

2025-2026 学年八年级数学上学期期中模拟卷

提升卷·考试版

(考试时间: 100 分钟 试卷满分: 150 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。
4. 测试范围: 沪教版 2024 五四制八年级上册第 19 章 19.1~21 章 21.2。

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 共 24 分. 下列各题四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题卡的相应位置上.)

1. 下列方程是一元二次方程的是 ()

A. $ax^2 + bx + c = 0$ B. $x^2 - y + 1 = 0$ C. $x^2 - \frac{1}{x} - 2 = 0$ D. $(x-1)(x-2) = 0$

【答案】D

【分析】本题考查了一元二次方程的定义, 能熟记一元二次方程的定义是解此题的关键, 注意: 只含有一个未知数, 并且所含未知数的项的最高次数是 2 的整式方程, 叫一元二次方程. 根据一元二次方程的定义逐一判断即可求解.

【详解】解: A、当 $a = 0$ 时, 原方程化为: $bx + c = 0$, 则不是一元二次方程, 故本选项不符合题意;

B、 $x^2 - y + 1 = 0$, 有两个未知数, 则不是一元二次方程, 故本选项不符合题意;

C、 $x^2 - \frac{1}{x} - 2 = 0$, 不是整式方程, 则不是一元二次方程, 故本选项不符合题意;

D、 $(x-1)(x-2) = 0$, 是一元二次方程, 故本选项符合题意;

故选: D.

2. 下列二次根式中, 是最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{12a}$ B. $\sqrt{\frac{a}{3}}$ C. $\sqrt{a^2 + b^2}$ D. $\sqrt{a^2 b}$

【答案】C

【分析】根据最简二次根式的定义即二次根式化简后, 被开方数不含分母, 并且被开方数中所有因式的幂的指数小于 2, 判断即可.

本题考查了最简二次根式，熟练掌握定义是解题的关键.

【详解】解：A. $\sqrt{12a} = 2\sqrt{3a}$ ，不符合题意；

B. $\sqrt{\frac{a}{3}} = \frac{\sqrt{3a}}{3}$ ，不符合题意；

C. $\sqrt{a^2 + b^2}$ ，符合题意；

D. $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$ ，不符合题意；

故选：C.

3. 下列说法中结论正确的是（ ）

A. 所有无限小数都是无理数

B. 实数和数轴上的点都是一一对应的

C. $\sqrt{10}$ 可以表示面积为 100 的正方形的边长

D. 两个无理数的和都是无理数

【答案】B

【分析】本题主要考查无理数的概念、算术平方根、平方根及实数与数轴，熟练掌握各个概念是解题的关键；因此此题可根据无理数的概念、算术平方根、平方根及实数与数轴进行排除选项.

【详解】解：A、无限小数包括无限循环小数和无限不循环小数，其中无限循环小数是有理数，只有无限不循环小数才是无理数，故 A 不正确；

B、根据实数与数轴的关系，每一个实数都对应数轴上唯一的一个点，反之数轴上的每一个点都对应唯一的一个实数，因此实数和数轴上的点一一对应，故 B 正确；

C、 $\sqrt{10}$ 可以表示面积为 10 的正方形的边长，故 C 不正确；

D、两个无理数的和可能为有理数，例如 $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ （有理数），因此“都是无理数”的结论不成立，故 D 不正确；

故选：B.

4. 下列运算中正确的是（ ）

A. $\sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{8}$

B. $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$

C. $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x + y$

D. $3\sqrt{5a} + 2\sqrt{5a} = 5\sqrt{5a}$

【答案】D

【分析】直接利用二次根式的混合运算法则以及二次根式的加减运算法则分别计算得出答案.

【详解】解：A、 $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ ，无法合并，故此选项不合题意；

B、 $\sqrt{x^2+y^2}$ 无法化简，故此选项不合题意；

C、 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=x+y+2\sqrt{xy}$ ，故此选项不合题意；

D、 $3\sqrt{5a}+2\sqrt{5a}=5\sqrt{5a}$ ，故此选项符合题意；

故选：D.

【点睛】此题主要考查了二次根式的混合运算以及二次根式的加减运算，正确掌握相关运算法则是解题关键.

5. 下列选项中，正确的是（ ）

A. $|\sqrt{2}-1|=1-\sqrt{2}$

B. 25 的平方根是 5

C. -27 的立方根是 -3

D. 立方根等于本身的数有 -1, 1

【答案】C

【分析】本题主要考查了算术平方根，平方根，立方根等内容，解题的关键是熟练掌握以上定义.

利用求一个数的算术平方根，平方根，立方根的运算法则，进行逐项判断即可.

【详解】解：A. $|\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}-1$ ，该选项错误，不符合题意；

B. 25 的平方根是 ± 5 ，该选项错误，不符合题意；

C. $\because (-3)^3=-27$,

$\therefore \sqrt[3]{-27}=-3$ ，所以该选项正确，符合题意；

D. 立方根等于本身的数还有 0，该选项错误，不符合题意.

故选：C.

6. 定义：若两个一元二次方程有且只有一个相同的实数根，我们就称这两个方程为“同伴方程”. 例如 $x^2=4$

和 $(x-2)(x+3)=0$ 有且仅有一个相同的实数根 $x=2$. 所以这两个方程为“同伴方程”，若关于 x 的方程

$ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 的参数同时满足 $a+b+c=0$ 和 $a-b+c=0$. 且该方程与 $(x+2)(x-n)=0$ 互为“同伴方程”，则 n 的值为（ ）

A. 1 或 -1

B. -1

C. 1

D. 2

【答案】A

【分析】由 $a+b+c=0$ 和 $a-b+c=0$ 可得关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 两个实数根为 $x_1=1, x_2=-1$,
由 $(x+2)(x-n)=0$, 可得 $(x+2)(x-n)=0$ 的根为 $x=-2$ 或 $x=n$, 根据 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 与
 $(x+2)(x-n)=0$ 互为“同伴方程”, 即得 $n=1$ 或 $n=-1$. 掌握“同伴方程”的定义是解题的关键.

【详解】解: $\because$ 同时满足 $a+b+c=0$ 和 $a-b+c=0$,

$\therefore$ 关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 两个实数根为 $x_1=1, x_2=-1$

$\therefore (x+2)(x-n)=0$,

$\therefore x+2=0$ 或 $x-n=0$,

$\therefore (x+2)(x-n)=0$ 的根为 $x=-2$ 或 $x=n$,

$\therefore ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 与 $(x+2)(x-n)=0$ 互为“同伴方程”,

$\therefore n=1$ 或 $n=-1$.

故答案为: 1 或 -1.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 共 48 分.)

7. 下列实数: ①-2, ②0.3, ③ $\frac{22}{7}$, ④ $\sqrt{2}$, ⑤ $-\pi$, ⑥ $-\sqrt{64}$ 中, 属于无理数的是_____ (填序号).

【答案】④⑤/⑤④

【分析】本题考查实数的知识, 无理数的定义: 无限不循环的小数; 有理数的定义: 除无理数之外的数都是有理数, 根据无理数和有理数的定义, 进行解答, 即可.

【详解】 $\because -2, 0.3, \frac{22}{7}, -\sqrt{64}=-8$ 是有理数, $\sqrt{2}, -\pi$ 是无理数,

故答案为: ④⑤.

8. 写出 $\sqrt{2a-b}$ 的一个有理化因式_____.

【答案】 $\sqrt{2a-b}$

【分析】本题主要考查分母有理化的方法, 分母有理化常常是乘二次根式本身 (分母只有一项) 或与原分母组成平方差公式. 根据二次根式的性质, 求解即可.

【详解】解: $\because (\sqrt{2a-b}) \times (\sqrt{2a-b}) = 2a-b$,

$\therefore \sqrt{2a-b}$ 的一个有理化因式为 $\sqrt{2a-b}$,

故答案为: $\sqrt{2a-b}$ (答案不唯一)

9. 计算: $(3-\sqrt{3})\div\sqrt{3} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{3}-1/-1+\sqrt{3}$

【分析】 本题考查了二次根式的除法运算, 根据除法法则计算即可.

【详解】 解: $(3-\sqrt{3})\div\sqrt{3} = 3\div\sqrt{3} - \sqrt{3}\div\sqrt{3} = \sqrt{3}-1$.

故答案为: $\sqrt{3}-1$.

10. 分母有理化: $\frac{1}{-2+\sqrt{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-2-\sqrt{3}$

【分析】 本题考查分母有理化, 根据二次根式的性质, 分数的基本性质, 利用平方差公式进行分母有理化, 将分子分母同时乘以 $-2-\sqrt{3}$, 即可求解.

【详解】 解: $\frac{1}{-2+\sqrt{3}} = \frac{-2-\sqrt{3}}{(-2+\sqrt{3})(-2-\sqrt{3})} = \frac{-2-\sqrt{3}}{4-3} = -2-\sqrt{3}$.

故答案为: $-2-\sqrt{3}$.

11. $x^2 - \sqrt{5}x + \frac{5}{4} = 0$ 的根为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程, 根据方程左边正好是一个完全平方式, 利用直接开平方的方法解方程即可.

【详解】 解: $\because x^2 - \sqrt{5}x + \frac{5}{4} = 0$,

$$\therefore \left(x - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 0,$$

解得 $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$,

故答案为: $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

12. 解不等式: $2x-3 < \sqrt{3}x$ 的解集是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x < 6+3\sqrt{3} / x < 3\sqrt{3}+6$

【分析】 本题考查了解一元一次不等式, 涉及到了二次根式的除法运算与化简, 解题关键是掌握运算法则.

【详解】解： $2x - 3 < \sqrt{3}x$,

$$2x - \sqrt{3}x < 3,$$

$$(2 - \sqrt{3})x < 3,$$

$$x < 6 + 3\sqrt{3},$$

故答案为： $x < 6 + 3\sqrt{3}$.

13. 一个三角形的两边长分别为 3 和 6，第三边是方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 的一个根，则这个三角形的周长是_____.

【答案】 13

【分析】 本题考查了解一元二次方程，三角形三边关系. 先解一元二次方程，再根据三角形三边关系确定第三边的长，进而即可求解.

【详解】解： $x^2 - 6x + 8 = 0$,

$$\therefore (x - 2)(x - 4) = 0,$$

解得： $x_1 = 4$, $x_2 = 2$,

当 $x = 4$ 时，三边为 3, 4, 6，能组成三角形，

$\therefore$ 这个三角形的周长为 $3 + 6 + 4 = 13$;

当 $x = 2$ 时，三边为 2, 3, 6，不能组成三角形.

故答案为： 13.

14. 若 m 是方程 $x^2 - 2x - 4 = 0$ 的一个根，则代数式 $2025 + 2m^2 - 4m$ 的值为_____.

【答案】 2033

【分析】 本题主要考查了一元二次方程解的定义，代数式求值，根据一元二次方程解是使方程左右两边相等的未知数的值得到 $m^2 - 2m - 4 = 0$ ，即 $m^2 - 2m = 4$ ，再根据 $2025 + 2m^2 - 4m = 2025 + 2(m^2 - 2m)$ 进行求解即可.

【详解】解： $\because m$ 是方程 $x^2 - 2x - 4 = 0$ 的一个根，

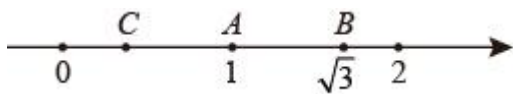
$$\therefore m^2 - 2m - 4 = 0,$$

$$\therefore m^2 - 2m = 4,$$

$$\therefore 2025 + 2m^2 - 4m = 2025 + 2(m^2 - 2m) = 2025 + 2 \times 4 = 2033,$$

故答案为： 2033.

15. 如图，数轴上表示 1 、 $\sqrt{3}$ 的对应点分别为点 A 、点 B 。若点 C 是点 B 关于点 A 的对称点，则点 C 所表示的数为_____。



【答案】 $2 - \sqrt{3}$

【分析】 根据数轴上两点之间线段的长度可得出 AB 的长度，再由对称即可得出点 C 所表示的数。

【详解】 解：∵ 数轴上表示 1 、 $\sqrt{3}$ 的对应点分别为点 A ，点 B 。

$$\therefore AB = \sqrt{3} - 1,$$

∵ 点 B 关于点 A 的对称点为点 C ，

$$\therefore BC = 2\sqrt{3} - 2,$$

∴ 点 C 所表示的数为 $2 - \sqrt{3}$ 。

故答案为 $2 - \sqrt{3}$ 。

【点睛】 本题考查了实数与数轴，数轴上的点与实数是一一对应的关系。

16. 根据你发现的规律填空：已知 $\sqrt[3]{3} \approx 1.442$ ， $\sqrt[3]{3000} \approx 14.42$ ，若 $\sqrt[3]{0.000456} \approx 0.07696$ ，则 $\sqrt[3]{456} \approx$ _____

【答案】 7.696

【分析】 本题主要考查的是立方根的性质，熟练掌握被开方数小数点与对应的立方根小数点移动规律是解题的关键。

依据被开方数小数点向左或向右移动 3 位，对应的立方根的小数点向左或向右移动 1 位求解即可。

【详解】 解：∵ $\sqrt[3]{3} \approx 1.442$ ， $\sqrt[3]{3000} \approx 14.42$ ， $\sqrt[3]{0.000456} \approx 0.07696$ ，

$$\therefore \sqrt[3]{456} \approx 7.696,$$

故答案为：7.696。

17. 已知一个正方体的体积是 1000cm^3 ，现在要在它的 8 个角上分别截去 1 个大小相同的小正方体，截去后余下部分的体积 488cm^3 ，则截去的每小正方体的棱长是_____cm。

【答案】 4

【分析】 此题主要考查了立方根的应用，设截得的每个小正方体的棱长 $x\text{cm}$ ，根据已知条件可以列出方程，解方程即可求解。

【详解】 解：设截去的每个小正方体的棱长是 $x\text{cm}$ ，则

$$\text{由题意得 } 1000 - 8x^3 = 488,$$

解得 $x = 4$.

答：截去的每个小正方体的棱长是 4cm .

故答案为：4.

18. 已知 $\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$ 的值大于 $\frac{22}{23}$, 小于 $\frac{23}{24}$, 则正整数 n 的最大值与最小值的差等于_____.

【答案】 45

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算，分母有理化，先把原式化简 $= 1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$, 得 $1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} > \frac{22}{23}$, $1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} < \frac{23}{24}$, 再次化简得 $(n+1)(n+1-529) > 0$, $(n+1)(n+1-576) < 0$, 由正整数 $n+1 > 0$, 得 $n+1-529 > 0$, $n+1-576 < 0$, 再按题意计算即可.

【详解】 解： $\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$

$$= \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$$
$$= \frac{2-\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} + \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})} + \cdots + \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{[(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}][(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}]}$$
$$= \frac{2-\sqrt{2}}{4-2} + \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{18-12} + \cdots + \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)^2-n^2(n+1)}$$
$$= \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6} + \cdots + \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}$$
$$= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \cdots + \frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$$
$$= 1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$$

$\therefore \frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$ 的值大于 $\frac{22}{23}$, 小于 $\frac{23}{24}$,

$$\therefore 1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} > \frac{22}{23} , \quad 1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} < \frac{23}{24} ,$$
$$\therefore 23(n+1) - 23\sqrt{n+1} > 22(n+1) , \quad 24(n+1) - 24\sqrt{n+1} < 23(n+1) ,$$
$$\therefore n+1 > 23\sqrt{n+1} , \quad n+1 < 24\sqrt{n+1} ,$$

$\therefore (n+1)^2 > 529(n+1), (n+1)^2 < 576(n+1),$
 $\therefore (n+1)^2 - 529(n+1) > 0, (n+1)^2 - 576(n+1) < 0,$
 $\therefore (n+1)(n+1-529) > 0, (n+1)(n+1-576) < 0,$
 $\therefore$ 正整数 $n+1 > 0,$
 $\therefore n+1-529 > 0, n+1-576 < 0,$
 $\therefore 528 < n < 575,$
 $\therefore$ 正整数 n 最大为 574, 正整数最小为 529,
 $\therefore$ 正整数 n 的最大值与最小值的差等于 $574-529=45,$
 故答案为: 45.

三、解答题: (本大题共 11 题, 共 78 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

19. 计算:

(1) $\frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{4}\sqrt{3};$

(2) $5\sqrt{7} \times \sqrt{3} \div 2\sqrt{7} \div \sqrt{3};$

(3) $\sqrt[3]{-0.027} - \sqrt[3]{0.064} + \frac{2}{3} \times \sqrt{\frac{9}{100}};$

(4) $(\sqrt{3}+2) \times \sqrt{3} - \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{7})^2}.$

【答案】(1) $3\sqrt{3}$

(2) $\frac{5}{2}$

(3) -0.5

(4) $2\sqrt{3}-1$

【分析】 本题考查二次根式的混合运算, 算术平方根及立方根, 熟练掌握二次根式的性质及运算法则是解题的关键.

- (1) 先根据加法交换律进行计算, 然后合并同类二次根式即可;
- (2) 根据二次根式的乘除运算法则进行计算即可;
- (3) 先计算算术平方根及立方根, 再进行有理数计算;
- (4) 先利用乘法分配律和二次根式的性质化简, 再进行加减运算即可.

【详解】(1) 原式 $= \frac{5}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4}\sqrt{3}$

$$= 2\sqrt{3} + \sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{3};$$

(2) 原式 $= 5\sqrt{21} \div 2\sqrt{7} \div \sqrt{3}$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{3} \div \sqrt{3}$$

$$= \frac{5}{2};$$

(3) 原式 $= \sqrt[3]{-0.027} - \sqrt[3]{0.064} + \frac{2}{3} \times \sqrt{0.09}$

$$= -0.3 - 0.4 + \frac{2}{3} \times 0.3$$

$$= -0.3 - 0.4 + 0.2$$

$$= -0.5;$$

(4) 原式 $= 3 + 2\sqrt{3} - \sqrt{9+7}$

$$= 3 + 2\sqrt{3} - 4$$

$$= 2\sqrt{3} - 1.$$

20. 化简:

(1) $4\sqrt{xy^2} \times \sqrt{\frac{x}{y^3}} \div 10\sqrt{\frac{y}{x^2}}$

(2) $\frac{xy - \sqrt{xy}}{\sqrt{xy} - 1} \div \frac{\sqrt{y} - 2\sqrt{x}}{4x - 4\sqrt{xy} + y}$

【答案】(1) $\frac{2x^2}{5y}$

(2) $y\sqrt{x} - 2x\sqrt{y}$

【分析】本题考查了二次根式的运算，解题的关键是：

(1) 根据二次根式的乘除混合运算法则计算即可；

(2) 把各式子的分子、分母进行因式分解，然后把除法转换为乘法，再进行约分，最后根据二次根式的乘法、二次根式的性质化简计算即可。

【详解】 (1) 解: $4\sqrt{xy^2} \times \sqrt{\frac{x}{y^3}} \div 10\sqrt{\frac{y}{x^2}}$

$$= (4 \times 1 \div 10) \cdot \sqrt{xy^2 \times \frac{x}{y^3} \div \frac{y}{x^2}}$$

$$= \frac{2}{5} \sqrt{\frac{x^4}{y^2}}$$

$$= \frac{2x^2}{5y};$$

(2) 解: $\frac{xy - \sqrt{xy}}{\sqrt{xy} - 1} \div \frac{\sqrt{y} - 2\sqrt{x}}{4x - 4\sqrt{xy} + y}$

$$= \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{xy} - 1)}{\sqrt{xy} - 1} \div \frac{\sqrt{y} - 2\sqrt{x}}{(2\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}$$

$$= \sqrt{xy} \times \frac{(2\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{\sqrt{y} - 2\sqrt{x}}$$

$$= \sqrt{xy} \times (\sqrt{y} - 2\sqrt{x})$$

$$= y\sqrt{x} - 2x\sqrt{y}.$$

21. 计算: $(\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{5} + \sqrt{3})$

【答案】 $-2 + 2\sqrt{15}$

【分析】 本题考查二次根式的混合运算，先根据平方差公式进行计算，再利用完全平方公式进行计算，然后合并同类二次根式即可。

【详解】 解: 原式 $= (\sqrt{6} + \sqrt{5} - \sqrt{3})[\sqrt{6} - (\sqrt{5} - \sqrt{3})]$

$$= 6 - (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$$

$$= 6 - 8 + 2\sqrt{15}$$

$$= -2 + 2\sqrt{15}.$$

22. 用适当的方法解下列方程

(1) $4(x-1)^2 - 36 = 0;$

(2) $x^2 - 4x - 3 = 0;$

$$(3) 2x^2 + 1 = 3x ;$$

$$(4) 3x(x-2) = 10 - 5x .$$

【答案】 (1) $x_1 = 4, x_2 = -2$

(2) $x_1 = 2 + \sqrt{7}, x_2 = 2 - \sqrt{7} .$

(3) $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}$

(4) $x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = 2$

【分析】 本题考查解一元二次方程，掌握运用各种方法解方程是解题的关键.

(1) 根据直接开方法解一元二次方程即可；

(2) 根据配方法解一元二次方程即可；

(3) 根据公式法解一元二次方程即可；

(4) 根据因式分解法解一元二次方程即可.

【详解】 (1) 解: $4(x-1)^2 - 36 = 0$

$$(x-1)^2 = 9 ,$$

$$x-1 = \pm 3 ,$$

$$x-1 = 3 \text{ 或 } x-1 = -3 ,$$

$$\therefore x_1 = 4, x_2 = -2 .$$

(2) 解: $x^2 - 4x - 3 = 0 ,$

$$x^2 - 4x = 3 ,$$

$$x^2 - 4x + 4 = 7 ,$$

$$(x-2)^2 = 7 ,$$

$$x-2 = \pm\sqrt{7} ,$$

$$x-2 = \sqrt{7} \text{ 或 } x-2 = -\sqrt{7} ,$$

$$\therefore x_1 = 2 + \sqrt{7}, x_2 = 2 - \sqrt{7} .$$

(3) 解: $2x^2 + 1 = 3x ,$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 ,$$

$$a = 2, b = -3, c = 1 ,$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 > 0,$$

方程有两个不相等的实数根,

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{3 \pm 1}{4},$$

$$\therefore x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}.$$

(4) 解: $3x(x-2) = 10 - 5x,$

$$3x(x-2) + 5x - 10 = 0,$$

$$3x(x-2) + 5(x-2) = 0,$$

$$(3x+5)(x-2) = 0,$$

$$3x+5=0, x-2=0,$$

$$\therefore x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = 2.$$

23. 已知一个正数的两个不同的平方根分别是 $2x-14$ 和 $x+2$, $y+1$ 的立方根为 -3 , m 是 $\sqrt{17}$ 的整数部分,

(1) 求 x 和 y 的值;

(2) 求 $x-y+m$ 的平方根.

【答案】(1) $x=4, y=-28$

(2) ± 6

【分析】本题考查平方根与立方根的应用和以及无理数的估算, 熟练掌握平方根和立方根的意义是解题的关键,

(1) 分别根据平方根的意义和立方根的运算即可得到答案;

(2) 先通过估算得到 m 的值, 再代入求得 $x-y+m$ 的值, 从而求得答案.

【详解】(1) 解: 由题意知 $2x-14$ 和 $x+2$ 互为相反数,

$$\therefore 2x-14+x+2=0,$$

解得: $x=4,$

$\therefore y+1$ 的立方根为 $-3,$

$$\therefore y+1 = (-3)^3,$$

解得: $y=-28;$

(2) 解: $\because \sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25},$

$$\therefore 4 < \sqrt{17} < 5,$$

$$\therefore \sqrt{17} \text{ 的整数部分 } m = 4,$$

$$\therefore x - y + m = 4 - (-28) + 4 = 36,$$

$$\therefore x - y + m \text{ 的平方根为 } \pm\sqrt{36} = \pm 6.$$

24. 已知实数 a 、 b 使等式 $(\sqrt{2a}-1)^2 + |b-2| = 0$ 成立，请化简代数式 $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-b} + 1 \div \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{b}}{a+\sqrt{a}}$ ，并求代数式的值.

【答案】 $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \frac{\sqrt{ab}}{b}; \frac{3\sqrt{2}+1}{2}$

【分析】 本题考查了非负数的性质，二次根式的混合运算，根据二次根式被开方数的非负性可得 a 、 b 的值，将所求式子化简后代入 a 、 b 的值进行计算即可.

【详解】解： $\because (\sqrt{2a}-1)^2 + |b-2| = 0$

$$\therefore \sqrt{2a}-1=0 \text{ 且 } b-2=0,$$

$$\therefore \sqrt{2a}=1, b=2,$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = 2,$$

$$\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-b} + 1 \div \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{b}}{a+\sqrt{a}}$$

$$= \frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-b} + \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}+\sqrt{b}}$$

$$= \frac{\sqrt{b}(a-b)}{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{b}(\sqrt{a}+1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$= \sqrt{a} + \sqrt{b} + \frac{\sqrt{ab}}{b}$$

当 $a = \frac{1}{2}, b = 2$ 时,

原式 $= \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \times 2}}{2}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}+1}{2}$$

25. 如图 1, 由 5 个边长为 1 的小正方形组成的长方形, 通过剪拼可以拼成一个正方形 $ABCD$.

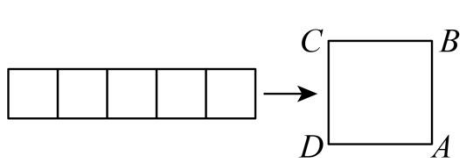


图 1

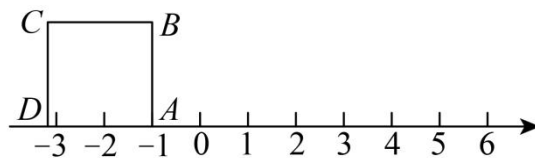


图 2

- (1) 求正方形 $ABCD$ 的边长, 并求出 AB 的长在哪两个连续整数之间;
- (2) 如图 2, 纸片上有数轴, 把图 1 中的正方形 $ABCD$ 放到数轴上, 使得点 A 与 -1 重合, 求点 D 在数轴上表示的数;
- (3) 在 (2) 的基础上以数 1 对应的点为折点, 将数轴向右对折, 则点 D 与数_____对应的点重合.

【答案】 (1) AB 的长 在 2 和 3 之间

(2) $-1-\sqrt{5}$

(3) $3+\sqrt{5}$

【分析】 本题考查了实数与数轴, 算术平方根, 无理数的估算, 读懂题意是解题的关键.

(1) 根据题意可求出正方形 $ABCD$ 的面积, 进而得到正方形的边长, 再利用夹逼法即可求出其范围;

(2) 根据点 A 表示的数和正方形的边长即可得到点 D 表示的数;

(3) 设点 D 与数 x 对应的点重合, 根据对折可得, $\frac{-1-\sqrt{5}+x}{2}=1$, 即可求解.

【详解】 (1) 解: 由题意得, 正方形 $ABCD$ 的面积为: $5 \times 1 \times 1 = 5$,

$\therefore$ 边长为: $\sqrt{5}$,

$\because \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$,

$\therefore 2 < \sqrt{5} < 3$,

$\therefore AB$ 的长 在 2 和 3 之间;

(2) 解: 把图 1 中的正方形 $ABCD$ 放到数轴上, 使得点 A 与 -1 重合, 则点 D 在数轴上表示的数为: $-1-\sqrt{5}$;

(3) 解: 设点 D 与数 x 对应的点重合,

由题意得: $\frac{-1-\sqrt{5}+x}{2}=1$,

解得: $x = 2 - (-1 - \sqrt{5}) = 3 + \sqrt{5}$,

$\therefore$ 点 D 与数 $3 + \sqrt{5}$ 对应的点重合.

26. 观察下列等式, 并回答问题:

第 1 个 $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$;

第 2 个 $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}$;

第 3 个 $|\sqrt{3} - \sqrt{4}| = \sqrt{4} - \sqrt{3}$;

第 4 个 $|\sqrt{4} - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - \sqrt{4}$;

.....

(1) 化简: $|\sqrt{35} - 6| =$ ____; 这是第 ____ 个等式.

(2) 第 n 个等式是 _____. (用含 n 的式子表示)

(3) 比较 $\frac{\sqrt{24}-1}{4}$ 与 1 的大小.

【答案】 (1) $6 - \sqrt{35}$, 35

(2) $|\sqrt{n} - \sqrt{n+1}| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(3) $\frac{\sqrt{24}-1}{4} < 1$

【分析】 本题属于探究规律类试题, 主要考查绝对值的性质、实数大小比较, 熟练掌握相关知识并灵活运用是解题的关键.

(1) 根据已知等式的规律可以得到 $|\sqrt{35} - 6| = |\sqrt{35} - \sqrt{36}|$, 可以根据规律得到结果.

(2) 由前 4 个等式可以猜想第 n 个等式为 $|\sqrt{n} - \sqrt{n+1}| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

(3) 利用作差法比较大小.

【详解】 (1) 解: 根据前 4 个式子可得: $|\sqrt{35} - 6| = |\sqrt{35} - \sqrt{36}| = \sqrt{36} - \sqrt{35} = 6 - \sqrt{35}$,

这是第 35 个等式.

(2) 解: 由前 4 个等式可得第 n 个等式为 $|\sqrt{n} - \sqrt{n+1}| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

(3) 解: $\therefore \frac{\sqrt{24}-1}{4} - 1 = \frac{\sqrt{24}-1}{4} - \frac{4}{4} = \frac{\sqrt{24}-5}{4} = \frac{\sqrt{24}-\sqrt{25}}{4} < 0$,

$\therefore \frac{\sqrt{24}-1}{4} < 1$.

27. 若一个含根号的式子 $a+b\sqrt{x}$ 可以写成 $m+n\sqrt{x}$ 的平方 (其中 a, b, m, n 都是整数, x 为正整数), 即

$a+b\sqrt{x} = (m+n\sqrt{x})^2$, 则称 $a+b\sqrt{x}$ 为完美根式. $m+n\sqrt{x}$ 是 $a+b\sqrt{x}$ 的完美平方根. 例如: 因为

$19-6\sqrt{2} = (1-3\sqrt{2})^2$, 所以 $1-3\sqrt{2}$ 是 $19-6\sqrt{2}$ 的完美平方根.

(1) 已知 $2\sqrt{3}-3$ 是 $a-12\sqrt{3}$ 的完美平方根, 求 a 的值;

(2) 已知 $2-3\sqrt{2}$ 是一个根式的完美平方根, 求这个根式.

【答案】 (1) $a=21$;

(2) 这个根式为 $22-12\sqrt{2}$.

【分析】 本题主要考查了新定义“完美根式”与“完美平方根”, 正确理解新定义是解题关键.

(1) 根据完美平方根的定义, 即可获得答案;

(2) 设这个根式为 x , 根据完美根式的定义, 可求得 x 的值.

【详解】 (1) 解: $\because 2\sqrt{3}-3$ 是 $a-12\sqrt{3}$ 的完美平方根,

$$\therefore a-12\sqrt{3} = (2\sqrt{3}-3)^2 = 21-12\sqrt{3},$$

$$\therefore a=21;$$

(2) 解: 设这个根式为 x ,

则 $2-3\sqrt{2}$ 是 x 的完美平方根,

$$\therefore x = (2-3\sqrt{2})^2 = 4-12\sqrt{2}+18 = 22-12\sqrt{2},$$

$\therefore$ 这个根式为 $22-12\sqrt{2}$.

28. 我国南宋时期数学家秦九韶曾提出利用三角形的三边求面积的公式, 此公式与古希腊几何学家海伦提出的公式如出一辙, 即三角形的三边长分别为 a, b, c , 记 $p = \frac{a+b+c}{2}$, 则其面积 $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. 这个公式也被称为海伦-秦九韶公式.

(1) 当三角形的三边 $a=3, b=5, c=6$ 时, 请你利用公式计算出三角形的面积;

(2) 一个三角形的三边长依次为 $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$, 请求出三角形的面积;

(3) 若 $p=8, a=4$, 求此时三角形面积的最大值.

【答案】 (1) $2\sqrt{14}$

(2) $\frac{\sqrt{26}}{2}$

(3) $8\sqrt{2}$

【分析】 (1) 直接利用已知得出 p 的值, 再利用三角形面积公式得出答案;

(2) 将 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 变形为 $S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[a^2 b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2 \right]}$ 再代入求值即可;

(3) 根据公式计算出 $b+c=12$, 再表示成 $c=12-b$, 代入公式即可求出解..

【详解】(1) 解: $\because a=3, b=5, c=6,$

则: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3+5+6}{2} = 7,$

$$\therefore S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{7 \times (7-3) \times (7-5) \times (7-6)}$$

$$= \sqrt{56}$$

$$= 2\sqrt{14};$$

(2) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$= \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{4} \cdot \frac{c^2 - (a-b)^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{4} \cdot \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{ab}{2} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4} \right) \left(\frac{ab}{2} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4} \right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{ab}{2} \right)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{4} \right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} \left[a^2 b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2 \right]},$$

则三边长依次为 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{6}$ 、 $\sqrt{7}$, 代入 $S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[a^2 b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2 \right]}$ 可得:

$$S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[5 \times 6 - \left(\frac{5+6-7}{2} \right)^2 \right]} = \sqrt{\frac{1}{4} \times (30-4)} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

(3) $\because p = \frac{a+b+c}{2}, p=8, a=4,$

$\therefore b+c=12$, 则 $c=12-b$,

$$\begin{aligned}
 \therefore S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\
 &= \sqrt{8(8-4)(8-b)(8-c)} \\
 &= 4\sqrt{2} \times \sqrt{(8-b)(8-12+b)} \\
 &= 4\sqrt{2} \times \sqrt{(8-b)(b-4)} \\
 &= 4\sqrt{2} \times \sqrt{4-(b-6)^2},
 \end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $b=6$ 时, S 有最大值, 为 $S=8\sqrt{2}$.

【点睛】本题主要考查了二次根式的应用, 乘法公式的应用, 解答本题的关键是明确题意, 求出相应的三角形的面积.

29. 根据实际需要, 计算的结果有时要用小数表示, 有时要用分数表示. 分数、小数进行比较时也需要进行互化. 我们已经学会了一些基本的互化方法. 但还有很多知识可能没学会, 但又非常重要.

例如: 如何将 $0.\dot{6}$, $0.3\dot{6}$ 化成分数?

解 1: 因为 $0.\dot{6} \times 10 = 6.\dot{6}$, 所以 $0.\dot{6} \times 10 - 0.\dot{6} = 6$

又因为 $0.\dot{6} \times 10 - 0.6 = 9 \times 0.\dot{6}$, 所以 $9 \times 0.\dot{6} = 6$, 从而得 $0.\dot{6} = \frac{6}{9}$

解 2: 因为 $0.3\dot{6} \times 10 = 3.\dot{6}$, $0.3\dot{6} \times 100 = 36.\dot{6}$, 所以 $0.3\dot{6} \times 100 - 0.3\dot{6} \times 10 = 36.\dot{6} - 3.\dot{6} = 33$

又因为 $0.3\dot{6} \times 100 - 0.3\dot{6} \times 10 = 90 \times 0.3\dot{6}$, 所以 $90 \times 0.3\dot{6} = 33$, 从而得 $0.3\dot{6} = \frac{33}{90} = \frac{11}{30}$

(1) 利用上述方法将 $0.\dot{8}$ 和 $0.15\dot{4}$ 化成分数 (需写出过程);

(2) $1.\dot{2} \div 1.2\dot{4} =$ _____;

(3) 纯循环小数 $0.\dot{abc}$ 写成最简分数时, 分子和分母的和是 58, 求这个三位数 $\overline{abc}$.

【答案】(1) $0.\dot{8} = \frac{8}{9}$, $0.15\dot{4} = \frac{139}{900}$

(2) $\frac{55}{56}$

(3) 567

【分析】本题考查循环小数与分数的转换, 掌握题目中的例题的方法是解题的关键.

(1) 根据题目中的例题的方法解答即可;

(2) 根据题目中的例题的方法分别计算出 $1.\dot{2}$, $1.2\dot{4}$, 再计算除法即可;

(3) 根据题目中的例题的方法可得 $0.\dot{abc} = \frac{\overline{abc}}{999}$, 再将 999 分解成 27×37 , 结合分子和分母的和是 58, 可求出最简分数, 通过通分将分母变为 999, 对应的分子即为 $\overline{abc}$.

【详解】(1) 解：因为 $0.\dot{8} \times 10 = 8.\dot{8}$ ，所以 $0.\dot{8} \times 10 - 0.\dot{8} = 8.\dot{8} - 0.\dot{8} = 8$ ，

又因为 $0.\dot{8} \times 10 - 0.\dot{8} = 9 \times 0.\dot{8}$ ，所以 $9 \times 0.\dot{8} = 8$ ，从而得 $0.\dot{8} = \frac{8}{9}$ ；

因为 $0.15\dot{4} \times 1000 = 154.\dot{4}$ ， $0.15\dot{4} \times 100 = 15.\dot{4}$ ，所以 $0.15\dot{4} \times 1000 - 0.15\dot{4} \times 100 = 154.\dot{4} - 15.\dot{4} = 139$ ，

又因为 $0.15\dot{4} \times 1000 - 0.15\dot{4} \times 100 = 900 \times 0.15\dot{4}$ ，所以 $900 \times 0.15\dot{4} = 139$ ，从而得 $0.15\dot{4} = \frac{139}{900}$ ；

综上所述， $0.\dot{8} = \frac{8}{9}$ ， $0.15\dot{4} = \frac{139}{900}$ ；

(2) 解：因为 $1.\dot{2} \times 10 = 12.\dot{2}$ ，所以 $1.\dot{2} \times 10 - 1.\dot{2} = 12.\dot{2} - 1.\dot{2} = 11$ ，

又因为 $1.\dot{2} \times 10 - 1.\dot{2} = 9 \times 1.\dot{2}$ ，所以 $9 \times 1.\dot{2} = 11$ ，从而得 $1.\dot{2} = \frac{11}{9}$ ；

同理可得 $1.2\dot{4} = \frac{112}{90} = \frac{56}{45}$ ，

所以 $1.\dot{2} \div 1.2\dot{4} = \frac{11}{9} \div \frac{56}{45} = \frac{11}{9} \times \frac{45}{56} = \frac{55}{56}$ ，

故答案为： $\frac{55}{56}$

(3) 解：因为 $0.\dot{a}\dot{b}\dot{c} \times 1000 = abc.\dot{a}\dot{b}\dot{c}$ ，所以 $0.\dot{a}\dot{b}\dot{c} \times 1000 - 0.\dot{a}\dot{b}\dot{c} = \overline{abc}$ ，

又因为 $0.\dot{a}\dot{b}\dot{c} \times 1000 - 0.\dot{a}\dot{b}\dot{c} = 999 \times 0.\dot{a}\dot{b}\dot{c}$ ，所以 $999 \times 0.\dot{a}\dot{b}\dot{c} = \overline{abc}$ ，

从而得 $0.\dot{a}\dot{b}\dot{c} = \frac{\overline{abc}}{999}$ ，

因为 $999 = 3 \times 3 \times 3 \times 37 = 27 \times 37$ ，

所以分母只能是 27 和 37，

又因为分子和分母的和是 58，该分数是真分数，

所以分子小于分母，可得分母为 37，分子为 $58 - 37 = 21$ ，

所以 $0.\dot{a}\dot{b}\dot{c} = \frac{21}{37} = \frac{567}{999}$ ，

所以这个三位数 $\overline{abc} = 567$ 。