2 ，有以下关系式:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

(1) 设方程 $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$ 的两个根为 a, β ，则 $a + \beta = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 设关于 x 的方程 $x^2 - kx + k - 1 = 0$ 的两个实数根为 a, β ，且 $2a + \beta = 4$ ，则 k 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；

(3) 已知 $a\beta \neq 1$, 且 $a^2 + 20a + 25 = 0$ 及 $25\beta^2 + 20\beta + 1 = 0$, 求 $\frac{a^2}{\beta} + \frac{a}{\beta^2}$ 的值.

【答案】(1) $-\sqrt{2}; \sqrt{2}$

(2) 3 或 $\frac{5}{2}$

(3) -500

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根与系数的关系, 理解题意, 是解题的关键.

(1) 根据根与系数的关系进行求解即可;

(2) 解关于 x 的方程 $x^2 - kx + k - 1 = 0$ 得出 $x_1 = 1$, $x_2 = k - 1$, 根据 $2a + \beta = 4$, 得出 $2 \times 1 + k - 1 = 4$ 或 $1 + 2(k - 1) = 4$, 求出结果即可;

(3) 将 $25\beta^2 + 20\beta + 1 = 0$ 变形为 $\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 + 20\left(\frac{1}{\beta}\right) + 25 = 0$, 得出 $a, \frac{1}{\beta}$ 可看作方程 $x^2 + 20x + 25 = 0$ 的

两个根, 从而得出 $a + \frac{1}{\beta} = -20$, $a \cdot \frac{1}{\beta} = 25$, 再代入求值即可.

【小问 1 详解】

解: $\because x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$ 的两个根为 a, β , $a = 1$, $b = \sqrt{2}$, $c = -1$,

$$\therefore a + \beta = -\frac{b}{a} = -\sqrt{2}, \quad a\beta = \frac{c}{a} = -1,$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} = \frac{a + \beta}{a\beta} = \frac{-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2};$$

【小问 2 详解】

解: $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - kx + k - 1 = 0$ 可变形为: $(x - 1)(x - k + 1) = 0$,

$$\therefore x - 1 = 0, \quad x - k + 1 = 0,$$

解得: $x_1 = 1$, $x_2 = k - 1$,

$$\therefore 2a + \beta = 4,$$

$$\therefore 2 \times 1 + k - 1 = 4 \text{ 或 } 1 + 2(k - 1) = 4,$$

解得: $k = 3$ 或 $k = \frac{5}{2}$.

【小问3 详解】

$$\text{解: } \because 25\beta^2 + 20\beta + 1 = 0,$$

$$\therefore \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 + 20\left(\frac{1}{\beta}\right) + 25 = 0,$$

$$\because a^2 + 20a + 25 = 0, \quad a\beta \neq 1,$$

$$\therefore a, \frac{1}{\beta} \text{ 可看作方程 } x^2 + 20x + 25 = 0 \text{ 的两个根,}$$

$$\therefore a + \frac{1}{\beta} = -20, \quad a \cdot \frac{1}{\beta} = 25,$$

$$\therefore \frac{a^2}{\beta} + \frac{a}{\beta^2}$$

$$= a \cdot \frac{a}{\beta} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{a}{\beta},$$

$$= \frac{a}{\beta} \left(a + \frac{1}{\beta} \right)$$

$$= 25 \times (-20)$$

$$= -500.$$