

2025 学年第一学期期中阶段练习

八年级数学学科

(时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、选择题

1. 下列各数: $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 、 $-\sqrt[3]{9}$ 、 $\frac{22}{7}$ 、 $\frac{\pi}{2}$ 、 $\sqrt[3]{-8}$ 、 $\sqrt{\frac{4}{9}}$, 其中无理数有 ()

A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 5 个

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了无理数. 熟练掌握无理数的定义: 无限不循环小数, 是解题的关键. 根据无理数的定义, 进行判断即可.

【详解】解: $\because \sqrt{5}$ 是无理数, $\therefore \frac{\sqrt{5}}{2}$ 是无理数;

$\because \sqrt[3]{9}$ 是无理数, $\therefore -\sqrt[3]{9}$ 是无理数;

$\because \frac{22}{7}$ 是分数, $\therefore \frac{22}{7}$ 是有理数;

$\because \pi$ 是无理数, $\therefore \frac{\pi}{2}$ 是无理数;

$\because \sqrt[3]{-8} = -2$, $\therefore \sqrt[3]{-8}$ 是有理数;

$\because \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, $\therefore \sqrt{\frac{4}{9}}$ 是有理数;

$\therefore$ 无理数有 3 个,

故选: B.

2. 下列二次根式中, 与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式 ()

A. $\sqrt{12}$

B. $\sqrt{\frac{3}{25}}$

C. $\sqrt{0.3}$

D. $\sqrt{\frac{1}{27}}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据二次根式性质化简后, 根据同类二次根式的定义进行选择即可.

【详解】A、 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, 与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式, 故 A 不符合题意;

B、 $\sqrt{\frac{3}{25}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$ ，与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式，故 B 不符合题意；

C、 $\sqrt{0.3} = \sqrt{\frac{3}{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$ ，与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式，故 C 符合题意；

D、 $\sqrt{\frac{1}{27}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$ ，与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式，故 D 不符合题意。

故选：C.

【点睛】本题考查了同类二次根式的定义（几个二次根式化成最简二次根式后，如果被开方数相同，这几个二次根式叫做同类二次根式），二次根式的性质，掌握同类二次根式的定义，对二次根式进行化简，是解题的关键。

3. 关于 x 的方程 $(a+1)x^{a^2+1} - 3x - 1 = 0$ 是一元二次方程，则 a 的值是（ ）

A. $a = \pm 1$

B. $a = -1$

C. $a = 1$

D. $a = 0$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的概念，掌握一元二次方程的定义：未知数的最高次数是 2；二次项系数不为 0；是整式方程；含有一个未知数是解题关键。由一元二次方程的定义列方程求出即可。

【详解】解：∵关于 x 的方程 $(a+1)x^{a^2+1} - 3x - 1 = 0$ 是一元二次方程，

∴ $a^2 + 1 = 2$ 且 $a + 1 \neq 0$ ，

解得： $a = \pm 1$ 且 $a \neq -1$ ，

∴ $a = 1$ ，

故选：C.

4. 已知 $a > 0$ ，那么 $\sqrt{\frac{-a}{b}}$ 可化简为（ ）

A. $b\sqrt{-ab}$

B. $-\frac{1}{b}\sqrt{ab}$

C. $-\frac{1}{b}\sqrt{-ab}$

D. $\frac{1}{b}\sqrt{-ab}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的性质与化简、二次根式有意义的条件，掌握分式有意义的条件、二次根式有意义的条件和二次根式的乘除法公式是解决此题的关键。

根据二次根式有意义的条件得到 $\frac{-a}{b}$, 则 $b < 0$, 根据二次根式的性质利用二次根式的乘除法公式化简即可.

【详解】解: $\because \frac{-a}{b}, a > 0,$

$\therefore b < 0,$

$$\therefore \text{原式} = \sqrt{\frac{-a}{b}} = \sqrt{\frac{-ab}{b^2}} = -\frac{1}{b}\sqrt{-ab},$$

故选: C.

5. 某工厂七月份的产值是 100 万元, 计划第三季度共创产值 484 万元. 若每个月产值的增长率相同, 并设这个增长率为 x , 则下列方程中正确的是 ()

A. $100(1+x)^2 = 484$

B. $100(1+x)^3 = 484$

C. $(1+x) + 100(1+x)^2 = 484$

D. $100[1 + (1+x) + (1+x)^2] = 484$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的应用, 掌握增长率的计算方法是解题的关键;

根据每个月产值的平均增长率为 x , 七月份的产值是 100 万元, 表示之后两个月的产值, 然后已知第三季度的总产值, 列方程即可.

【详解】解: $\because$ 每个月产值的平均增长率为 x , 七月份的产值是 100 万元,

$\therefore$ 八月份产值为 $100(1+x)$,

九月份产值为 $100(1+x)^2$,

$\therefore$ 计划第三季度共创产值 484 万元,

$$\therefore 100[1 + (1+x) + (1+x)^2] = 484,$$

故选: D.

6. 若 $a + |a| = 0$, 则 $\sqrt{(a+1)^2} + \sqrt{(a-1)^2}$ 的值是 ()

A. 2

B. $-2a$

C. 2 或 $-2a$

D. $2a$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的性质, 绝对值的非负性, 化简绝对值, 正确掌握相关性质内容是解题的关键. 先根据 $a + |a| = 0$, 得 $|a| = -a$, 整理得 $a \leq 0$, 再化简 $\sqrt{(a+1)^2} + \sqrt{(a-1)^2} = |a+1| + 1 - a$, 然后进行

分类讨论，化简绝对值，即可作答.

【详解】解： $\because a + |a| = 0$,

$$\therefore |a| = -a,$$

$$\because |a| \geq 0$$

$$\therefore -a \geq 0$$

$$\therefore a \leq 0,$$

$$\text{则 } \sqrt{(a+1)^2} + \sqrt{(a-1)^2}$$

$$= |a+1| + |a-1|$$

$$= |a+1| + 1 - a$$

$$\text{当 } -1 \leq a \leq 0 \text{ 时, 则 } |a+1| + 1 - a = a + 1 + 1 - a = 2;$$

$$\text{当 } a < -1 \text{ 时, 则 } |a+1| + 1 - a = -a - 1 + 1 - a = -2a;$$

故选: C

二、填空题

7. 实数 $\sqrt{9}$ 的平方根是_____.

【答案】 $\pm\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了算术平方根和平方根的概念，解题的关键是先求出 $\sqrt{9}$ 的值，再求其平方根.

先计算 $\sqrt{9}$ 的结果，再根据平方根的定义求出该结果的平方根.

【详解】解： $\because \sqrt{9} = 3$,

$$\therefore \sqrt{9} \text{ 的平方根是 } \pm\sqrt{3}.$$

故答案为: $\pm\sqrt{3}$

8. 若 $\sqrt{20}$ 与最简二次根式 $\frac{1}{3}\sqrt{3-m}$ 是同类二次根式，则 m 的值为_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查的是同类二次根式的概念，掌握二次根式化成最简二次根式后，被开方数相同的二次根

式叫做同类二次根式是解题的关键. 根据同类二次根式的概念列出方程, 解方程得到答案.

【详解】解: $\because \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, 且最简二次根式 $\frac{1}{3}\sqrt{3-m}$ 与 $2\sqrt{5}$ 是同类二次根式,

$$\therefore 3-m=5,$$

$$\therefore m=-2$$

故答案为: -2 .

9. 已知关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 + 2x + 1 = 0$ 有实数根, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \leq 2$ 且 $k \neq 1$

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的定义, 一元二次方程根的判别式, 由题意可得 $\Delta = 2^2 - 4 \times (k-1) \times 1 \geq 0$

且 $k-1 \neq 0$, 解不等式即可求解, 掌握以上知识点是解题的关键.

【详解】解: 由题意得, $\Delta = 2^2 - 4 \times (k-1) \times 1 \geq 0$ 且 $k-1 \neq 0$,

解得 $k \leq 2$ 且 $k \neq 1$,

故答案为: $k \leq 2$ 且 $k \neq 1$.

10. $5 + \sqrt{5}$ 的整数部分为 a , 小数部分为 b , 则 $b^2 - 3ab - a^2 =$ _____.

【答案】 $2 - 25\sqrt{5}$

【解析】

【分析】此题考查了无理数的大小的应用, 关键是确定 $5 + \sqrt{5}$ 的范围.

求出 $2 < \sqrt{5} < 3$, 推出 $7 < 5 + \sqrt{5} < 8$, 得到 a , 求出 b , 代入 $b^2 - 3ab - a^2$ 计算即可.

【详解】解: $\because 4 < 5 < 9$,

$$\therefore 2 < \sqrt{5} < 3,$$

$$\therefore 7 < 5 + \sqrt{5} < 8,$$

$$\therefore a = 7,$$

$$\therefore b = 5 + \sqrt{5} - 7 = \sqrt{5} - 2,$$

$$\therefore b^2 - 3ab - a^2 = 9 - 4\sqrt{5} - 21\sqrt{5} + 42 - 49 = 2 - 25\sqrt{5}.$$

故答案为: $2 - 25\sqrt{5}$.

11. 已知: x, y 满足关系 $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x} + 3$, 则 y^x 的立方根是_____.

【答案】 $\sqrt[3]{9}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式有意义的条件，直接利用二次根式有意义的条件分析得出答案.

【详解】 解：由题意可得：
$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases}$$

解得： $x=2$,

所以， $y=3$,

所以， $y^x = 3^2 = 9$,

故 y^x 的立方根为 $\sqrt[3]{9}$,

故答案为： $\sqrt[3]{9}$.

12. 若 $\sqrt[3]{a} = 2.29$, $\sqrt[3]{ab} = 229$, 则 b 的值为_____.

【答案】 1000000

【解析】

【分析】 本题考查了立方根的性质，熟练掌握立方根的性质是解题的关键.

根据立方根的性质，由 $\sqrt[3]{a} = 2.29$ 可得 $a = 2.29^3$ ，由 $\sqrt[3]{ab} = 229$ 可得 $ab = 229^3$ ，然后通过代数运算求 b 的值.

【详解】 解： $\because \sqrt[3]{a} = 2.29$,

$\therefore a = 2.29^3$.

$\because \sqrt[3]{ab} = 229$,

$\therefore ab = 229^3$.

$\therefore \frac{ab}{a} = \frac{229^3}{2.29^3} = \left(\frac{229}{2.29}\right)^3 = 100^3 = 1000000$.

$\therefore b = 1000000$.

故答案为： 1000000.

13. 已知 $(x^2 + y^2 + 1)(x^2 + y^2 + 2) = 6$, 则 $x^2 + y^2$ 的值为_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】此题考查了换元法解一元二次方程，设 $t = x^2 + y^2$ ，原方程变形为 $t^2 + 3t - 4 = 0$ ，然后利用因式分解法解得 $t_1 = 1$ ， $t_2 = -4$ ，进而求解即可.

【详解】设 $t = x^2 + y^2$

$$\because (x^2 + y^2 + 1)(x^2 + y^2 + 2) = 6$$

$$\therefore (t + 1)(t + 2) = 6$$

$$\therefore t^2 + 2t + t + 2 - 6 = 0$$

$$\therefore t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$\therefore (t - 1)(t + 4) = 0$$

$$\therefore t - 1 = 0 \text{ 或 } t + 4 = 0$$

$$\therefore t_1 = 1, t_2 = -4$$

$$\because t = x^2 + y^2 \geq 0$$

$$\therefore t_2 = -4 \text{ 应舍去}$$

$$\therefore t = 1$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 1.$$

故答案为：1.

14. 若 a 是方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的根，则代数式 $2025 + a^2 + \frac{1}{a^2}$ 的值是_____.

【答案】2028

【解析】

【分析】本题考查代数式求值，涉及方程根的定义、整体代入法求代数式值、分式的混合运算等知识，根据题中所给代数式的结构特征，结合已知条件，恒等变形代值求解即可得到答案，熟练掌握分式混合运算法则化简求值是解决问题的关键.

【详解】解： $\because a$ 是方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的根，

$$\therefore a^2 + a - 1 = 0, \text{ 即 } a^2 = 1 - a,$$

$$\therefore 2025 + a^2 + \frac{1}{a^2}$$

$$= 2025 + (1-a) + \frac{1}{1-a}$$

$$= 2025 + \frac{(1-a)^2}{1-a} + \frac{1}{1-a}$$

$$= 2025 + \frac{a^2 - 2a + 2}{1-a}$$

$$= 2025 + \frac{(1-a) - 2a + 2}{1-a}$$

$$= 2025 + \frac{3(1-a)}{1-a}$$

$$= 2025 + 3$$

$$= 2028,$$

故答案为：2028.

15. 二次三项式在实数范围内因式分解： $2x^2 - 3xy - y^2 =$ _____.

【答案】 $2\left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4}y\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4}y\right)$

【解析】

【分析】此题主要考查了实数范围内分解因式，正确解方程是解题关键.

首先解关于 x 的方程，进而分解因式得出即可.

【详解】解：当 $2x^2 - 3xy - y^2 = 0$ 时，

$$\text{解得： } x_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{4}y, x_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{4}y,$$

$$\text{则 } 2x^2 - 3xy - y^2 = 2\left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4}y\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4}y\right).$$

$$\text{故答案为： } 2\left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4}y\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4}y\right).$$

16. 已知 ABC 为等腰三角形，它的两条边的长度分别是方程 $2x^2 - 7x + 5 = 0$ 的两个根，那么该三角形的周长是_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】先求得 $2x^2 - 7x + 5 = 0$ 的两个根 $x_1 = 1, x_2 = \frac{5}{2}$ ，根据等腰三角形分类计算即可.

【详解】 $\because 2x^2 - 7x + 5 = 0$,

$$\therefore (2x - 5)(x - 1) = 0$$

$$\text{解得 } x_1 = 1, x_2 = \frac{5}{2},$$

$\therefore ABC$ 为等腰三角形三边长为 $\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1$ 或 $\frac{5}{2}, 1, 1$ (不存在, 因 $1 + 1 < \frac{5}{2}$, 故舍去),

$\therefore ABC$ 为等腰三角形周长为 $\frac{5}{2} + \frac{5}{2} + 1 = 6$,

故答案为: 6.

【点睛】本题考查了一元二次方程的解法, 等腰三角形的性质, 三角形的存在性, 熟练掌握解方程, 等腰三角形的分类是解题的关键.

17. 不等式 $x - 1 > \sqrt{2}x$ 的解集是_____.

【答案】 $x < -1 - \sqrt{2}$

【解析】

【分析】本题考查解一元一次不等式, 分母有理化等. 根据题意先移项, 后分母有理化即可得到本题答案.

【详解】解: $x - 1 > \sqrt{2}x$,

移项得: $x - \sqrt{2}x > 1$,

整理得: $(1 - \sqrt{2})x > 1$,

$$\because 1 - \sqrt{2} < 0,$$

$$\therefore x < \frac{1}{1 - \sqrt{2}}, \text{ 即: } x < \frac{1 + \sqrt{2}}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})},$$

$$\therefore x < -1 - \sqrt{2}$$

故答案为: $x < -1 - \sqrt{2}$.

18. 对于实数 a, b , 定义 $\min[a, b]$ 的含义为: 当 $a < b$ 时, $\min[a, b] = a$, 当 $a > b$ 时, $\min[a, b] = b$,

例如: $\min[1, -2] = -2$, 已知 $\min[\sqrt{15}, x] = x$, $\min[\sqrt{15}, y] = \sqrt{15}$, 且 x 和 y 为两个连续正整数, 则

$x-y$ 的值为_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题主要考查用新定义解决数学问题及实数的运算，正确理解新定义是求解本题的关键. 根据 $\sqrt{15}$ 的范围，求出 x 和 y 的值，然后代入即可求解.

【详解】 解： $\because \min[\sqrt{15}, x] = x, \min[\sqrt{15}, y] = \sqrt{15},$

$$\therefore x < \sqrt{15} < y,$$

$$\because x \text{ 和 } y \text{ 为两个连续正整数, } \sqrt{9} < \sqrt{15} < \sqrt{16}, \text{ 即 } 3 < \sqrt{15} < 4,$$

$$\therefore x = 3, y = 4,$$

$$\therefore x - y = 3 - 4 = -1.$$

故答案为： -1 .

三、计算题

19. 计算：

$$(1) \sqrt{18} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{32}$$

$$(2) 6\sqrt{ab^3} \div \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \times \sqrt{\frac{a^2}{b}} \quad (a > 0, b > 0)$$

$$(3) \left(\sqrt{24} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \times \sqrt{3} - (3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}).$$

【答案】 (1) $6\sqrt{2}$

$$(2) -4\sqrt{b}$$

$$(3) 5\sqrt{2} - 1$$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算，解题关键是掌握上述知识点并能熟练运用求解.

(1) 先利用二次根式的性质化简各部分，再计算乘法，最后计算加减；

(2) 先利用二次根式的性质化简各部分，再计算乘除；

(3) 前面用分配律计算，后面用平方差公式计算，再利用二次根式的性质化简，最后得出结果.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: } & \sqrt{18} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{32} \\ &= 3\sqrt{2} - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 4\sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{2} - \sqrt{2} + 4\sqrt{2} \\ &= 6\sqrt{2};\end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}& 6\sqrt{ab^3} \div \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \times \sqrt{\frac{a^2}{b}} \quad (a > 0, b > 0) \\ &= 6b\sqrt{ab} \div \left(-\frac{3}{2}a\sqrt{ab}\right) \times \frac{a\sqrt{b}}{b} \\ &= \frac{6b\sqrt{ab}}{-\frac{3}{2}a\sqrt{ab}} \times \frac{a\sqrt{b}}{b} \\ &= -4\sqrt{b};\end{aligned}$$

【小问 3 详解】

$$\begin{aligned}& \left(\sqrt{24} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \times \sqrt{3} - (3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) \\ &= \sqrt{72} - \sqrt{2} - (9 - 8) \\ &= 6\sqrt{2} - \sqrt{2} - 1 \\ &= 5\sqrt{2} - 1.\end{aligned}$$

20. 化简求值: 已知 $a = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$, 求 $\left[\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - (\sqrt{b}-\sqrt{a})\right] \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})$ 的值.

【答案】 $2a + 2\sqrt{ab}$; $2\sqrt{2} + 4$

【解析】

【分析】 先根据二次根式的运算法则化简, 再代入 a,b 即可求解.

$$\begin{aligned}
& \text{【详解】} \left[\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - (\sqrt{b}-\sqrt{a}) \right] \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b}) \\
&= \left[\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - (\sqrt{b}-\sqrt{a}) \right] \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b}) \\
&= \left[(\sqrt{a}+\sqrt{b}) - (\sqrt{b}-\sqrt{a}) \right] \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b}) \\
&= 2\sqrt{a} \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b}) \\
&= 2a + 2\sqrt{ab} \\
&\because a = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1, b = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 \\
&\therefore \text{原式} = 2(\sqrt{2}+1) + 2\sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} \\
&= 2\sqrt{2} + 2 + 2 \\
&= 2\sqrt{2} + 4.
\end{aligned}$$

【点睛】此题主要考查二次根式的运算，解题的关键是熟知其运算法则.

21. 用适当的方法解下列一元二次方程.

(1) $2x^2 + 3x - 1 = 0$ (配方法)

(2) $(x-10)(x-3) = 8$

(3) $3(x-1)^2 = x^2 - 1$

【答案】(1) $x_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$, $x_2 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}$;

(2) $x_1 = 11$, $x_2 = 2$;

(3) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

【解析】

【分析】本题考查了解一元二次方程，掌握解一元二次方程的解法是解题的关键.

(1) 用配方法求解即可；

(2) 将方程展开整理成一般式后，用因式分解法求解即可；

(3) 直接用因式分解法求解即可.

【小问 1 详解】

解: $2x^2 + 3x - 1 = 0$,

$$\therefore 2x^2 + 3x = 1,$$

$$\therefore x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{1}{2},$$

$$\therefore x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2,$$

$$\therefore \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{17}{16},$$

$$\therefore x + \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{17}}{4} \text{ 或 } x + \frac{3}{4} = -\frac{\sqrt{17}}{4}$$

解得: $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$, $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$;

【小问 2 详解】

解: $(x-10)(x-3) = 8$,

$$\therefore x^2 - 10x - 3x + 30 = 8,$$

整理得: $x^2 - 13x + 22 = 0$

$$\therefore (x-11)(x-2) = 0,$$

$$\therefore x-11=0 \text{ 或 } x-2=0,$$

解得: $x_1 = 11$, $x_2 = 2$;

【小问 3 详解】

解: $3(x-1)^2 = x^2 - 1$,

$$\therefore 3(x^2 - 2x + 1) = x^2 - 1,$$

整理得: $x^2 - 3x + 2 = 0$,

$$\therefore (x-1)(x-2) = 0,$$

解得: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

四、解答题

22. (1) 已知 $5a+2$ 的立方根是 3, $3a+b-1$ 的算术平方根是 4, c 是 $\sqrt{13}$ 的整数部分, 求 $3a-b+c$ 的平方根.

(2) 一个正数 x 的平方根分别是 $2a-5$ 和 $2a+1$, 求正数 x .

【答案】(1) ± 4 ; (2) 9

【解析】

【分析】本题考查了平方根和立方根的综合, 熟练掌握相关定义列出方程是解题的关键.

(1) 根据立方根和算术平方根的性质求出 a, b 的值, 再估算出 $\sqrt{13}$ 的大小, 可得 c 的值, 即可求解.

(2) 根据平方根的性质可得 $2a-5+2a+1=0$, 求出 a 的值, 即可.

【详解】解: (1) $\because 5a+2$ 的立方根是 3,

$$\therefore 5a+2=27,$$

解得 $a=5$,

又 $\because 3a+b-1$ 的算术平方根是 4,

$$\therefore 3a+b-1=16,$$

$$\therefore a=5,$$

解得: $b=2$,

$\because c$ 是 $\sqrt{13}$ 的整数部分, 而 $3 < \sqrt{13} < 4$,

$$\therefore c=3,$$

$$\therefore 3a-b+c=16,$$

$\therefore 3a-b+c$ 的平方根是 ± 4 ;

(2) $\because$ 正数 x 的平方根分别是 $2a-5$ 和 $2a+1$,

$$\therefore 2a-5+2a+1=0,$$

解得: $a=1$,

$$\therefore \text{正数 } x = (2a-5)^2 = (-3)^2 = 9.$$

23. 像 $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$, $\sqrt{\sqrt{48}-\sqrt{45}}$, 这样的根式叫做复合二次根式. 有一些复合二次根式可以借助构造完全平方式进行化简, 如:

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3-2\sqrt{3}+1} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} \times 1 + 1^2} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1 \text{ 再如:}$$

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3+2\sqrt{6}+2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

请用上述方法探索并解决下列问题:

(1) 化简: $\sqrt{10+2\sqrt{21}}$;

(2) 化简: $\sqrt{14-8\sqrt{3}}$;

(3) 计算: $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{7-2\sqrt{12}} + \cdots + \sqrt{2023-2\sqrt{1023132}} + \sqrt{2025-2\sqrt{1012 \times 1013}}$.

【答案】(1) $\sqrt{3} + \sqrt{7}$

(2) $2\sqrt{2} - \sqrt{6}$

(3) $\sqrt{1013} - 1$

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式，利用二次根式的性质进行化简，熟练掌握完全平方公式，利用二次根式的性质是解题的关键.

(1) 利用题中复合二次根式借助构造完全平方式的新方法求解;

(2) 利用题中复合二次根式借助构造完全平方式的新方法求解;

(3) 根据题意找出规律进行求解即可.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: } & \sqrt{10+2\sqrt{21}} \\ &= \sqrt{3+2\sqrt{21}+7} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} \times \sqrt{7} + (\sqrt{7})^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{7})^2} \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{7};\end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: } & \sqrt{14-8\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{14-2\sqrt{48}} \\ &= \sqrt{8-2\sqrt{48}+6} \\ &= \sqrt{(\sqrt{8})^2 - 2\sqrt{8} \times \sqrt{6} + (\sqrt{6})^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{8} - \sqrt{6})^2} \\ &= 2\sqrt{2} - \sqrt{6};\end{aligned}$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: } \because \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1,$$

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}-\sqrt{2},$$

$$\sqrt{7-2\sqrt{12}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2-\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{对第 } n \text{ 项, 形式可表示为 } \sqrt{(2n+1)-2\sqrt{n(n+1)}},$$

$$\therefore \text{可化简为 } \sqrt{(2n+1)-2\sqrt{n(n+1)}} = \sqrt{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$$\text{式中最后一项为 } \sqrt{2025-2\sqrt{1012 \times 1013}},$$

$$\because 2025 = 2 \times 1012 + 1,$$

$$\therefore n = 1012,$$

$\therefore$ 最后一项化简为:

$$\begin{aligned} & \sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{7-2\sqrt{12}} + \cdots + \sqrt{2023-2\sqrt{1023 \times 1024}} + \sqrt{2025-2\sqrt{1012 \times 1013}} \\ &= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{1012}-\sqrt{1011}) + (\sqrt{1013}-\sqrt{1012}) \\ &= \sqrt{1013}-1. \end{aligned}$$

24. 商场销售一批衬衫, 平均每天可销售 20 件, 每件盈利 40 元. 为了扩大销售, 增加盈利, 商场决定采取适当的降价措施. 经调查发现, 如果每件衬衫每降价 5 元, 商场平均每天可多售出 10 件.

(1) 若商场平均每天要盈利 1250 元, 每件衬衫应降价多少元?

(2) 要使商场平均每天盈利 1400 元, 可能吗? 请说明理由.

【答案】(1) 15 元 (2) 不可能; 理由见解析

【解析】

【分析】此题主要考查了一元二次方程的应用和根的判别式, 利用基本数量关系: 平均每天售出的件数 $\times$ 每件盈利 = 每天销售的利润是解题关键.

(1) 利用衬衣每件盈利 $\times$ 平均每天售出的件数 = 每天销售这种衬衣利润, 列出方程解答即可.

(2) 同样列出方程, 若方程有实数根则可以, 否则不可以.

【小问 1 详解】

解: 设每件衬衫应降价 x 元.

$$\text{根据题意, 得: } (40-x) \left(20 + \frac{x}{5} \times 10 \right) = 1250,$$

整理, 得: $x^2 - 30x + 225 = 0$,

解得 $x_1 = x_2 = 15$,

答: 每件衬衫应降价 15 元.

【小问 2 详解】

解: 不可能. 理由如下:

设每件衬衫应降价 x 元,

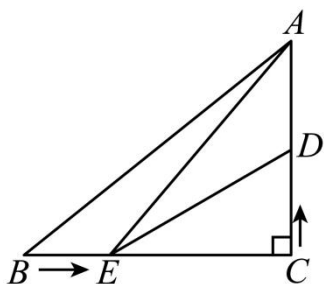
$$(40 - x) \left(20 + \frac{x}{5} \times 10 \right) = 1400,$$

整理得 $x^2 - 30x + 300 = 0$,

$\because \Delta = 900 - 4 \times 300 < 0$, 方程无实数根.

$\therefore$ 商场平均每天不可能盈利 1400 元.

25. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$, 点 D 从点 C 开始沿边 CA 运动, 速度为 1cm/s . 与此同时, 点 E 从点 B 开始沿边 BC 运动, 速度为 2cm/s . 当点 E 到达点 C 时, 点 D, E 同时停止运动. 连接 AE, DE , 设运动时间为 ts , $\triangle ADE$ 的面积为 $S\text{cm}^2$.



(1) 用含 t 的代数式表示: $CD = \underline{\hspace{2cm}}\text{cm}$, $CE = \underline{\hspace{2cm}}\text{cm}$;

(2) 当 CD 为何值时 $S = \frac{5}{8} S_{\triangle ABC}$?

【答案】(1) t ; $(8 - 2t)$

(2) $CD = 1$

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程的应用、列代数式, 理解题意, 正确列方程是解答的关键.

(1) 根据题意以及路程、速度和时间的关系求解即可;

(2) 利用三角形的面积公式列方程求解即可.

【小问 1 详解】

解：根据题意， $CD = t\text{cm}$ ， $BE = 2t\text{cm}$ ，

$$\therefore CE = BC - BE = (8 - 2t)\text{cm} ,$$

故答案为： t ， $(8 - 2t)$ ；

【小问 2 详解】

$$\text{解：} \because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24 ,$$

$$\therefore S = \frac{5}{8} S_{\triangle ABC} = 15 ,$$

$$\therefore \frac{1}{2} (6 - t)(8 - 2t) = 15 ,$$

$$\therefore t^2 - 10t + 9 = 0 ,$$

$$\therefore t = 1 \text{ 或 } t = 9$$

$$\because 0 \leq t \leq 4 ,$$

$$\therefore t = 1 ,$$

$$\therefore CD = 1 .$$