

2025 学年第一学期八年级数学学科期中考试卷

(考试时间 90 分钟 满分 100 分)

一、选择题 (本大题共 8 题, 每题 2 分, 共 16 分)

1. 下列各式中, 与 $\sqrt{2a}$ 是同类二次根式的是 ()

A. $2\sqrt{a}$

B. $\sqrt{\frac{1}{a}}$

C. $\sqrt{8a}$

D. $\sqrt{2a^2}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了同类二次根式, 利用二次根式的性质化简等知识点, 熟练掌握同类二次根式的定义是解题的关键: 把几个二次根式化为最简二次根式后, 如果它们的被开方数相同, 那么这几个二次根式叫做同类二次根式. 利用二次根式的性质把各个二次根式化简, 再根据同类二次根式的定义判断即可.

【详解】解: A. $2\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{2a}$ 不是同类二次根式, 故选项 A 不符合题意;

B. $\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$, 与 $\sqrt{2a}$ 不是同类二次根式, 故选项 B 不符合题意;

C. $\sqrt{8a} = \sqrt{4 \times 2a} = 2\sqrt{2a}$, 与 $\sqrt{2a}$ 是同类二次根式, 故选项 C 符合题意;

D. $\sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$, 与 $\sqrt{2a}$ 不是同类二次根式, 故选项 D 不符合题意;

故选: C.

2. 下列方程中, 属于一元二次方程的是 ()

A. $x^2 - 16 = 0$

B. $3x^2 - 4y = 0$

C. $x^2 + \frac{1}{x} + 1 = 0$

D. $(x+1)(x+4) = x(x+2)$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的定义, 根据一元二次方程的定义逐项分析即可得解, 熟练掌握一元二次方程的定义是解此题的关键.

【详解】解: A、 $x^2 - 16 = 0$ 符合一元二次方程的定义, 故符合题意;

B、 $3x^2 - 4y = 0$ 中含有两个未知数, 故不是一元二次方程, 故不符合题意;

C、 $x^2 + \frac{1}{x} + 1 = 0$ 不是整式方程, 故不是一元二次方程, 故不符合题意;

D、化简得 $3x + 4 = 0$, 故不是一元二次方程, 故不符合题意;

故选：A.

3. 在下列各式中，是 $\sqrt{2a+b}$ 的有理化因式的是（ ）

A. $\sqrt{2a+b}$

B. $\sqrt{2a-b}$

C. $\sqrt{2a}+b$

D. $\sqrt{2a}-b$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查有理化因式的概念.

有理化因式：两个含有根式的非零代数式相乘，如果它们的积不含有根式，那么这两个代数式就互为有理化因式，分别将选项代入计算看乘积是否含有根式即可.

【详解】A. $\sqrt{2a+b} \cdot \sqrt{2a+b} = 2a+b$ ，结果不带根式，符合题意.

B. $\sqrt{2a+b} \cdot \sqrt{2a-b} = \sqrt{4a^2-b^2}$ ，结果带根式，不符合题意.

C. $\sqrt{2a+b} \cdot (\sqrt{2a}+b) = \sqrt{4a^2+2ab}+b\sqrt{2a+b}$ ，结果带根式，不符合题意.

D. $\sqrt{2a+b} \cdot (\sqrt{2a}-b) = \sqrt{4a^2+2ab}-b\sqrt{2a+b}$ ，结果带根式，不符合题意.

故选：A.

4. 下列结论中，对于任何实数 a 、 b 都成立的是（ ）

A. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

B. $\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$

C. $\sqrt{a^2} = a$

D. $\sqrt{a^4} = a^2$

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次根式运算的公式条件逐一判断即可.

【详解】 $\because a \geq 0, b \geq 0$ 时， $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ，

$\therefore A$ 不成立；

$\because a > 0, b \geq 0$ 时， $\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ ，

$\therefore B$ 不成立；

$\because a \geq 0$ 时， $\sqrt{a^2} = a$ ，

$\therefore C$ 不成立；

$$\because \sqrt{a^4} = a^2,$$

$\therefore D$ 成立;

故选 D .

【点睛】 本题考查了二次根式的性质，熟练掌握公式的使用条件是解题的关键.

5. 关于 x 的方程 $kx^2 + 4x - 2 = 0$ 有两个实数根，则 k 的取值范围是 ()

- A. $k \leq -2$ B. $k \geq -2$ C. $k \geq -2$ 且 $k \neq 0$ D. $k > -2$ 且 $k \neq 0$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的判别式. 方程有两个实数根，需满足二次项系数不为零且判别式大于等于零.

【详解】 解: $\because$ 方程 $kx^2 + 4x - 2 = 0$ 有两个实数根,

$$\therefore k \neq 0 \text{ 且 } \Delta = 4^2 - 4 \cdot k \cdot (-2) \geq 0,$$

$$\text{即 } 16 + 8k \geq 0,$$

$$\therefore 8k \geq -16,$$

$$\therefore k \geq -2,$$

$$\text{又 } \because k \neq 0,$$

$$\therefore k \geq -2 \text{ 且 } k \neq 0.$$

故选: C.

6. 当 $0 < a < 1$ 时，化简 $\sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} - \frac{1}{a} =$ ()

- A. a B. $-a$ C. $a - \frac{2}{a}$ D. $\frac{2}{a} - a$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质，能够根据二次根式的被开方数中因式的特点正确化简二次根式是本题的关键.

先利用 a 的取值范围判断 $a - \frac{1}{a}$ 的正负性，根据二次根式的性质进行化简，最后根据绝对值的性质去绝对值，然后进行计算即可.

【详解】 解: $\because 0 < a < 1$.

$$\therefore a - \frac{1}{a} < 0.$$

$$\therefore \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} - \frac{1}{a} = \left|a - \frac{1}{a}\right| - \frac{1}{a} = \frac{1}{a} - a - \frac{1}{a} = -a.$$

故选：B.

7. 已知 m 、 n 是一元二次方程 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 的两个根，则 $m^2 + mn + 2m$ 的值为 ()

A. 0

B. -10

C. 3

D. 10

【答案】A

【解析】

【分析】根据一元二次方程根与系数关系得出 $mn = -5$ ，把 $x = m$ 代入方程得 $m^2 + 2m - 5 = 0$ ，即 $m^2 + 2m = 5$ ，代入即可求解.

【详解】解： $\because m$ 、 n 是一元二次方程 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 的两个根，

$$\therefore mn = -5, m^2 + 2m - 5 = 0,$$

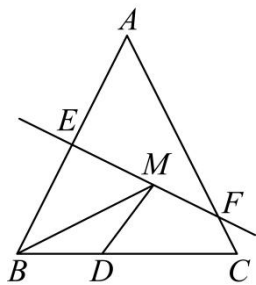
$$\therefore m^2 + 2m = 5,$$

$$\therefore m^2 + mn + 2m = 5 - 5 = 0,$$

故选：A.

【点睛】本题考查代数式求值，一元二次方程根与系数关系，方程解的意义，根据一元二次方程根与系数关系和方程解的意义得出 $mn = -5$ ， $m^2 + 2m = 5$ 是解题的关键.

8. 如图，等腰三角形 ABC 底边 BC 的长为 5cm ，面积是 18cm^2 ，腰 AB 的垂直平分线 EF 交 AC 于点 F ，若 D 为 BC 边上的动点， M 为线段 EF 上一动点，则 $BM + DM$ 最小值为 () cm .



A. $\frac{9}{5}$

B. $\frac{13}{5}$

C. $\frac{18}{5}$

D. $\frac{36}{5}$

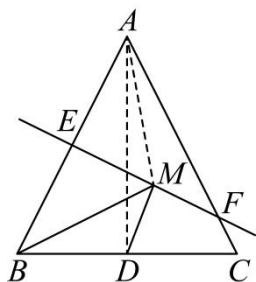
【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了线段垂直平分线的性质，垂线段最短，连接 AD ， AM ，由线段垂直平分线的性质得到 $AM = BM$ ，则当 A 、 D 、 M 三点共线，且 $AD \perp BC$ 时， $AM + DM$ 有最小值，即此时 $BM + DM$

有最小值，最小值为线段 AD 的长，据此根据三角形面积计算公式求出线段 AD 的长即可得到答案.

【详解】解：如图所示，连接 AD ， AM ，



$\because$ 腰 AB 的垂直平分线 EF 交 AC 于点 F ,

$\therefore AM = BM$,

$\therefore BM + DM = AM + DM$,

$\because AM + DM \geq AD$ ，且垂线段最短，

$\therefore$ 当 A 、 D 、 M 三点共线，且 $AD \perp BC$ 时， $AM + DM$ 有最小值，即此时 $BM + DM$ 有最小值，最小值为线段 AD 的长，

$\because BC$ 的长为 5cm ， $\triangle ABC$ 的面积是 18cm^2 ，

$\therefore$ 此时 $\frac{1}{2}BC \cdot AD = 18$ ，

$\therefore AD = \frac{36}{5}\text{cm}$ ，

$\therefore BM + DM$ 的最小值为 $\frac{36}{5}\text{cm}$ ，

故选：D.

二、填空题（本大题共 10 题，每题 3 分，共 30 分）

9. 二次根式 $\sqrt{2x-3}$ 有意义的条件是：_____.

【答案】 $x \geq \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式有意义的条件，根据二次根式的被开方数为非负数可得 $2x-3 \geq 0$ ，计算即可得解，熟练掌握二次根式有意义的条件是解此题的关键.

【详解】解：根据题意可得： $2x-3 \geq 0$ ，

解得： $x \geq \frac{3}{2}$ ，

故答案为： $x \geq \frac{3}{2}$.

10. 方程 $x^2 = x$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = 1$

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的解法. 通过移项将方程化为标准形式, 然后利用因式分解法求解.

【详解】 $x^2 = x$

解: $x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 1$,

故答案为: $x_1 = 0, x_2 = 1$.

11. 不等式 $2x-1 < \sqrt{3}x$ 的解集为: _____.

【答案】 $x < 2 + \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了求一元一次不等式的解集, 涉及了分母有理化, 由题意得 $x < \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$, 即可求解;

【详解】 解: $2x-1 < \sqrt{3}x$,

$2x - \sqrt{3}x < 1$,

$(2 - \sqrt{3})x < 1$,

$x < \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$,

故答案为: $x < 2 + \sqrt{3}$

12. 若 $\sqrt{3.4} \approx 1.844$, $\sqrt{34} \approx 5.830$, 则 $\sqrt{340} \approx$ _____.

【答案】 18.44

【解析】

【分析】 根据算术平方根的性质, 将原式 $\sqrt{340}$ 变形为 $\sqrt{3.4 \times 100}$ 得出答案即可.

【详解】解：∵ $\sqrt{3.4} \approx 1.844$ ， $\sqrt{34} \approx 5.830$ ，

$$\therefore \sqrt{3.4 \times 100} = \sqrt{3.4} \times \sqrt{100} = \sqrt{340} \approx 18.44，$$

故答案是：18.44.

【点睛】本题考查了算术平方根的性质，解题的关键是根据已知得出 $\sqrt{340} = \sqrt{3.4 \times 100}$.

13. 在实数范围内因式分解： $2x^2 - 3x - 1 =$ _____.

【答案】 $2\left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{4}\right)$

【解析】

【分析】结合题意，当 $x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ 时，通过求解一元二次方程，得

$$x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = \left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{4}\right) = 0，\text{ 结合 } 2x^2 - 3x - 1 = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right)，\text{ 即可得到答案.}$$

【详解】 $2x^2 - 3x - 1 = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right)$

$$\text{当 } x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \text{ 时，得 } x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-1)}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$\therefore x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = \left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{4}\right) = 0$$

$$\therefore x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = \left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{4}\right)$$

$$\therefore 2x^2 - 3x - 1 = 2\left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{4}\right)$$

$$\text{故答案为： } 2\left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{4}\right).$$

【点睛】本题考查了因式分解和一元二次方程的知识；解题的关键是熟练掌握一元二次方程的性质，从而完成求解.

14. 某小组每人给其他人送一张照片，全组共送了 90 张，那么这个小组共有 _____ 人.

【答案】 10

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的应用，理解题意并列出方程是解决本题的关键.

设小组人数为 n ，则每人送出 $(n-1)$ 张照片，总照片数为 $n(n-1)=90$ ，求解即可.

【详解】解：设小组共有 n 人，

根据题意得，总照片数为 $n(n-1)=90$

$$n^2 - n - 90 = 0$$

$$(n-10)(n+9) = 0$$

解得 $n=10$ 或 $n=-9$ （不符合题意，舍去），

$\therefore$ 小组共有 10 人.

故答案为：10.

15. 一个三角形的两边长分别为 3 和 6，第三边的长是方程 $(x-2)(x-4)=0$ 的一个根，则这个三角形的周长是_____.

【答案】13

【解析】

【分析】本题考查了解一元二次方程，解方程 $(x-2)(x-4)=0$ ，根据三角形三边的关系得到三角形第三边的长为 4，然后计算三角形的周长.

【详解】解： $(x-2)(x-4)=0$ ，

$$x-4=0 \text{ 或 } x-2=0,$$

$$\text{所以 } x_1=4, \quad x_2=2,$$

因为 $2+3<6$ ，所以 $x=2$ 舍去，

所以三角形第三边的长为 4，

$$\text{所以三角形的周长} = 3+6+4=13,$$

故答案为：13.

16. 若关于 x 的方程 $3x^2-4x+c=0$ 的一个根是 2，则另一个根是_____.

【答案】 $-\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程根与系数的关系. 根据韦达定理，已知一个根，可直接求另一个根.

【详解】解：设方程的另一个根为 r ，已知一个根为 2.

对于方程 $3x^2-4x+c=0$ ，有 $a=3$ ， $b=-4$.

根据根与系数的关系，两根之和为 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$,

$$\text{即 } 2 + r = -\frac{-4}{3} = \frac{4}{3},$$

$$\text{解得 } r = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}.$$

故答案为: $-\frac{2}{3}$.

17. 已知实数 x 满足 $\sqrt{2025^2 - 4050x + x^2} + \sqrt{x - 2026} = x$, 那么 $x - 2025^2 =$ _____.

【答案】 2026

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件，二次根式的性质. 先根据二次根式有意义的条件求出 x 的取值范围，再根据二次根式的性质化简得 $\sqrt{x - 2026} = 2025$ ，然后两边平方即可求解.

【详解】 解: $\because x - 2026 \geq 0$,

$$\therefore x \geq 2026,$$

$$\therefore x > 2025.$$

$$\therefore \sqrt{2025^2 - 4050x + x^2} + \sqrt{x - 2026} = x,$$

$$\therefore \sqrt{(2025 - x)^2} + \sqrt{x - 2026} = x,$$

$$\therefore |2025 - x| + \sqrt{x - 2026} = x,$$

$$\therefore x - 2025 + \sqrt{x - 2026} = x,$$

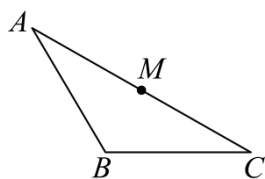
$$\therefore \sqrt{x - 2026} = 2025,$$

$$\text{即 } x - 2026 = 2025^2,$$

$$\text{故 } x - 2025^2 = 2026.$$

故答案为: 2026.

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = BC$ ，点 M 是 AC 的中点，将线段 AM 绕点 M 逆时针旋转，点 A 落在边 CB 的延长线上的点 D 处，连接 MD ，与边 AB 交于点 E ， $\angle AEM = 105^\circ$ ，那么 $\angle DAB =$ _____ $^\circ$.



【答案】 40

【解析】

【分析】 本题主要考查了等腰三角形的性质与判定，旋转的性质，三角形内角和定理和三角形外角的性质，由等边对等角得到 $\angle BAC = \angle C$ ，由线段中点的定义和旋转的性质可得 $MA = MD = MC$ ，则

$\angle MAD = \angle MDA$ ， $\angle MDC = \angle C$ ；设 $\angle C = \angle BAC = \angle MDC = x$ ，可推出

$\angle MAD = 90^\circ - x$ ， $\angle AMD = 2x$ ，根据三角形内角和定理建立方程求出 x 即可得到答案.

【详解】 解： $\because AB = BC$ ，

$\therefore \angle BAC = \angle C$ ；

$\because$ 点 M 是 AC 的中点，

$\therefore MA = MC$ ，

由旋转的性质可得 $MA = MD$ ，

$\therefore MA = MD = MC$ ，

$\therefore \angle MAD = \angle MDA$ ， $\angle MDC = \angle C$ ；

设 $\angle C = \angle BAC = \angle MDC = x$ ，

$\therefore \angle AMD = \angle MDC + \angle C = 2x$ ，

$\therefore \angle MAD = \angle MDA = \frac{180^\circ - \angle AMD}{2} = 90^\circ - x$ ；

$\because \angle AEM = 105^\circ$ ， $\angle AEM + \angle EAM + \angle AME = 180^\circ$ ，

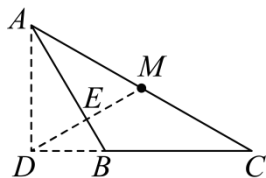
$\therefore 2x + x + 105^\circ = 180^\circ$ ，

$\therefore x = 25^\circ$ ，

$\therefore \angle MAD = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$ ， $\angle BAC = 25^\circ$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle MAD - \angle BAC = 40^\circ$ ，

故答案为：40.



三、解答题：(19-20 题各 8 分，21 题 6 分，22-23 题各 7 分，24 题各 8 分，25 题 10 分，共 54 分)

19. 计算：

$$(1) \sqrt{18} - \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 4\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}.$$

$$(2) \frac{2}{b}\sqrt{ab^2} \times \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \div 3\sqrt{\frac{b}{a}} (b > 0)$$

【答案】(1) $-5 + \sqrt{3}$

$$(2) -a^2\sqrt{a}$$

【解析】

【分析】本题主要考查了二次根式的性质、二次根式的混合运算等知识点，运用二次根式的性质化简二次根式以及混合运算法则是解答本题的关键。

(1) 先运用二次根式的性质对二次根式进行化简，然后再运用二次根式加减法则计算即可；

(2) 先运用二次根式的性质对二次根式进行化简，然后再运用二次根式乘除法则计算即可。

【小问1详解】

$$\begin{aligned} \text{解: } & \sqrt{18} - \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 4\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} \\ &= 3\sqrt{2} - 3 - 2\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2 + \sqrt{3} \\ &= -5 + \sqrt{3}; \end{aligned}$$

【小问2详解】

解：根据题意得： $a > 0, b > 0$,

$$\begin{aligned} & \frac{2}{b}\sqrt{ab^2} \times \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \div 3\sqrt{\frac{b}{a}} \\ &= \frac{2}{b} \times b\sqrt{a} \times \left(-\frac{3}{2}a\sqrt{ab}\right) \div \frac{3\sqrt{ab}}{a} \\ &= \frac{2}{b} \times b\sqrt{a} \times \left(-\frac{3}{2}a\sqrt{ab}\right) \times \frac{a}{3\sqrt{ab}} \\ &= -a^2\sqrt{a} \end{aligned}$$

20. 解方程:

$$(1) y(y+4) = 21;$$

$$(2) 2x^2 + 2\sqrt{7}x + 1 = 0.$$

【答案】(1) $y_1 = -7, y_2 = 3$

$$(2) \quad x_1 = \frac{-\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}$$

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的解法:

(1) 用十字相乘法因式分解即可求解;

(2) 用求根公式法即可求解.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } y(y+4) = 21$$

$$y^2 + 4y - 21 = 0$$

$$(y+7)(y-3) = 0$$

$$y_1 = -7, y_2 = 3;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } 2x^2 + 2\sqrt{7}x + 1 = 0$$

$$a = 2, b = 2\sqrt{7}, c = 1,$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{7})^2 - 4 \times 2 \times 1 = 28 - 8 = 20,$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ 代入得: } x = \frac{-2\sqrt{7} \pm \sqrt{20}}{2 \times 2} = \frac{-2\sqrt{7} \pm 2\sqrt{5}}{4} = \frac{-\sqrt{7} \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$\text{因此 } x_1 = \frac{-\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}.$$

$$21. \text{ 已知 } x = \sqrt{2} + 1, y = \sqrt{2} - 1, \text{ 求 } \frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{x + 2\sqrt{xy} + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{2x - \sqrt{y}}{\sqrt{x}} \text{ 的值.}$$

【答案】 $\sqrt{2} - 1$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的化简求值. 先对分式进行化简, 然后代入 x 、 y 的值进行计算即可.

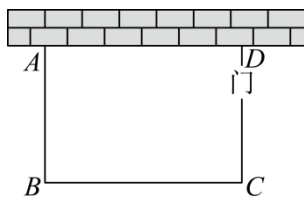
$$\text{【详解】 解: 原式} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{(\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{2x - \sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \frac{2x-\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \\
&= \sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{x}+\sqrt{y} - \frac{2(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \\
&= 2\sqrt{x}-2\sqrt{x}+\sqrt{\frac{y}{x}} \\
&= \sqrt{\frac{y}{x}}
\end{aligned}$$

当 $x = \sqrt{2} + 1$, $y = \sqrt{2} - 1$ 时, 原式 $= \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1$.

22. 列方程解应用题:

某驻村工作队, 为带动群众增收致富, 巩固脱贫攻坚成效, 决定在该村山脚下, 围一个的长方形试验茶园, 便于成功后大面积推广. 如图所示, 茶园一面靠墙, 墙长 35m, 另外三面用 69m 长的篱笆围成, 其中一边开有一扇 1m 宽的门 (不用篱笆).



- (1) 如果茶园面积为 600m^2 , 求这个茶园的长和宽;
- (2) 如果让围出的茶园面积最大, 长和宽分别是多少? 并求出最大面积是多少.

【答案】 (1) 这个茶园的长为 30m, 宽为 20m

(2) 如果让围出的茶园面积最大, 长和宽分别是 35m、17.5m, 最大面积是 612.5m^2 .

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的实际应用, 配方法的应用, 一元一次不等式组的实际应用, 正确理解题意是解题的关键.

(1) 设这个茶园的宽为 $x\text{m}$ (垂直于墙的一边的长), 则长为 $(70-2x)\text{m}$, 再根据长方形面积计算公式建立方程求解即可;

(2) 设这个茶园的宽为 $m\text{m}$ (垂直于墙的一边的长), 则长为 $(70-2m)\text{m}$, 茶园的面积为 $W\text{m}^2$, 根据长方形面积计算公式可得 $W = -2(m-17.5)^2 + 612.5$, 再求出 m 的取值范围即可得到答案.

【小问 1 详解】

解：设这个茶园的宽为 $x\text{m}$ （垂直于墙的一边的长），则长为 $69 - 2x + 1 = (70 - 2x)\text{m}$ ，

由题意得， $x(70 - 2x) = 600$ ，

整理得 $x^2 - 35x + 300 = 0$ ，

解得 $x = 15$ 或 $x = 20$ ，

当 $x = 15$ 时， $70 - 2x = 40 > 35$ ，不符合题意；

当 $x = 20$ 时， $70 - 2x = 30 < 35$ ，符合题意；

答：这个茶园的长为 30m ，宽为 20m ；

【小问 2 详解】

解：设这个茶园的宽为 $m\text{m}$ （垂直于墙的一边的长），则长为 $69 - 2m + 1 = (70 - 2m)\text{m}$ ，茶园的面积为 $W\text{m}^2$ ，

由题意得， $W = m(70 - 2m) = -2m^2 + 70m = -2(m - 17.5)^2 + 612.5$ ，

$$\therefore \begin{cases} 0 < 70 - 2x \leq 35 \\ x > 0 \\ 2x < 69 \end{cases},$$

$$\therefore 17.5 \leq x < 34.5,$$

$$\therefore (m - 17.5)^2 \geq 0,$$

$$\therefore -2(m - 17.5)^2 \leq 0,$$

$$\therefore -2(m - 17.5)^2 + 612.5 \leq 612.5$$

$\therefore$ 当 $m = 17.5$ 时， W 有最大值，最大值为 612.5 ，

此时 $70 - 2m = 35$ ，

答：如果让围出的茶园面积最大，长和宽分别是 35m 、 17.5m ，最大面积是 612.5m^2 。

23. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2x + 2k - 1 = 0$ 有实数根.

(1) 求 k 的取值范围；

(2) 设方程的两根分别是 x_1 、 x_2 ，且 $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = x_1 \cdot x_2$ ，试求 k 的值.

【答案】(1) $k \leq 1$ ；(2) $k = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

【解析】

【分析】(1)根据一元二次方程 $x^2 - 2x + 2k - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根得到 $\Delta = (-2)^2 - 4(2k - 1) \geq 0$, 求出 k 的取值范围即可;

(2)根据根与系数的关系得出方程解答即可.

【详解】(1)解: $\because$ 原方程有实数根,

$$\therefore b^2 - 4ac \geq 0, \therefore (-2)^2 - 4(2k - 1) \geq 0,$$

$$\therefore k \leq 1.$$

(2) $\because x_1, x_2$ 是方程的两根, 根据一元二次方程根与系数的关系, 得:

$$x_1 + x_2 = 2, \quad x_1 \cdot x_2 = 2k - 1,$$

$$\text{又} \because \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = x_1 \cdot x_2,$$

$$\therefore \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 \cdot x_2} = x_1 \cdot x_2,$$

$$\therefore (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (x_1 \cdot x_2)^2,$$

$$\therefore 2^2 - 2(2k - 1) = (2k - 1)^2,$$

$$\text{解之, 得: } k_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad k_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

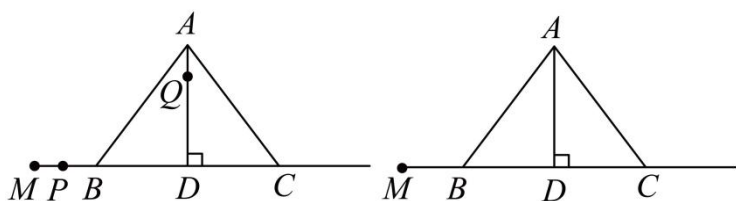
经检验, 都符合原分式方程的根,

$$\therefore k \leq 1,$$

$$\therefore k = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

【点睛】本题主要考查了根的判别式以及根与系数关系的知识, 解答本题的关键是根据根的判别式的意义求出 k 的取值范围, 此题难度不大.

24. 如图: 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5, BC = 6$, $\triangle ABC$ 的面积是 12, $AD \perp BC$ 于点 D , 点 M 在直线 BC 上, 且 $MB = \frac{1}{3}BC$, 动点 P 从点 M 出发, 以每秒 1 个单位的速度从点 M 沿射线 MC 运动, 设运动的时间为 t 秒, 回答下列问题.



- (1) 直接写出线段 $AD =$ _____;
- (2) 用含 t 的代数式表示线段 PD 的长;
- (3) 在 AD 上取点 Q , 使 $AQ = 1$, 连结 PQ , 当 $\triangle PDQ$ 与 $\triangle ABD$ 全等时, 求 t 值;
- (4) 在点 P 运动的过程中, 当 $\triangle ACP$ 是以 AC 为腰的等腰三角形, 直接写出 t 的值.

【答案】 (1) 4 (2) 当 $0 \leq t \leq 5$ 时, $PD = 5 - t$; 当 $t > 5$ 时, $PD = t - 5$

(3) $t = 1$ 或 $t = 9$

(4) $t = 2$ 或 $t = 3$ 或 $t = 13$

【解析】

【分析】 (1) 根据勾股定理和等腰三角形的性质, 求出结果即可;

(2) 根据点 P 的运动速度和运动时间, 分两种情况求出线段 PD 的长即可;

(3) 分两种情况: 当点 P 在点 D 左侧, $\triangle PDQ \cong \triangle ADB$ 时, 点 P 在点 D 右侧, $\triangle PDQ \cong \triangle ADB$ 时, 分别列出方程, 解方程即可;

(4) 分两种情况讨论: 当 $AC = AP$ 时, 当 $AC = CP$ 时, 分别求出结果即可.

【小问 1 详解】

解: $\because AB = AC = 5, BC = 6, AD \perp BC$,

$$\therefore BD = CD = \frac{1}{2}BC = 3, \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because MB = \frac{1}{3}BC,$$

$$\therefore BM = \frac{1}{3} \times 6 = 2,$$

$$\therefore DM = 2 + 3 = 5,$$

$\therefore$ 动点 P 从点 M 出发, 以每秒 1 个单位长度的速度从点 M 沿射线 MC 运动, 运动的时间为 t 秒 ($t > 0$),

$\therefore$ 当 $0 \leq t \leq 5$ 时, $PD = 5 - t$;

当 $t > 5$ 时, $PD = t - 5$;

【小问3 详解】

解: $\because AQ=1$,

$$\therefore DQ = AD - AQ = 4 - 1 = 3,$$

$$\therefore BD = 3,$$

$$\therefore BD = DQ,$$

当点 P 在点 D 左侧, $\triangle PDQ \cong \triangle ADB$ 时, $PD = AD = 4$,

$$\therefore 5 - t = 4,$$

解得: $t = 1$;

当点 P 在点 D 右侧, $\triangle PDQ \cong \triangle ADB$ 时, $PD = AD = 4$,

$$\therefore t - 5 = 4,$$

解得: $t = 9$;

综上所述可知: $t = 1$ 或 $t = 9$ 时, $\triangle PDQ$ 与 $\triangle ABD$ 全等;

【小问4 详解】

解: 当 $AC = AP$ 时, $AP = AC = 5$,

$$\because AD \perp BC,$$

$$\therefore DP = DC = 3, \text{ 即点 } P \text{ 与点 } B \text{ 重合},$$

$$\therefore t = MB = 2;$$

当 $AC = CP$, 点 P 在点 D 左侧时, $AC = CP = 5$,

$$\therefore MP = MC - CP = 8 - 5 = 3,$$

$$\therefore t = 3;$$

当点 P 在点 D 右侧, $AC = CP = 5$,

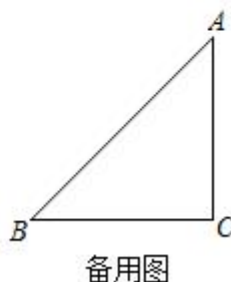
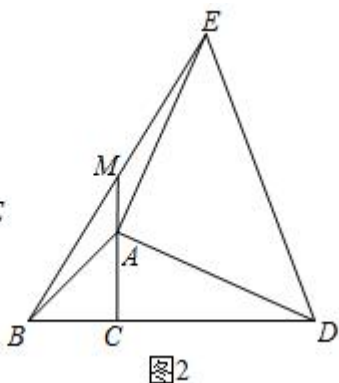
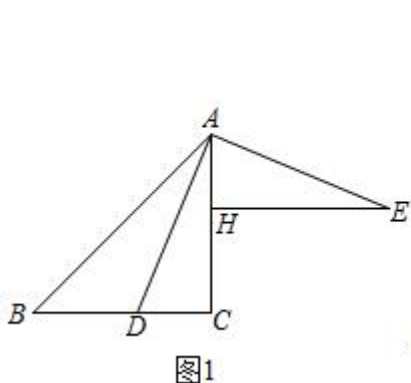
$$\therefore MP = MC + CP = 8 + 5 = 13,$$

$$\therefore t = 13;$$

综上, $t = 2$ 或 $t = 3$ 或 $t = 13$ 时, $\triangle ACP$ 是以 AC 为腰的等腰三角形.

【点睛】 本题主要考查了等腰三角形的性质, 勾股定理, 三角形全等的判定和性质, 列代数式, 一元一次方程的应用, 解题的关键是熟练掌握相关的判定和性质, 注意进行分类讨论.

25. 已知: $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = CB$, D 为直线 BC 上一动点, 连接 AD , 在直线 AC 右侧作 $AE \perp AD$, 且 $AE = AD$.



- (1) 如图 1, 当点 D 在线段 BC 上时, 过点 E 作 $EH \perp AC$ 于 H , 连接 DE . 求证: $EH = AC$;
- (2) 如图 2, 当点 D 在线段 BC 的延长线上时, 连接 BE 交 CA 的延长线于点 M . 求证: $BM = EM$;
- (3) 当点 D 在直线 CB 上时, 连接 BE 交直线 AC 于 M , 若 $2AC = 5CM$, 请求出 $\frac{S_{\triangle ADB}}{S_{\triangle AEM}}$ 的值.

【答案】(1) 见解析; (2) 见解析; (3) $\frac{4}{3}$ 或 $\frac{4}{7}$

【解析】

【分析】(1) 由“ AAS ”可证 $\triangle AHE \cong \triangle DCA$, 可得 $EH = AC$, 即可求证;

(2) 过点 E 作 $EN \perp AC$, 交 CA 延长线于 N , 由“ AAS ”可证 $\triangle ANE \cong \triangle DCA$, 可得 $AC = EN = BC$, 由“ AAS ”可证 $\triangle ENM \cong \triangle BCM$, 可得 $BM = EM$;

(3) $AC = 5a$, $CM = 2a$, 分三种情况: 当点 D 在线段 BC 上, 点 D 在线段 BC 的延长线上, 点 D 在线段 CB 的延长线上, 由全等三角形的性质可求得相应线段的长, 再由三角形的面积公式可求解.

【详解】证明 (1) $\because AE \perp AD$, $\angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore \angle EAH = 90^\circ - \angle CAD, \quad \angle ADC = 90^\circ - \angle CAD,$$

$$\therefore \angle EAH = \angle ADC,$$

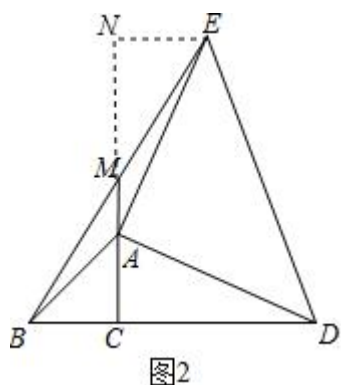
在 $\triangle AHE$ 与 $\triangle DCA$ 中

$$\begin{cases} \angle AHE = \angle ACB = 90^\circ \\ \angle EAH = \angle ADC \\ AE = AD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AHE \cong \triangle DCA (AAS),$$

$$\therefore EH = AC;$$

(2) 如图 2, 过点 E 作 $EN \perp AC$, 交 CA 延长线于 N ,



$\because AE \perp AD, \angle ACB = 90^\circ,$

$\therefore \angle EAN = 90^\circ - \angle CAD, \angle ADC = 90^\circ - \angle CAD,$

$\therefore \angle EAN = \angle ADC,$

在 $\triangle ANE$ 与 $\triangle DCA$ 中,

$$\begin{cases} \angle ANE = \angle DCA = 90^\circ \\ \angle EAN = \angle ADC \\ AN = AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ANE \cong \triangle DCA (AAS),$

$\therefore EN = AC,$

又 $\because AC = BC,$

$\therefore EN = BC,$

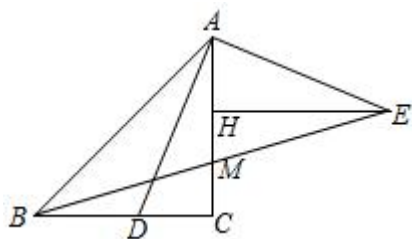
又在 $\triangle ENM$ 与 $\triangle BCM$ 中,

$$\begin{cases} \angle EMN = \angle BMC \\ \angle N = \angle BCA = 90^\circ \\ EN = BC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ENM \cong \triangle BCM (AAS),$

则 $BM = EM;$

(3) 如图, 当点 D 在线段 BC 上时,



$\therefore 2AC = 5CM,$

$\therefore$ 可设 $AC = 5a$, $CM = 2a$,

由 (1) 得: $\triangle AHE \cong \triangle DCA$,

则 $AH = CD$, $EH = AC = BC = 5a$,

由 $\therefore \angle EHM = \angle BCM = 90^\circ$, $\angle BMC = \angle EMH$,

$\therefore \triangle MHE \cong \triangle MCB$ (AAS),

$\therefore CM = HM$,

即 $HM = CM = 2a$,

$\therefore AH = AC - CM - HM = 5a - 2a - 2a = a$,

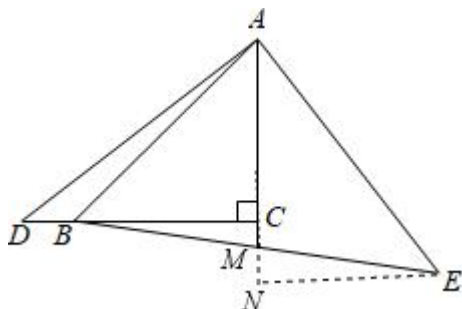
$\therefore AM = AH + HM = 3a$, $CD = AH = a$,

$EH = AC = 5a$,

$BD = BC - CD = 4a$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADB}}{S_{\triangle AEM}} = \frac{\frac{1}{2}BD \times AC}{\frac{1}{2}AM \times EH} = \frac{\frac{1}{2} \times 4a \times 5a}{\frac{1}{2} \times 3a \times 5a} = \frac{4}{3};$$

如图, 点 D 在 CB 延长线上时, 过点 E 作 $EN \perp AC$, 交 AC 延长线于 N ,



$\therefore 2AC = 5CM$,

$\therefore$ 可设 $AC = 5a$, $CM = 2a$,

$\therefore EN \perp AC$, $AE \perp AD$,

$\therefore \angle ANE = \angle EAD = \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle EAN = 90^\circ - \angle CAD$, $\angle ADC = 90^\circ - \angle CAD$,

$\therefore \angle EAN = \angle ADC$,

在 $\triangle ANE$ 与 $\triangle DCA$ 中,

$$\begin{cases} \angle ANE = \angle DCA = 90^\circ \\ \angle EAN = \angle ADC \\ AN = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ANE \cong \triangle DCA(AAS),$$

$$\therefore EN = AC, \quad AN = CD,$$

$$\text{又} \because AC = BC,$$

$$\therefore EN = BC,$$

又在 $\triangle ENM$ 与 $\triangle BCM$ 中,

$$\begin{cases} \angle EMN = \angle BMC \\ \angle N = \angle BCA = 90^\circ \\ EN = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ENM \cong \triangle BCM(AAS),$$

$$\therefore CM = NM = 2a,$$

$$NE = BC = AC = 5a,$$

$$\therefore AN = AC + CM + MN = 9a,$$

$$AM = AC + CM = 7a,$$

$$AN = CD = 9a,$$

$$\therefore BD = 4a,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADB}}{S_{\triangle AEM}} = \frac{\frac{1}{2} BD \times AC}{\frac{1}{2} AM \times EN} = \frac{\frac{1}{2} \times 4a \times 5a}{\frac{1}{2} \times 7a \times 5a} = \frac{4}{7},$$

点 D 在 BC 延长线上

由图 2 得: $AC < CM$,

$\therefore 2AC = 5CM$ 不可能, 故舍去

综上: $\frac{S_{\triangle ADB}}{S_{\triangle AEM}}$ 的值为 $\frac{4}{3}$ 或 $\frac{4}{7}$

【点睛】 本题是三角形综合题, 考查了等腰直角三角形的性质, 全等三角形的判定和性质, 添加恰当辅助线构造全等三角形是本题的关键.