

上海复旦五浦汇实验学校 2025 学年度第一学期

八年级数学 期中练习卷

(答题时间 90 分钟)

一、单选题 ($3' \times 6$)

1. 下列二次根式中, 与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{3\frac{1}{3}}$

B. $\sqrt{33}$

C. $\sqrt{\frac{1}{27}}$

D. $\sqrt{0.3}$

【答案】C

【解析】

【分析】把各二次根式化为最简二次根式, 然后根据同类二次根式的定义判断即可.

【详解】解: A、 $\sqrt{3\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{\sqrt{30}}{3}$, 与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式, 故该选项错误;

B、 $\sqrt{33}$ 是最简二次根式, 与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式, 故该选项错误;

C、 $\sqrt{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$, 与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式, 故该选项正确;

D、 $\sqrt{0.3} = \sqrt{\frac{3}{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$, 与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式, 故该选项错误,

故选 C.

【点睛】本题主要考查了二次根式的性质以及同类二次根式的定义, 正确对二次根式化简是关键.

2. 若 $a < 0, b > 0$, 则 $\sqrt{-a^3b} =$ ()

A. $-a\sqrt{-ab}$

B. $-a\sqrt{ab}$

C. $a\sqrt{-ab}$

D. $a\sqrt{ab}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了根据二次根式的性质直接化简, 根据条件 $a < 0, b > 0$, 简化根式 $\sqrt{-a^3b}$, 需利用平方根的性质和绝对值的意义进行化简.

【详解】解: $\because a < 0, b > 0$,

$\therefore a^3 < 0$ (负数的立方为负),

故 $-a^3 > 0$, 从而 $-a^3b > 0$, 根式有意义.

$$\because -a^3b = a^2 \cdot (-a) \cdot b,$$

$$\therefore \sqrt{-a^3b} = \sqrt{a^2 \cdot (-a) \cdot b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{(-a)b},$$

$$\text{又} \because \sqrt{a^2} = |a|, \text{ 且 } a < 0, \therefore |a| = -a,$$

$$\therefore \text{原式} = (-a) \cdot \sqrt{(-a)b} = -a\sqrt{-ab},$$

即 $-a\sqrt{-ab}$ ，与选项 A 一致.

故选：A.

3. 把二次三项式 $2x^2 - 8xy + 5y^2$ 因式分解，下列结果正确的是 ()

A. $\left(x - \frac{4 + \sqrt{6}}{2}y\right)\left(x - \frac{4 - \sqrt{6}}{2}y\right)$

B. $2\left(x - \frac{4 + \sqrt{6}}{2}\right)\left(x - \frac{4 - \sqrt{6}}{2}\right)$

C. $2\left(x - \frac{4 - \sqrt{6}}{2}y\right)\left(x - \frac{4 + \sqrt{6}}{2}y\right)$

D. $(2x - 4y + \sqrt{6}y)\left(x - \frac{4 - \sqrt{6}}{2}y\right)$

【答案】C

【解析】

【分析】运用十字相乘法分解因式，即可得出答案.

【详解】解： $2x^2 - 8xy + 5y^2$

$$= 2\left(x^2 - 4xy + \frac{5}{2}y^2\right)$$

$$= 2\left(x - \frac{4 - \sqrt{6}}{2}y\right)\left(x - \frac{4 + \sqrt{6}}{2}y\right)$$

故选 C

【点睛】本题考查了实数范围内的因式分解，掌握十字相乘法是解本题的关键.

4. 已知下列命题中：

①有两条边分别相等的两个直角三角形全等；

②有一条腰相等的两个等腰直角三角形全等；

③有一条边与一个锐角分别相等的两个直角三角形全等；

- ④顶角与底边分别对应相等的两个等腰三角形全等；
⑤有两边和其中一边上的高对应相等的两个三角形全等.

其中真命题的个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据全等三角形的判定定理，逐个判断命题的真假. ①直角三角形有两边相等未明确是哪两条边，故①不一定成立；②等腰直角三角形腰相等则全等；③SSA 不一定成立；④等腰三角形顶角和底边对应相等则全等；⑤当高分别在三角形的内部和外部时，它们不全等.

【详解】 解：①有两条边分别相等的两个直角三角形不一定全等，原命题是假命题；

②有一条腰相等的两个等腰直角三角形全等，是真命题；

③有一条边与一个锐角分别相等的两个直角三角形不一定全等，SSA 不一定成立，原命题是假命题；

④顶角与底边分别对应相等的两个等腰三角形全等，是真命题.

⑤ 两边和其中一边上的高对应相等，当高分别在三角形的内部和外部时，它们不全等，是假命题.

其中真命题的个数是 2 个；

故选： B.

5. 已知 a 、 b 、 c 是三角形三边的长，则关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + 2(b-c)x + a = 0$ 的实数根的情况是 ()

- A. 有两个相等的实数根 B. 有两个不相等的实数根；
C. 没有实数根 D. 无法确定

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据三角形的三边关系可知 $\Delta < 0$ ，可知一元二次方程根的情况.

【详解】 解： $\Delta = [2(b-c)]^2 - 4a^2 = 4(b-c+a)(b-c-a)$ ，

$\because a$ 、 b 、 c 是三角形三边的长，

$\therefore b-c+a > 0$ ， $b-c-a < 0$ ，

$\therefore \Delta = 4(b-c+a)(b-c-a) < 0$ ，

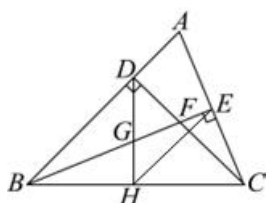
$\therefore$ 原方程没有实数根，

故选： C.

【点睛】 本题考查了一元二次方程根的判别式，三角形的三边关系，熟练掌握根的判别式与根的情况的关系是解题的关键.

6. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 45^\circ$ ， $CD \perp AB$ 于 D ， BE 平分 $\angle ABC$ ， 且 $BE \perp AC$ 于 E ， 与 CD 相交于点 F ， H 是 BC 边的中点， 连接 DH 、 BE 和 HE ， DH 、 BE 相交于点 G ． 以下结论① $BF = AC$ ；

② $\angle DHE = 45^\circ$ ； ③ $\triangle DGF$ 是等腰三角形； ④ $\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle BCF}} = \frac{BD}{BC}$ 中正确的有 () 个.



A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

【答案】 A

【解析】

【分析】 由“ AAS ”可证 $\triangle BDF \cong \triangle CDA$ ， 可得 $BF = AC$ ， 故①正确. 由等腰直角三角形的性质可得 $\angle DHF = 45^\circ$ ②正确， 由角的数量关系可求 $\angle DGF = \angle DFG = 67.5^\circ$ ， 可得 $DG = DF$ ， 即 $\triangle DGF$ 是等腰三角形， 故③正确. 由角平分线的性质可得点 F 到 AB 的距离等于点 F 到 BC 的距离， 由三角形的面积公式可得出④正确.

【详解】 解： $\because CD \perp AB$ ， $BE \perp AC$ ，

$$\therefore \angle BDC = \angle ADC = \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle ABE = 90^\circ, \angle ABE + \angle DFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle DFB,$$

$$\because \angle ABC = 45^\circ, \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCB = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle DBC,$$

$$\therefore BD = DC,$$

在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle CDA$ 中

$$\begin{cases} \angle BDF = \angle CDA \\ \angle A = \angle DFB \\ BD = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BDF \cong \triangle CDA (\text{AAS}),$$

$$\therefore BF = AC, \text{ 故①正确;}$$

$$\because \text{点 } H \text{ 为 } BC \text{ 的中点, } \angle BEC = 90^\circ,$$

$$\therefore BH = EH,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle BEH = \angle ABE,$$

$$\because \angle DGF = \angle ABE + \angle BDH = \angle ABE + 45^\circ, \quad \angle BGH = \angle BEH + \angle DHE, \quad \angle DGF = \angle BGH,$$

$$\therefore \angle DHE = \angle BDH = 45^\circ; \text{ 故②正确;}$$

$$\because BE \text{ 平分 } \angle ABC, \quad \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CBE = 22.5^\circ,$$

$$\because \angle BDC = 90^\circ, \quad BH = HC,$$

$$\therefore \angle BHG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDF = \angle BHG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BGH = \angle BFD = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle DGF = \angle DFG = 67.5^\circ,$$

$$\therefore DG = DF,$$

$$\therefore DGF \text{ 是等腰三角形, 故③正确;}$$

$$\because BE \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \text{点 } F \text{ 到 } AB \text{ 的距离等于点 } F \text{ 到 } BC \text{ 的距离,}$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle BCF}} = \frac{BD}{BC}, \text{ 故④正确,}$$

综上所述, 正确的结论有①②③④, 共有 4 个,

故选: A

【点睛】本题是三角形综合题, 考查了等腰直角三角形的判定和性质, 等腰三角形的性质, 全等三角形的判定和性质, 角平分线的性质, 三角形的面积公式等知识, 证明三角形全等是解题的关键.

二、填空题 (2'×12)

$$7. 3\sqrt{12} - 2\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{48} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案】 $\frac{28}{3}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】利用二次根式加减法法则计算即可.

【详解】 $3\sqrt{12} - 2\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{48} = 6\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} + 4\sqrt{3}$

$$= \frac{28}{3}\sqrt{3}$$

故答案为 $\frac{28}{3}\sqrt{3}$

【点睛】 本题考查二次根式的加减法，熟练掌握二次根式加减法运算法则是解题关键.

8. 不等式 $x < \sqrt{3}x + 4$ 的解是_____

【答案】 $x > -2 - 2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 利用不等式的性质求不等式解集即可.

【详解】 $x < \sqrt{3}x + 4$

$$x - \sqrt{3}x < 4$$

$$(1 - \sqrt{3})x < 4$$

$$x > \frac{4}{1 - \sqrt{3}}$$

$$x > -2 - 2\sqrt{3}$$

【点睛】 本题考查求一元一次不等式的解集，还涉及无理数的比较大小，熟练掌握各个知识点是解题关键.

9. 计算: $\sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} =$ _____.

【答案】 $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质. 根据二次根式的性质, $\sqrt{a^2} = |a|$, 再比较 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 的大小, 取绝对值.

【详解】 解: $\sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} = |\sqrt{2} - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

故答案为 $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

10. 分式方程 $\frac{8(x^2 + 2x)}{x^2 - 1} + \frac{3x^2 - 3}{x^2 + 2x} = 11$, 如果设 $\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} = y$, 那么原方程可以化为关于 y 的整式方程为

_____.

【答案】 $8y^2 - 11y + 3 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程，换元法解方程；通过换元法，将原方程中的分式用 y 表示，然后去分母转化为关于 y 的整式方程.

【详解】 解： 设 $\frac{x^2+2x}{x^2-1}=y$ ， 则原方程中 $\frac{8(x^2+2x)}{x^2-1}=8y$ ，

$$\text{而 } \frac{3x^2-3}{x^2+2x} = \frac{3(x^2-1)}{x^2+2x} = 3 \cdot \frac{1}{y} = \frac{3}{y},$$

因此原方程化为 $8y + \frac{3}{y} = 11$. 两边同乘 y ,

$$\text{得 } 8y^2 + 3 = 11y,$$

$$\text{整理得 } 8y^2 - 11y + 3 = 0.$$

故答案为: $8y^2 - 11y + 3 = 0$.

11. 某农机厂四月份生产零件 50 万个，第二季度共生产零件 182 万个. 设该厂五、六月份平均每月的增长率为 x ，那么 x 满足的方程是_____

【答案】 $50 + 50(1+x) + 50(1+x)^2 = 182$

【解析】

【分析】 等量关系为：四月份生产的零件个数加五月份生产的零件个数加六月份生产的零件个数等于 182.

【详解】 解： 易得五月份生产的零件个数是在四月份的基础上增加的，

所以为 $50(1+x)$ ，

同理可得 6 月份生产的零件个数是在五月份的基础上增加的，

为 $50(1+x)(1+x)$ ，

由题意得 $50 + 50(1+x) + 50(1+x)^2 = 182$.

【点睛】 找到合适的等量关系是解决问题的关键，注意六月份生产的零件个数是在五月份的基础上增加的.

12. 已知关于 x 的方程 $\frac{a+x}{x+1} - 3 = 0$ 的根是负数，则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a < 3$ 且 $a \neq 1$

【解析】

【分析】 本题考查根据分式方程的解情况求参数，将原方程去分母并解得 x 的值，然后根据题意得到关于 a 的不等式，解不等式即可.

【详解】 解： 原方程去分母并整理得: $a + x - 3x - 3 = 0$,

解得: $x = \frac{a-3}{2}$

∵ 原方程的根是负数,

∴ $\frac{a-3}{2} < 0$ 且 $\frac{a-3}{2} \neq -1$,

解得: $a < 3$ 且 $a \neq 1$,

故答案为: $a < 3$ 且 $a \neq 1$.

13. 一元二次方程 $4x^2 - 7x - 3 = 0$ 的两根是 x_1, x_2 . 则 $\frac{x_2}{x_1+1} + \frac{x_1}{x_2+1} =$ _____.

【答案】 $\frac{101}{32}$

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程根与系数的关系及分式的化简求值. 首先根据根与系数的关系求出两根之和与两根之积, 然后将所求分式通分, 利用代数恒等变形, 代入已知值计算.

【详解】 解: 一元二次方程 $4x^2 - 7x - 3 = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ,

由根与系数的关系, 得 $x_1 + x_2 = -\frac{-7}{4} = \frac{7}{4}$, $x_1 x_2 = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} & \frac{x_2}{x_1+1} + \frac{x_1}{x_2+1} \\ &= \frac{x_2(x_2+1) + x_1(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)} \\ &= \frac{x_2^2 + x_2 + x_1^2 + x_1}{(x_1+1)(x_2+1)} \\ &= \frac{(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 + x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)} \end{aligned}$$

其中, $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{49}{16} + \frac{6}{4} = \frac{49}{16} + \frac{24}{16} = \frac{73}{16}$,

$(x_1+1)(x_2+1) = x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 = -\frac{3}{4} + \frac{7}{4} + 1 = \frac{4}{4} + 1 = 2$.

∴ 原式 = $\frac{\frac{73}{16} + \frac{7}{4}}{2} = \frac{\frac{73}{16} + \frac{28}{16}}{2} = \frac{\frac{101}{16}}{2} = \frac{101}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{101}{32}$.

故答案为: $\frac{101}{32}$.

14. 如果关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - \sqrt{2k+1}x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是

_____.

【答案】 $-\frac{1}{2} \leq k < \frac{1}{2}$ 且 $k \neq 0$.

【解析】

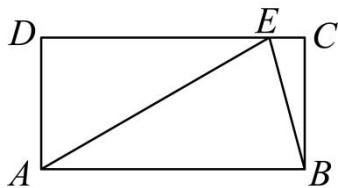
【详解】 试题解析：关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - \sqrt{2k+1}x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore \begin{cases} k \neq 0 \\ 2k+1 \geq 0 \\ \Delta = (\sqrt{2k+1})^2 - 4k \times 1 > 0, \end{cases}$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq k < \frac{1}{2} \text{ 且 } k \neq 0.$$

故答案为： $-\frac{1}{2} \leq k < \frac{1}{2}$ 且 $k \neq 0$.

15. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 2BC$ ，在 CD 上取一点 E ，使 $AE = AB$ ，则 $\angle EBC$ 的度数为_____.



【答案】 15° ##15 度

【解析】

【分析】 作 $EF \perp AB$ 于 F ，延长 AD 到 F ，使得 $AD = DF$ ，先证明 $\triangle AEF$ 是等边三角形，从而得到 $\angle AED = \frac{1}{2} \angle AEF = 30^\circ$ ，继而求出 $\angle EAF = 30^\circ$ ，再根据等腰三角形的底角相等求出 $\angle ABE$ ，最后利用 $\angle ABC = 90^\circ$ 求出 $\angle EBC$ 即可.

先求出 $\angle ADE$

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle D = 90^\circ, AD = BC, AB \parallel CD, \angle ABC = 90^\circ$$

作 $EF \perp AB$ 于 F ，则 $EF = BC$ ，

延长 AD 到 F ，使得 $AD = DF$ ，

则 DE 垂直平分 AF ， $AF = 2AD$ ，

$$\therefore AE = EF,$$

又 $AB = 2BC$ ， $AE = AB$ ，

$$\therefore AE = 2EF = 2AD,$$

$$\therefore AE = EF = AF,$$

$$\therefore \triangle AEF \text{ 是等边三角形, } \angle AEF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = \frac{1}{2} \angle AEF = 30^\circ,$$

$$\text{又} \because AB \parallel CD$$

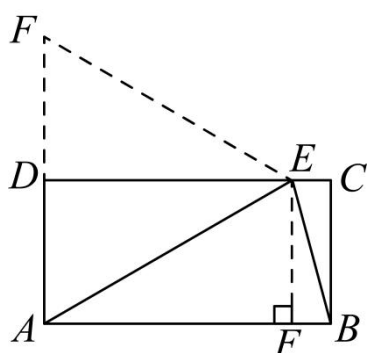
$$\therefore \angle EAF = \angle AED = 30^\circ,$$

$$\text{又} \because AE = AB,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle AEB = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle EBC = \angle ABC = 90^\circ - \angle ABE = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$

故答案为: 15°



【点睛】本题考查等边三角形的判定与性质，等边对等角，矩形的性质等知识，正确作出辅助线求解是解题的关键。

16. $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AB 上的高为 CD , $AB = 2CD$, 则顶角 $\angle BAC =$ _____.

【答案】 30° 或 150°

【解析】

【分析】 本题主要考查了等腰三角形的性质，直角三角形中斜边上的中线等于斜边的一半,等边三角形的性质与判定；根据 $\triangle ABC$ 为锐角三角形和钝角三角形两种情况分类讨论解答即可.

【详解】 解：当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时，如图 1：取 AC 的中点 E ，连接 DE

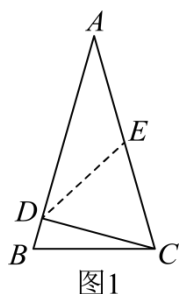


图1

$$\therefore AC = 2CE,$$

$$\because CD \perp AB,$$

$$\therefore DE = CE$$

$$\because AB = AC, AB = 2CD,$$

$$\therefore AC = 2CD,$$

$$\therefore CE = CD$$

$$\therefore CE = DE = CD$$

$\therefore \triangle CDE$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ACD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 30^\circ;$$

当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时, 如图 2: 取 AC 的中点 E , 连接 DE

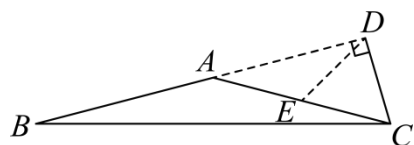


图2

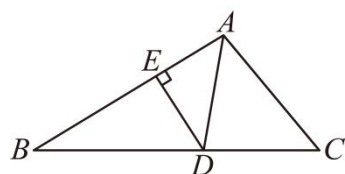
同理可得 $\angle CAD = 30^\circ$,

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ,$$

综上所述, $\angle BAC = 30^\circ$ 或 150° .

故答案为: 30° 或 150° .

17. 如图, AD 是 $\triangle BAC$ 的角平分线, $DE \perp AB$ 于点 E , $S_{\triangle ABC} = 20$, $DE = 4$, $AB = 6$, 则边 AC 的长是 _____.

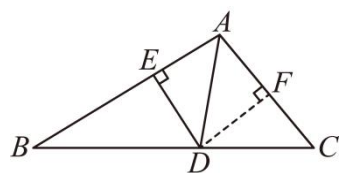


【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查了角平分线的性质; 作 $DF \perp AC$ 于点 F , 由 AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D , $DE \perp AB$ 于点 E , 得 $DF = DE = 4$, 根据 $S_{\triangle ABC} = 20$, $AB = 6$, 求得 $AC = 4$, 于是得到问题的答案.

【详解】 解: 作 $DF \perp AC$ 于点 F ,



$\because AD$ 是 $\triangle BAC$ 的角平分线,

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D ,

$\because DF \perp AC$ 于点 F , $DE \perp AB$ 于点 E ,

$\therefore DF = DE = 4$,

$$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AB \cdot DE + \frac{1}{2} AC \cdot DF$$

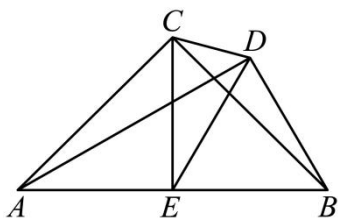
$\therefore S_{\triangle ABC} = 20$, $AB = 6$,

$$\therefore \frac{1}{2} \times 6 \times 4 + \frac{1}{2} \times 4 \times AC = 20$$

解得: $AC = 4$

故答案为: 4.

18. 将两块斜边长等于 4 的三角尺($Rt\triangle ABC$ 与 $Rt\triangle ABD$)的斜边重合, 按图所示摆放, E 为 AB 中点, 联结 EC 和 ED , 那么 $\triangle ECD$ 的面积等于_____.

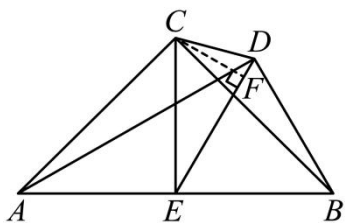


【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查的是直角三角形斜边上的中线的性质、含 30° 度角的直角三角形的性质; 过点 C 作 $CF \perp DE$ 于 F , 根据直角三角形斜边上的中线的性质求出 CE 、 DE , 求出 $\angle CED = 30^\circ$, 进而求出 CF , 再根据三角形面积公式计算即可.

【详解】 解: 如图, 过点 C 作 $CF \perp DE$ 于 F ,



在 $Rt\triangle ABC$ 中, $CA = CB$, E 为 AB 中点, 斜边 $AB = 4$,

$$CE = \frac{1}{2} AB = 2, \quad CE \perp AB,$$

在 $Rt\triangle ABD$ 中, $\angle ABD = 60^\circ$, $\angle DAB = 30^\circ$, E 为 AB 中点, 斜边 $AB = 4$,

$$\therefore DE = \frac{1}{2} AB = BE = 2, \quad DB = \frac{1}{2} AB = 2$$

$$\therefore DE = DB = EB,$$

$\therefore \triangle DEB$ 为等边三角形,

$\therefore \angle DEB = 60^\circ$,

$\therefore \angle CED = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$,

$\therefore CF = \frac{1}{2}CE = 1$, $S_{\triangle ECD} = \frac{1}{2}DE \cdot CF = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$.

故答案为: 1.

三、解答题 (共 58 分)

19. (1) 已知 $m = \frac{1}{\sqrt{3}+2}$, $n = \frac{1}{\sqrt{3}-2}$, 求 $m^2 - mn + n^2$ 的值.

(2) 解方程: $\frac{3}{2x+1} + \frac{2x}{4x^2-1} + \frac{1}{2-4x} = 1$.

【答案】(1) 15; (2) $x = \frac{5}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程, 解一元二次方程, 分母有理化, 二次根式的化简求值;

(1) 先分母有理化求出 m 、 n 的值, 求出 $m-n$ 和 mn 的值, 变形后代入求出即可;

(2) 先把分式方程转变为整式方程, 解整式方程求出 x 的值, 然后检验即可.

【详解】 解: (1) $m = \frac{1}{\sqrt{3}+2} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3}$, $n = \frac{1}{\sqrt{3}-2} = -\frac{2+\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = -2-\sqrt{3}$

$\therefore m-n=4, mn=-1$,

$\therefore m^2 - mn + n^2$

$= (m-n)^2 + mn$

$= 4^2 - 1$

$= 15$;

(2) $\frac{3}{2x+1} + \frac{2x}{4x^2-1} + \frac{1}{2-4x} = 1$,

方程两边同时乘以 $2(2x+1)(2x-1)$ 得, $6(2x-1) + 4x - (2x+1) = 2(2x+1)(2x-1)$,

整理得 $8x^2 - 14x + 5 = 0$,

解得: $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{5}{4}$,

检验, 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $2(2x+1)(2x-1) = 0$,

检验, 当 $x = \frac{5}{4}$ 时, $2(2x+1)(2x-1) \neq 0$,

$\therefore$ 原方程的解为: $x = \frac{5}{4}$.

20. 商场销售某种拖把, 已知这种拖把的进价为 80 元/套, 售价为 120 元/套, 商场每天可销售 20 套、国庆假期临近, 该商场决定采取适当的降价措施, 经调查: 这种拖把的售价每降价 1 元, 平均每天可多售出 2 套, 设这种拖把每套降价 x 元.

(1) 降价后每套拖把盈利_____元, 平均每天可销售_____套 (用含 x 的代数式表示);

(2) 为扩大销售量, 尽快减少库存, 当每套拖把降价多少元时, 该商场销售这种拖把平均每天能盈利 1242 元?

【答案】 (1) $40 - x$, $20 + 2x$

(2) 每套拖把降价 17 元时, 能让利于顾客并且商家平均每天能盈利 1242 元

【解析】

【分析】 此题考查了一元二次方程的实际应用. 解题的关键是熟练掌握每件利润与售价和进价和降价关系, 总利润与每件利润和件数的关系, 列算式, 列方程.

(1) 设每套拖把降价 x 元, 每套拖把盈利 $120 - 80 - x = (40 - x)$ 元, 每天销售 $(20 + 2x)$ 套;

(2) 设每套拖把降价 x 元, 根据平均每天能盈利 1242 元, 减少库存, 列出一元二次方程 $(40 - x)(20 + 2x) = 1242$ 求解即可.

【小问 1 详解】

设每套拖把降价 x 元,

每套拖把盈利 $120 - 80 - x = (40 - x)$ 元.

则每天销售量增加 $2x$ 套,

$\therefore$ 每天销售 $(20 + 2x)$ 套,

故答案为: $40 - x$, $20 + 2x$;

【小问 2 详解】

设每套拖把降价 x 元, 则每套的销售利润为 $(40 - x)$ 元, 平均每天的销售量为 $(20 + 2x)$ 套,

依题意得: $(40 - x)(20 + 2x) = 1242$,

整理得: $x^2 - 30x + 221 = 0$,

解得: $x_1 = 13$, $x_2 = 17$.

又∵需要尽快减少库存,

$$\therefore x = 17.$$

答: 每套拖把降价 17 元时, 能让利于顾客并且商家平均每天能盈利 1242 元.

21. 已知关于 x 的方程 $\frac{x}{x-2} + \frac{x-2}{x} + \frac{2x+k}{x^2-2x} = 0$ 只有一个解, 求 k 的值及这个解.

【答案】 $k = -\frac{7}{2}$ 时, 解为 $x = \frac{1}{2}$; $k = -4$ 时, 解为 $x = 1$; $k = -8$ 时, 解为 $x = -1$

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的解, 解一元二次方程; 首先将分式方程乘以公分母 $x(x-2)$ 消去分母, 得到一元二次方程, 但需考虑分母不为零的条件 $x \neq 0$ 且 $x \neq 2$. 方程只有一个解的情况包括: 一元二次方程有两个相等实数根, 且根满足分母不为零; 或一元二次方程有两个根, 但其中一个根使分母为零(增根), 另一个根有效. 通过判别式和代入检验求得所有可能的 k 值及对应解.

【详解】 解: 去分母得: $x^2 + x^2 - 4x + 4 + 2x + k = 0$, 即 $2x^2 - 2x + k + 4 = 0$,

由分式方程只有一个解,

情况一: 一元二次方程有两个相等实数根, 则 $\Delta = 4 - 8(k + 4) = -8k - 28 = 0$,

解得: $k = -\frac{7}{2}$, 此时方程为 $2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$, 即 $2(x - \frac{1}{2})^2 = 0$,

解得: $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, 经检验是分式方程的解,

情况二: 一元二次方程有两个根, 但其中一个根为增根(使分母为零)

整式方程有一根为 $x = 0$ 或 $x = 2$,

把 $x = 0$ 代入方程 $2x^2 - 2x + k + 4 = 0$ 得: $k = -4$, 此时方程 $2x^2 - 2x + k + 4 = 0$ 为 $2x^2 - 2x = 0$

解为 $x = 1$ ($x = 0$ 舍去);

把 $x = 2$ 代入方程 $2x^2 - 2x + k + 4 = 0$ 得: $k = -8$, 此时方程 $2x^2 - 2x + k + 4 = 0$ 为 $2x^2 - 2x - 4 = 0$

解为 $x = -1$ ($x = 2$ 舍去),

综上所述, $k = -\frac{7}{2}$ 时, 解为 $x = \frac{1}{2}$; $k = -4$ 时, 解为 $x = 1$; $k = -8$ 时, 解为 $x = -1$

22. 已知关于 x 的方程 $x^2 + 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$.

(1) 若方程有实根, 试求 m 的取值范围;

(2) 若方程有两个实根分别为 x_1 、 x_2 , 且满足 $(x_1 - x_2)^2 = 16 - x_1x_2$, 试求 m 的值.

【答案】(1) $m \geq -1$

(2) $m = 1$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根与系数的关系以及根的判别式，解题的关键是掌握相关知识.

(1) 根据方程的系数结合根的判别式，即可得出关于 m 的一元一次不等式，解之即可得出 m 的取值范围；

(2) 根据根与系数的关系可得出 $x_1 + x_2 = -2(m+1)$ ， $x_1x_2 = m^2 - 1$ ，结合 $(x_1 - x_2)^2 = 16 - x_1x_2$ 可得出关于 m 的一元二次方程，解之即可得出 m 的值.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 + 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$,

$$\therefore \Delta = 4(m+1)^2 - 4 \times 1(m^2 - 1) \geq 0,$$

解得： $m \geq -1$;

【小问 2 详解】

$\because$ 方程 $x^2 + 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$ 有两个实根分别为 x_1 、 x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = -2(m+1), \quad x_1x_2 = m^2 - 1,$$

$$\because (x_1 - x_2)^2 = 16 - x_1x_2,$$

$$\therefore (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 16 - x_1x_2,$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 16,$$

$$[-2(m+1)]^2 - 3(m^2 - 1) = 16,$$

$$m^2 + 8m + 9 = 0,$$

$$(m-1)(m+9) = 0,$$

$$m-1=0 \text{ 或 } m+9=0,$$

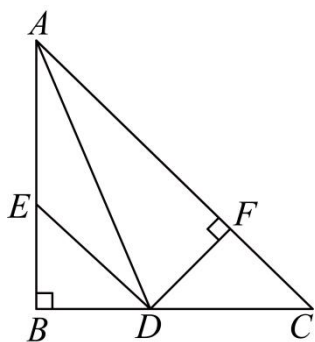
$$m=1 \text{ 或 } m=-9,$$

$\because m \geq -1$ 时，方程有实根，

$$\therefore m=1.$$

23. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB \perp BC$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ， $DF \perp AC$ ， $ED = CD$.

求证： $AC = AE + 2BE$.



【答案】见解析

【解析】

【分析】本题考查了角平分线的性质，全等三角形的性质与判定；根据角平分线的性质可得 $DB = DF$ ，进而证明 $\text{Rt}\triangle BDE \cong \text{Rt}\triangle FCD$ (HL) 得出 $FC = EB$ ，证明 $\text{Rt}\triangle ADB \cong \text{Rt}\triangle ADF$ (HL) 得出 $AF = AB$ ，根据线段关系，即可求解.

【详解】证明： $\because AD$ 平分 $\angle BAC$ ， $AB \perp BC$ ， $DF \perp AC$ ，

$\therefore DB = DF$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 和 $\text{Rt}\triangle FDC$ 中，

$$\begin{cases} DB = DF \\ ED = CD \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle BDE \cong \text{Rt}\triangle FDC$ (HL)，

$\therefore FC = BE$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 和 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中，

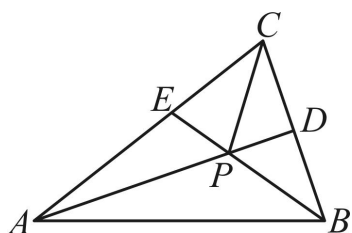
$$\begin{cases} DB = DF \\ AD = AD \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle ADB \cong \text{Rt}\triangle ADF$ (HL)，

$\therefore AF = AB$ ，

$\therefore AC = AF + FC = AB + BE = AE + BE + BE = AE + 2BE$.

24. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle CAB$ 和 $\angle ABC$ 的平分线 AD 、 BE 交于点 P ，连接 CP 。



(1) 求证: CP 平分 $\angle ACB$;

(2) $\angle ACB = 60^\circ$, $EP = DP$? 若成立, 请证明; 若不成立, 请说明理由.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定与性质、角平分线的判定与性质、三角形内角和定理以及三角形的外角性质等知识;

(1) 过 P 作 $PF \perp AB$ 于点 F , $PG \perp AC$ 于点 G , $PH \perp BC$ 于点 H , 由角平分线的性质得 $PF = PG$, $PF = PH$, 则 $PG = PH$, 再由角平分线的判定即可得出结论;

(2) 过 P 作 $PH \perp AC$ 于点 H , $PM \perp CB$ 于点 M , $PQ \perp AB$ 于点 Q , 由角平分线的性质得 $PH = PQ = PM$, 再证明 $\angle CEP = \angle ADB$, 然后证明 $\triangle PHE \cong \triangle PMD$ (AAS), 即可得出结论.

【小问 1 详解】

证明: 如图 1, 过 P 作 $PF \perp AB$ 于点 F , $PG \perp AC$ 于点 G , $PH \perp BC$ 于点 H ,

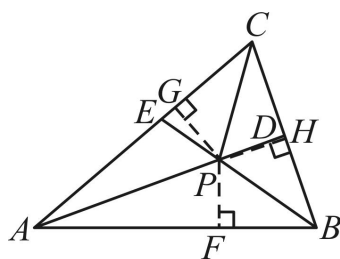


图1

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore PF = PG$,

$\because BE$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore PF = PH$,

$\therefore PG = PH$,

$\therefore CP$ 平分 $\angle ACB$;

【小问 2 详解】

$EP = DP$ 成立, 证明如下:

设 $\angle CAB < \angle CBA$,

如图 2, 过 P 作 $PH \perp AC$ 于点 H , $PM \perp CB$ 于点 M , $PQ \perp AB$ 于点 Q ,

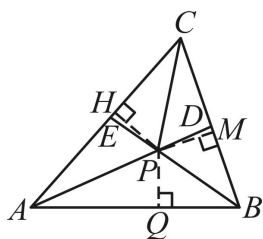


图2

则点 H 在线段 CE 上, 点 M 在线段 BD 上,

$\because \angle CAB$ 和 $\angle ACB$ 的平分线 AD 、 BE 交于点 P ,

$\therefore PH = PQ = PM$,

$\because \angle ACB + \angle CAB + \angle ABC = 180^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$,

$\therefore \angle CAB + \angle ABC = 120^\circ$,

$\because AD$ 、 BE 分别平分 $\angle CAB$ 、 $\angle ABC$,

$\therefore \angle PAB + \angle PBA = 60^\circ$,

$\therefore \angle CEP = \angle CAP + \angle PAB + \angle PBA = \angle CAP + 60^\circ$,

$\angle ADB = \angle CAP + \angle ACD = \angle CAP + 60^\circ$,

$\therefore \angle CEP = \angle ADB$,

在 $\triangle PHE$ 和 $\triangle PMD$ 中,

$$\begin{cases} \angle HEP = \angle MDP \\ \angle EHP = \angle DMP, \\ PH = PM \end{cases}$$

$\therefore \triangle PHE \cong \triangle PMD$ (AAS),

$\therefore EP = DP$.

25. (1) 课外兴趣小组活动时, 老师提出了如下问题: 如图 1, $\triangle ABC$ 中, $AB = 14$, $AC = 8$, 求 BC 边上的中线 AD 的取值范围.

小明在组内经过合作交流, 得到了如下的解决方法 (如图 1).

①延长 AD 到 E , 使得 $DE = AD$;

②再联结 BE , 可得 $\triangle DBE \cong$ _____, 从而把 AB 、 AC 、 $2AD$ 转化在 $\triangle ABE$ 中;

③利用全等三角形性质和三角形三边关系可得 _____ $< AE <$ _____, 则 AD 的取值范围是: _____ (在横线上填空).

感悟: 解题时, 条件中若出现“中点”“中线”等条件, 可以考虑倍长中线, 构造全等三角形, 把分散的已知条件和所求证的结论转化到同一个三角形中.

(2) 思考: 已知, 如图 2, AD 是 ABC 的中线, $AB = AF$, $AC = AE$, $\angle BAF = \angle CAE = 90^\circ$ (点 F 和点 E 在 BC 同侧), 试探究线段 AD 与 EF 的数量和位置关系并加以证明.

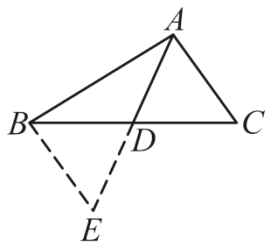


图1

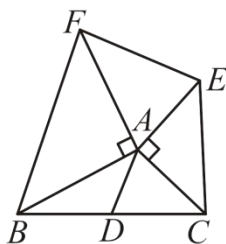


图2

【答案】 (1) $\triangle DCA$, $AB - AC$, $AB + AC$, $3 < AD < 11$; (2) $2AD = EF$, $AD \perp EF$, 理由见解析

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的判定与性质、三角形三边关系、等腰三角形的性质, 熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

(1) 根据全等三角形的判定和性质以及三角形的三边关系即可得到结论;

(2) 延长 AD 至 H , 使 $DH = AD$, 连接 CH , 由 (1) 可得 $\triangle ABD \cong \triangle HCD$, 由全等三角形的性质得出 $\angle BAD = \angle H$, $AB = CH$, 证出 $\angle ACH = \angle EAF$, 证明 $\triangle ACH \cong \triangle EAF$ (SAS), 得出 $AH = EF$, $\angle HAC = \angle AEF$, 推出 $2AD = EF$. 延长 DA 交 EF 于 G , 求出 $\angle AGE = 90^\circ$, 即可得解.

【详解】 解: (1) 延长 AD 到 E , 使得 $DE = AD$,

$\because AD$ 是 BC 边上的中线,

$\therefore BD = CD$,

在 $\triangle DBE$ 和 $\triangle DCA$ 中,

$$\begin{cases} BD = CD \\ \angle BDE = \angle CDA, \\ DE = DA \end{cases}$$

$\therefore \triangle DBE \cong \triangle DCA$ (SAS),

$\therefore BE = AC = 8$,

$\therefore AB - BE < AE < AB + BE$,

$\therefore AB - AC < AE < AB + AC$, $14 - 8 < AE < 14 + 8$,

$\therefore 3 < AD < 11$,

故答案为: $\triangle DCA$, $AB - AC$, $AB + AC$, $3 < AD < 11$;

(2) $2AD = EF$, $AD \perp EF$, 理由如下:

延长 AD 至 H , 使 $DH = AD$, 连接 CH , 如图 2 所示:

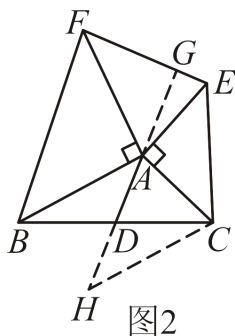


图2

由 (1) 得: $\triangle ABD \cong \triangle HCD$,

$$\therefore \angle BAD = \angle H, \quad AB = CH,$$

$$\because \angle BAF = \angle CAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle EAF = 180^\circ, \text{ 即 } \angle BAD + \angle CAD + \angle EAF = 180^\circ,$$

$$\because \angle H + \angle CAD + \angle ACH = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ACH = \angle EAF,$$

$\because \triangle ABF$ 和 $\triangle ACE$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AB = AF, \quad AC = AE,$$

$$\therefore CH = AF,$$

在 $\triangle ACH$ 和 $\triangle EAF$ 中,

$$\begin{cases} CH = EF \\ \angle ACH = \angle EAF, \\ AC = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACH \cong \triangle EAF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore AH = EF, \quad \angle HAC = \angle AEF,$$

$$\therefore 2AD = EF.$$

延长 DA 交 EF 于 G ,

$$\because \angle EAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HAC + \angle EAG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEF + \angle EAG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AGE = 90^\circ,$$

$$\therefore AD \perp EF.$$