

2025 学年第一学期八年级期中评价

数学学科试卷

(时间: 100 分钟 满分: 100 分)

考生注意:

1. 本卷有 4 大题, 共 26 小题.
2. 试卷满分 100 分. 考试时间 100 分钟.
3. 按要求在答题纸上作答, 在试卷、草稿纸上答题一律无效.

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 2 分, 共 12 分. 在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求)

1. 下列各数: $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 、 $-\sqrt[3]{9}$ 、 $\frac{1}{2025}$ 、 $-\pi$ 、 $\sqrt[3]{-8}$ 、 -0.1010010001 、 $5.\dot{2}\dot{6}$, 其中无理数有 () 个
- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了无理数的识别, 无限不循环小数叫无理数, 初中范围内常见的无理数有三类: ① π 类; ②开方开不尽的数, 如 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ 等; ③虽有规律但却是无限不循环的小数, 如 $0.1010010001\cdots$ (两个 1 之间依次增加 1 个 0), $0.2121121112\cdots$ (两个 2 之间依次增加 1 个 1) 等, 据此可得答案.

【详解】解: $\sqrt[3]{-8} = -2$,

在数 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 、 $-\sqrt[3]{9}$ 、 $\frac{1}{2025}$ 、 $-\pi$ 、 $\sqrt[3]{-8}$ 、 -0.1010010001 、 $5.\dot{2}\dot{6}$ 中, 无理数有 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $-\sqrt[3]{9}$, $-\pi$, 共 3 个,

故选: B.

2. 下列说法正确的是 ()

- A. 2 是 -4 的算术平方根 B. ± 4 是 16 的算术平方根
- C. $(-6)^2$ 的平方根是 ± 6 D. 1 的平方根是它本身

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了求一个数的平方根和算术平方根, 对于两个实数 a 、 b , 若满足 $a^2 = b$, 那么 a 就叫做 b 的平方根, 若 a 为非负数, 那么 a 就叫做 b 的算术平方根, 据此求解即可.

【详解】解：A、-4没有算术平方根，原说法错误，不符合题意；

B、4是16的算术平方根，-4不是16的算术平方根，原说法错误，不符合题意；

C、 $(-6)^2 = 36$ 的平方根是 ± 6 ，原说法正确，符合题意；

D、1的平方根是 ± 1 ，原说法错误，不符合题意；

故选：C.

3. 下列说法中正确的有（ ）

① $\sqrt{2}$ ， $\sqrt{3}$ ， $\sqrt{4}$ 都是无理数；

②无理数包括正无理数、负无理数和零；

③实数分为正实数和负实数两类；

④绝对值最小的实数是0；

⑤一个数的平方根等于它本身，这个数是0或1；⑥有理数与数轴上的点一一对应.

A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了实数的分类，无理数的定义，求一个数的算术平方根和平方根，实数与数轴的关系，根据 $\sqrt{4} = 2$ 可判断①；根据0是有理数可判断②；根据0是实数可判断③；根据绝对值的非负性可判断④；根据平方根的定义可判断⑤；根据实数与数轴上的点一一对应可判断⑥.

【详解】解：① $\sqrt{4} = 2$ 是有理数，原说法错误；

②无理数包括正无理数、负无理数，不包括零，原说法错误；

③实数分为正实数、负实数和0三类，原说法错误；

④绝对值最小的实数是0，原说法正确；

⑤一个数的平方根等于它本身，这个数是0，原说法错误；

⑥实数与数轴上的点一一对应，原说法错误；

∴说法正确的只有1个，

故选：A.

4. 下列等式中，从左到右的变形过程正确的是（ ）

A. $\sqrt{a(a-1)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a-1}$

B. $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

C. $\sqrt{(a-1)^2} = a-1$

D. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

【答案】D

【解析】

【详解】解：由 $(x+3)(x-5) = x^2 - 2x - 15$ 是有理数，则 $x^2 - 2x$ 为有理数，

A、 $x^2 - 15 = x^2 - 2x - 15 + 2x$ ，又 $x^2 - 2x - 15$ 是有理数， x 是无理数

所以 $x^2 - 2x - 15 + 2x$ 是无理数，不符合题意；

B、 $(x-3)(x+5) = x^2 + 2x - 15 = x^2 - 2x - 15 + 4x$ ，

同理 $x^2 - 2x - 15 + 4x$ 是无理数，不符合题意；

C、 $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x - 15 + 4x + 16$ ，又 $x^2 - 2x - 15$ 是有理数， x 是无理数

所以 $4x + 16$ 为无理数，即 $x^2 - 2x - 15 + 4x + 16$ 是无理数，不符合题意；

D、 $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ ，又 $x^2 - 2x$ 是有理数，

所以 $x^2 - 2x + 1$ 是有理数，即 $(x-1)^2$ 是有理数，符合题意。

故选：D.

二、填空题（本大题共 12 小题，每小题 2 分，满分 24 分）

7. $\sqrt{16}$ 的平方根是_____.

【答案】 ± 2

【解析】

【详解】解： $\because \sqrt{16} = 4$

$\therefore \sqrt{16}$ 的平方根是 ± 2 .

故答案为 ± 2 .

8. 珠穆朗玛峰的最新雪面高度为 8848.86 米，将数据 8848.86 用科学记数法表示为_____.

【答案】 8.84886×10^3

【解析】

【分析】本题考查的是科学记数法，科学记数法表示形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 对于较大数， n 为正整数，等于原数整数位数减 1，再进一步求解即可.

【详解】解： $8848.86 = 8.84886 \times 10^3$.

故答案为： 8.84886×10^3 .

9. 比较大小： $-3\sqrt{2}$ _____ $-2\sqrt{3}$ （填“>”或“<”或“=”）.

【答案】 <

【解析】

【详解】解： $\because -3\sqrt{2} = -\sqrt{18}$ ， $-2\sqrt{3} = -\sqrt{12}$ ，且 $18 > 12$ ，

$$\therefore \sqrt{18} > \sqrt{12},$$

$$\therefore -\sqrt{18} < -\sqrt{12},$$

$$\therefore -3\sqrt{2} < -2\sqrt{3}.$$

故答案为： <

10. 方程 $4x^2 = 2x$ 的解是_____.

【答案】 $x = 0$ 或 $x = \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程，先移项，然后利用因式分解法解方程即可得到答案.

【详解】解： $\because 4x^2 = 2x$ ，

$$\therefore 4x^2 - 2x = 0,$$

$$\therefore 2x(2x - 1) = 0,$$

$$\therefore 2x = 0 \text{ 或 } 2x - 1 = 0,$$

$$\text{解得 } x = 0 \text{ 或 } x = \frac{1}{2},$$

$$\text{故答案为： } x = 0 \text{ 或 } x = \frac{1}{2}.$$

11. 若代数式 $\frac{x\sqrt{x+1}}{(x-2)^2}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq -1$ 且 $x \neq 2$

【解析】

【分析】 本题考查了分式有意义的条件，二次根式有意义的条件和解一元一次不等式，熟练掌握分式有意义的条件，二次根式有意义的条件是解题的关键.

根据分式有意义的条件，二次根式有意义的条件得到不等式求解即可.

【详解】解： 由题意得
$$\begin{cases} (x-2)^2 \neq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } x \geq -1 \text{ 且 } x \neq 2,$$

故答案为: $x \geq -1$ 且 $x \neq 2$.

12. 若 $6.24 \approx 2.498^2$, $62.4 \approx 7.899^2$, 则 $\sqrt{0.624} \approx$ _____.

【答案】 0.7899

【解析】

【分析】 本题主要考查了算术平方根的概念, 解题的关键是理解算术平方根每向左 (或右) 移动一位, 则被开方数向相同的方向移动两位, 反之, 被开方数每移动两位, 则算术平方根向相同的方向移动一位. 利用算术平方根的概念进行求解即可.

【详解】 解: $\sqrt{0.624} = \sqrt{62.4 \times 0.01} = 0.1\sqrt{62.4} \approx 0.1 \times 7.899 = 0.7899$

故答案为: 0.7899.

13. 如果最简根式 $\sqrt{x^2 - 6x}$ 与 $\sqrt{5 - 2x}$ 是同类二次根式, 则 $x =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查了同类二次根式的定义, 由同类二次根式的定义得 $x^2 - 6x = 5 - 2x$, 即可求解; 理解定义 “几个二次根式, 化成最简二次根式后, 如果被开方数相同, 那么这几个二次根式叫同类二次根式.” 是解题的关键.

【详解】 解: 由题意得

$$x^2 - 6x = 5 - 2x,$$

$$\text{解得: } x_1 = -1, \quad x_2 = 5,$$

$\therefore$ 当 $x = 5$ 时,

$$x^2 - 6x = -5 < 0,$$

$\therefore x = 5$ 舍去,

$$\therefore x = -1,$$

故答案为: -1.

14. 解不等式: $\sqrt{3}x - 3 < 2x$ 的解集是 _____.

【答案】 $x > -3\sqrt{3} - 6$.

【解析】

【分析】 先移项, 然后系数化为 1, 即可求出不等式的解集.

【详解】解： $\sqrt{3}x - 3 < 2x$,

$$\therefore \sqrt{3}x - 2x < 3,$$

$$\therefore (\sqrt{3} - 2)x < 3,$$

$$\therefore x > \frac{3}{\sqrt{3} - 2},$$

$$\therefore x > -3(\sqrt{3} + 2),$$

$$\therefore x > -3\sqrt{3} - 6.$$

故答案为： $x > -3\sqrt{3} - 6$.

【点睛】 本题考查了一元一次不等式的解法，是基础题，正确计算是解题的关键.

15. 已知 $ab > 0$ ，化简二次根式 $a\sqrt{\frac{-b}{a^2}}$ 的正确结果是_____.

【答案】 $-\sqrt{-b}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质，熟练掌握二次根式的性质是解题的关键. 根据二次根式的性质求解即可.

【详解】解：由 $a\sqrt{\frac{-b}{a^2}}$ 中被开方数总是要大于等于 0 可知，

$$\therefore \text{分母 } a^2 > 0,$$

$$\therefore \text{分子 } -b \geq 0, \text{ 则 } b \leq 0,$$

$$\text{又 } ab > 0, \text{ 则 } a < 0, b < 0,$$

$$\therefore a\sqrt{\frac{-b}{a^2}} = a \times \frac{\sqrt{-b}}{|a|} = a \times \frac{\sqrt{-b}}{-a} = -\sqrt{-b},$$

故答案为： $-\sqrt{-b}$.

16. 化简： $\frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11} + \sqrt{13}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{119} + \sqrt{121}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查了分母有理化、利用二次根式的性质化简，通过分母有理化，将每一项化为差的形式，再利用裂项相消即可求解.

【详解】 解： $\because \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+2})(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{2},$

$$\therefore \text{原式} = \frac{\sqrt{11} - \sqrt{9}}{2} + \frac{\sqrt{13} - \sqrt{11}}{2} + \dots + \frac{\sqrt{121} - \sqrt{119}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{121} - \sqrt{9}}{2}$$

$$= \frac{11 - 3}{2}$$

$$= 4.$$

故答案为：4.

17. 已知实数 a 满足 $|2025 - a| + \sqrt{a - 2026} = a$ ，那么 $a - 2025^2$ 的值是_____.

【答案】 2026

【解析】

【分析】 根据二次根式的有意义的条件，化简绝对值，后计算解答即可.

本题考查了二次根式的被开方数的非负性，绝对值的化简，有理数的乘方，熟练掌握非负性是解题的关键.

【详解】 解： 根据题意得 $a - 2026 \geq 0$,

解得 $a \geq 2026$,

$$\therefore |2025 - a| + \sqrt{a - 2026} = a,$$

$$\therefore a - 2025 + \sqrt{a - 2026} = a,$$

$$\therefore \sqrt{a - 2026} = 2025,$$

$$\therefore a - 2026 = 2025^2,$$

$$\therefore a - 2025^2 = 2026,$$

故答案为：2026.

18. 对于有理数 a, b ，定义 $\min\{a, b\}$ 的含义为：当 $a < b$ 时， $\min\{a, b\} = a$ ，例： $\min\{1, -2\} = -2$. 已知 $\min\{\sqrt{40}, a\} = a$ ， $\min\{\sqrt{40}, b\} = \sqrt{40}$ ，且 a 和 b 为两个连续正整数，则 $a + b$ 的平方根是_____.

【答案】 $\pm\sqrt{13}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了新定义，无理数的估算，求一个数的平方根，根据新定义可得 $a < \sqrt{40} < b$ ，再估算出 $\sqrt{40}$ 的取值范围，从而确定 a 、 b 的值，最后根据平方根的定义求解即可。

【详解】 解： $\because \min\{\sqrt{40}, a\} = a, \min\{\sqrt{40}, b\} = \sqrt{40},$

$$\therefore a < \sqrt{40} < b,$$

$$\because \sqrt{36} < \sqrt{40} < \sqrt{49},$$

$$\therefore 6 < \sqrt{40} < 7,$$

$\therefore a$ 和 b 为两个连续正整数，

$$\therefore a = 6, b = 7,$$

$$\therefore a + b = 13,$$

$$\therefore a + b \text{ 的平方根是 } \pm\sqrt{13},$$

故答案为： $\pm\sqrt{13}$.

三. 简答题 (满分 24 分)

19. 计算

$$(1) \left(\sqrt{24} - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \times \sqrt{3} - \sqrt[3]{-27} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$$

$$(2) 2a\sqrt{\frac{b}{9a}} - b\sqrt{\frac{a}{4b}} + \frac{1}{a}\sqrt{a^3b} - \frac{2}{b}\sqrt{ab^3} \quad (\text{其中 } a > 0, b > 0)$$

$$(3) \frac{5}{b}\sqrt{ab^3} \times \left(-\frac{2}{5}\sqrt{ab} \right) \div \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4b}{a}} \quad (\text{其中 } a > 0, b > 0)$$

$$(4) \left(\frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} - \frac{m-2\sqrt{mn}+n}{\sqrt{n}-\sqrt{m}} \right) \div \frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} \quad (\text{其中 } m \geq 0, n \geq 0, m \neq n)$$

【答案】 (1) $6\sqrt{2} + 2$

$$(2) -\frac{5\sqrt{ab}}{6}$$

$$(3) -3a\sqrt{ab}$$

$$(4) 2m - 2n$$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算，熟练掌握二次根式的运算法则是解题的关键.

(1) 根据二次根式的乘法以及立方根和算术平方根的性质化简，再合并即可；

(2) 根据二次根式的运算法则化简即可

(3) 根据二次根式的运算法则化简即可；

(4) 根据二次根式的运算法则化简即可.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: } & \left(\sqrt{24}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\times\sqrt{3}-\sqrt[3]{-27}+\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} \\ & =\left(2\sqrt{6}-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\times\sqrt{3}-(-3)+|1-\sqrt{2}| \\ & =\frac{5\sqrt{6}}{3}\times\sqrt{3}+3+\sqrt{2}-1 \\ & =5\sqrt{2}+3+\sqrt{2}-1 \\ & =6\sqrt{2}+2;\end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: } & 2a\sqrt{\frac{b}{9a}}-b\sqrt{\frac{a}{4b}}+\frac{1}{a}\sqrt{a^3b}-\frac{2}{b}\sqrt{ab^3} \\ & =2a\times\frac{\sqrt{ab}}{3a}-b\times\frac{\sqrt{ab}}{2b}+\frac{1}{a}\times a\sqrt{ab}-\frac{2}{b}\times b\sqrt{ab} \\ & =\frac{2\sqrt{ab}}{3}-\frac{\sqrt{ab}}{2}+\sqrt{ab}-2\sqrt{ab} \\ & =-\frac{5\sqrt{ab}}{6};\end{aligned}$$

【小问 3 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: } & \frac{5}{b}\sqrt{ab^3}\times\left(-\frac{2}{5}\sqrt{ab}\right)\div\frac{1}{3}\sqrt{\frac{4b}{a}} \\ & =\frac{5}{b}\sqrt{ab^3}\times\left(-\frac{2}{5}\sqrt{ab}\right)\times 3\sqrt{\frac{a}{4b}}\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{5}{b} \times \left(-\frac{2}{5} \right) \times 3 \right] \times \sqrt{ab^3 \times ab \times \frac{a}{4b}}$$

$$= -\frac{6}{b} \times \frac{\sqrt{a^3 b^3}}{2}$$

$$= -\frac{6}{b} \times \frac{ab\sqrt{ab}}{2}$$

$$= -3a\sqrt{ab};$$

【小问 4 详解】

$$\text{解: } \left(\frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} - \frac{m-2\sqrt{mn}+n}{\sqrt{n}-\sqrt{m}} \right) \div \frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$$

$$= \left[\frac{(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} - \frac{(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2}{\sqrt{n}-\sqrt{m}} \right] \div \frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$$

$$= \left[\sqrt{m}-\sqrt{n} + (\sqrt{m}-\sqrt{n}) \right] \times (\sqrt{m}+\sqrt{n})$$

$$= 2(\sqrt{m}-\sqrt{n})(\sqrt{m}+\sqrt{n})$$

$$= 2(m-n)$$

$$= 2m-2n.$$

20. 解下列方程:

$$(1) \quad 5(x-3) = 2x(x-3)$$

$$(2) \quad (2x+1)^2 - 7(2x+1) = -12$$

$$(3) \quad \text{解关于 } x \text{ 的方程: } x^2 - x + n = 2 \quad (\text{用配方法})$$

$$(4) \quad x^2 - \sqrt{6}x + 1 = 0;$$

$$\text{【答案】} (1) \quad x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{5}{2}$$

$$(2) \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{3}{2}$$

$$(3) \quad \text{当 } n \leq \frac{9}{4} \text{ 时, } x_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - n}, \quad x_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - n}; \quad \text{当 } n > \frac{9}{4} \text{ 时, 方程无实数根}$$

$$(4) \quad x_1 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，熟练掌握解一元二次方程的常见方法是解题的关键.

- (1) 利用因式分解法解方程即可；
- (2) 利用换元法解方程即可；
- (3) 利用配方法解方程即可；
- (4) 利用公式法解方程即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } 5(x-3) = 2x(x-3)$$

$$5(x-3) - 2x(x-3) = 0$$

$$(x-3)(5-2x) = 0$$

$$x-3=0 \text{ 或 } 5-2x=0$$

$$\therefore x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{5}{2};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } (2x+1)^2 - 7(2x+1) = -12$$

$$(2x+1)^2 - 7(2x+1) + 12 = 0$$

$$\text{令 } t = 2x+1, \text{ 则 } t^2 - 7t + 12 = 0,$$

$$\therefore (t-3)(t-4) = 0,$$

$$\text{解得 } t_1 = 3, \quad t_2 = 4,$$

$$\therefore 2x+1 = 3 \text{ 或 } 2x+1 = 4,$$

$$\text{解得 } x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{3}{2};$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: } x^2 - x + n = 2$$

$$x^2 - x = 2 - n$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 2 - n + \frac{1}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} - n$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \frac{9}{4} - n \geq 0, \text{ 即 } n \leq \frac{9}{4},$$

$$\text{则 } x - \frac{1}{2} = \pm \sqrt{\frac{9}{4} - n},$$

$$\therefore x_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - n}, \quad x_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - n};$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \frac{9}{4} - n < 0, \text{ 即 } n > \frac{9}{4},$$

则方程无实数根;

$$\therefore \text{综上所述, 当 } n \leq \frac{9}{4} \text{ 时, } x_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - n}, \quad x_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - n}; \text{ 当 } n > \frac{9}{4} \text{ 时, 方程无实数根;}$$

【小问 4 详解】

$$\text{解: } x^2 - \sqrt{6}x + 1 = 0$$

$$a = 1, \quad b = -\sqrt{6}, \quad c = 1,$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-\sqrt{6})^2 - 4 \times 1 \times 1 = 2 > 0,$$

$\therefore$ 方程有 2 个不相等的实数根,

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore x_1 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

四. 解答题. (本大题共 6 题, 21-22 题 6 分, 23-24 每题 7 分, 25 每题 6 分, 26 题 8 分, 满分 40 分)

21. 如图 1, 由 5 个边长为 1 的小正方形组成的长方形, 通过剪拼可以拼成一个大正方形 $ABCD$.

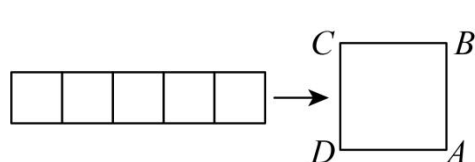


图 1

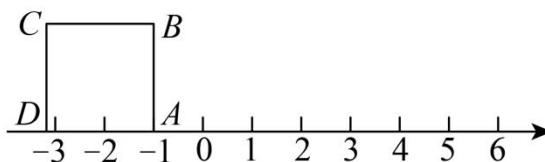


图 2

(1) 则大正方形 $ABCD$ 的边长为_____;

(2) 将图 1 中的正方形 $ABCD$ 放到数轴上, 如图 2, 点 A 表示的数为 -1 , 若正方形从当前状态沿数轴正

方向翻滚，把点 B 翻滚到数轴上时，记为第一次翻滚；点 C 翻滚到数轴上时记为第二次翻滚，经过三次翻滚，点 D 滚到数轴上的点 P 时，点 P 表示的数为_____；

(3) 是否存在正整数 n ，使得该正方形经过 n 次翻滚后，其顶点 A 、 B 、 C 、 D 中某个点与数轴上的 2025 重合？答：_____（填“存在”或“不存在”）；

(4) 在 (2) 的基础上以数 2 对应的点为折点，将数轴向右对折，则点 D 与数_____对应的点重合。

【答案】(1) $\sqrt{5}$

(2) $-1+3\sqrt{5}$

(3) 不存在 (4) $5+\sqrt{5}$

【解析】

【分析】本题考查了实数与数轴，算术平方根，读懂题意是解题的关键。

(1) 根据题意可求出正方形 $ABCD$ 的面积，进而得到正方形的边长；

(2) 根据点 A 表示的数和正方形的边长即可得到点 P 表示的数；

(3) 设存在正整数 n ，则 $-1+\sqrt{5}n=2025$ ，由 $\sqrt{5}=\frac{2026}{n}$ 进行判断即可求解；

(4) 设点 D 与数 x 对应的点重合，根据对折可得， $\frac{-1-\sqrt{5}+x}{2}=2$ ，即可求解。

【小问 1 详解】

解：由题意得，正方形 $ABCD$ 的面积为： $5\times 1\times 1=5$ ，

$\therefore$ 边长为： $\sqrt{5}$ ；

故答案为： $\sqrt{5}$ ；

【小问 2 详解】

$\because$ 点 A 表示的数为 -1 ，正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{5}$ ，

$\therefore$ 第一次翻滚后 B 表示的数为 $-1+\sqrt{5}$ ，

第二次翻滚后 C 表示的数为 $-1+2\sqrt{5}$ ，

第三次翻滚后 D 表示的数为 $-1+3\sqrt{5}$ ，

$\therefore$ 经过三次翻滚，点 D 滚到数轴上的点 P ，

$\therefore$ 点 P 表示的数为 $-1+3\sqrt{5}$ ；

故答案为: $-1+3\sqrt{5}$;

【小问 3 详解】

设存在正整数 n , 则 $-1+\sqrt{5}n=2025$,

$$\therefore \sqrt{5} = \frac{2026}{n},$$

$\because n$ 为正整数,

$\therefore \frac{2026}{n}$ 为有理数, 而 $\sqrt{5}$ 为无理数,

$\therefore$ 上述等式不成立, 即不存在正整数 n ;

故答案为: 不存在;

【小问 4 详解】

设点 D 与数 x 对应的点重合,

由题意得: $\frac{-1-\sqrt{5}+x}{2}=2$,

解得: $x=4-(-1-\sqrt{5})=5+\sqrt{5}$,

$\therefore$ 点 D 与数 $5+\sqrt{5}$ 对应的点重合.

故答案为: $5+\sqrt{5}$.

22. 已知 $x=\frac{1}{2+\sqrt{3}}, y=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$, 求下列代数式的值.

(1) x^2-xy+y^2

(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$

【答案】 (1) 13 (2) $\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查了分母有理化、通过对完全平方公式变形求值, 熟练掌握二次根式的运算法则是解题的关键.

(1) 利用分母有理化将 x, y 化简, 得到 $x+y=4$, $xy=1$, 再利用完全平方公式变形求值即可;

(2) 先求出 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$ 的值, 再根据 $\sqrt{x}+\sqrt{y} \geq 0$, 即可求解.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } x = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3},$$

$$y = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 2+\sqrt{3},$$

$$\therefore x+y=4, \quad xy=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1,$$

$$\therefore x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy=4^2-3\times 1=13;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: 由 (1) 得, } x+y=4, \quad xy=1,$$

$$\therefore (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+y+2\sqrt{xy}=4+2\times\sqrt{1}=6,$$

$$\therefore \sqrt{x}+\sqrt{y}\geq 0,$$

$$\therefore \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{6}.$$

23. 已知 $5+\sqrt{11}$ 的小数部分为 a , $5-\sqrt{11}$ 的小数部分为 b .

$$\text{先化简, 再求值: } \frac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b} - \left(\frac{ab\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{b}}{b-\sqrt{ab}} \right) \div \frac{\sqrt{b}}{b+\sqrt{ab}}.$$

【答案】 $-ab$, $23-7\sqrt{11}$

【解析】

【分析】此题考查了二次根式的化简求值, 先根据题意求出 $5+\sqrt{11}$ 的整数部分为 8, $5-\sqrt{11}$ 的整数部分为 1, $a=\sqrt{11}-3$, $b=4-\sqrt{11}$, 再利用二次根式的运算法则进行计算得到化简结果, 再把 $a=\sqrt{11}-3$, $b=4-\sqrt{11}$ 代入求值即可.

【详解】解: $\because 3<\sqrt{11}<4$,

$$\therefore 8<5+\sqrt{11}<9, \quad 1<5-\sqrt{11}<2,$$

$$\therefore 5+\sqrt{11} \text{ 的整数部分为 } 8, \quad 5-\sqrt{11} \text{ 的整数部分为 } 1,$$

$$\therefore 5+\sqrt{11} \text{ 的小数部分为 } a=5+\sqrt{11}-8=\sqrt{11}-3, \quad 5-\sqrt{11} \text{ 的小数部分为 } b=5-\sqrt{11}-1=4-\sqrt{11},$$

$$\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b} - \left(\frac{ab\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{b}}{b-\sqrt{ab}} \right) \div \frac{\sqrt{b}}{b+\sqrt{ab}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b} - \left(\frac{ab\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a})} \right) \div \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \\
&= \frac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b} - \left(\frac{ab}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right) \div \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \\
&= \frac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b} - \frac{ab(\sqrt{a}-\sqrt{b})+\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \div \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \\
&= \frac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b} - \frac{ab(a-b)+a+b+2\sqrt{ab}}{a-b} \\
&= \frac{-ab(a-b)}{a-b} \\
&= -ab
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{原式} = -ab = -(\sqrt{11}-3)(4-\sqrt{11}) = 23-7\sqrt{11}$$

24. 数学教育家波利亚曾说：对一个数学问题，改变它的形式，变换它的结构，直到发现有价值的东西，这是数学解题的一个重要原则。有这样一类题目：如何将双重二次根式 $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ 化简，如果你能找到两个数

m, n ，使 $m^2 + n^2 = a$ 且 $mn = \sqrt{b}$ ，则 $a \pm 2\sqrt{b}$ 可变形为 $m^2 + n^2 \pm 2mn$ ，即 $(m \pm n)^2$ ，从而使 $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ 得以化简。例如：

$$\begin{aligned}
\because 5+2\sqrt{6} &= 3+2+2\sqrt{6} = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 \\
\therefore \sqrt{5+2\sqrt{6}} &= \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} = |\sqrt{3}+\sqrt{2}| = \sqrt{3}+\sqrt{2}
\end{aligned}$$

请用上述方法探索并解决下列问题：

(1) 化简： $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ ；

(2) 化简： $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ ；

(3) 若 $a+10\sqrt{3} = (x+\sqrt{3}y)^2$ ，且 a, x, y 为正整数，求 a 的值。

【答案】(1) $\sqrt{3}+1$

(2) $\sqrt{5}-2$

(3) a 的值为：76 或 28.

【解析】

【分析】(1) 根据阅读部分的提示把 $4+2\sqrt{3}$ 化为 $(\sqrt{3}+1)^2$ ，从而可得答案；

(2) 根据阅读部分的提示把 $9-4\sqrt{5}$ 化为 $(\sqrt{5}-2)^2$ ，从而可得答案；

(3) 由 $(x+\sqrt{3}y)^2 = x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2$ ，可得 $a+10\sqrt{3} = x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2$ ，可得 $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = a \\ xy = 5 \end{cases}$ ，结合

a, x, y 为正整数，从而可得答案.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 1^2} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1;$$

【小问 2 详解】

$$\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 4\sqrt{5} + 2^2} = \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = \sqrt{5}-2;$$

【小问 3 详解】

$$\therefore (x+\sqrt{3}y)^2 = x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2, \quad a+10\sqrt{3} = (x+\sqrt{3}y)^2,$$

$$\therefore a+10\sqrt{3} = x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2,$$

$$\therefore \begin{cases} x^2 + 3y^2 = a \\ 2xy = 10 \end{cases}, \quad \text{即} \begin{cases} x^2 + 3y^2 = a \\ xy = 5 \end{cases},$$

$\therefore a, x, y$ 为正整数,

$$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases},$$

$$\text{当 } \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases} \text{ 时, } a = x^2 + 3y^2 = 1^2 + 3 \times 5^2 = 76,$$

$$\text{当 } \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases} \text{ 时, } a = x^2 + 3y^2 = 5^2 + 3 \times 1^2 = 28,$$

综上: a 的值为: 76 或 28.

【点睛】 本题考查的是二次根式的乘法运算，二次根式的化简，理解题意，掌握化简的方法是解本题的关键.

25. 已知关于 x 的方程 $(m-1)x^2 + 2x - m - 1 = 0$ 的根都是整数，求实数 m 的所有整数值和方程的整数根.

【答案】 实数 m 的所有整数值为 $-1, 0, 1, 2, 3$ ；当 $m = -1$ 时，方程的整数根为 $x_1 = 1, x_2 = 0$ ；当 $m = 0$ 时，方程的整数根为 $x_1 = x_2 = 1$ ；当 $m = 1$ 时，方程的整数根为 $x = 1$ ；当 $m = 2$ 时，方程的整数根为 $x_1 = 1$ ，

$x_2 = -3$; 当 $m = 3$ 时, 方程的整数根为 $x_1 = 1$, $x_2 = -2$

【解析】

【分析】 本题考查了根据一元二次方程的根的情况求参数、解一元二次方程, 熟练掌握相关知识点是解题的关键. 分 2 种情况讨论: ①当 $m-1=0$ 时, 即 $m=1$, 此时方程为 $2x-2=0$, 解得 $x=1$, 方程的根是整数, 符合题意; ②当 $m-1 \neq 0$ 时, 则方程变为 $(x-1)[(m-1)x+(m+1)]=0$, 解得 $x_1=1$, $x_2 = -1 - \frac{2}{m-1}$, 由题意得 $-1 - \frac{2}{m-1}$ 是整数, 据此求出 m 的值, 再分别求出对应的方程的整数根即可解答.

【详解】 解: ①当 $m-1=0$ 时, 即 $m=1$, 此时方程为 $2x-2=0$, 解得 $x=1$, 方程的根是整数, 符合题意;

②当 $m-1 \neq 0$ 时, 则方程变为 $(x-1)[(m-1)x+(m+1)]=0$,

$$x-1=0 \text{ 或 } (m-1)x+(m+1)=0,$$

$$\therefore x_1=1, \quad x_2 = -\frac{m+1}{m-1} = -1 - \frac{2}{m-1},$$

$\therefore$ 方程的根都是整数,

$$\therefore -1 - \frac{2}{m-1} \text{ 是整数,}$$

$$\therefore (m-1) \text{ 是 } 2 \text{ 的因数,}$$

$$\therefore m-1 = \pm 1, \pm 2,$$

解得 $m = -1, 0, 2, 3$,

$$\text{当 } m = -1 \text{ 时, 方程的整数根为 } x_1 = 1, \quad x_2 = -1 - \frac{2}{-1-1} = 0;$$

$$\text{当 } m = 0 \text{ 时, 方程的整数根为 } x_1 = 1, \quad x_2 = -1 - \frac{2}{0-1} = 1;$$

$$\text{当 } m = 2 \text{ 时, 方程的整数根为 } x_1 = 1, \quad x_2 = -1 - \frac{2}{2-1} = -3;$$

$$\text{当 } m = 3 \text{ 时, 方程的整数根为 } x_1 = 1, \quad x_2 = -1 - \frac{2}{3-1} = -2;$$

$\therefore$ 综上所述, 实数 m 的所有整数值为 $-1, 0, 1, 2, 3$;

$$\text{当 } m = -1 \text{ 时, 方程的整数根为 } x_1 = 1, \quad x_2 = 0;$$

$$\text{当 } m = 0 \text{ 时, 方程的整数根为 } x_1 = x_2 = 1;$$

$$\text{当 } m = 1 \text{ 时, 方程的整数根为 } x = 1;$$

$$\text{当 } m = 2 \text{ 时, 方程的整数根为 } x_1 = 1, \quad x_2 = -3;$$

当 $m=3$ 时, 方程的整数根为 $x_1=1$, $x_2=-2$.

26. 问题: 已知方程 $x^2+x-1=0$, 求一个一元二次方程, 使它的根分别是已知方程根的 2 倍.

解: 设所求方程的根为 y , 则 $y=2x$, 所以 $x=\frac{y}{2}$, 把 $x=\frac{y}{2}$, 代入已知方程, 得 $\left(\frac{y}{2}\right)^2+\frac{y}{2}-1=0$.

化简, 得 $y^2+2y-4=0$, 故所求方程为 $y^2+2y-4=0$.

这种利用方程根的代换求新方程的方法, 我们称为“换根法”.

请用阅读材料提供的“换根法”求新方程 (要求: 把所求方程化为一般形式).

(1) 已知方程 $x^2+2x-1=0$, 求一个一元二次方程, 使它的根分别是已知方程根的相反数, 则所求方程为_____;

(2) 已知关于 y 的一元二次方程 $cy^2+by+a=0$ 的根 ($c \neq 0$, 有两个不等于零的实数根) 分别是某个已知一元二次方程的根的倒数, 求该已知的一元二次方程.

(3) 已知关于 x 的一元二次方程 $(m^2+4)x^2+(4m+8)x+4=0$ ($m \leq 15$) 有两个不等于零的实数根, 求一个一元二次方程, 使它的根分别是已知方程根的倒数且它的两个根都为整数.

【答案】 (1) $y^2-2y-1=0, y^2-2y-1=0$

(2) $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$

(3) $y^2+2y+1=0$ 或 $y^2+6y+5=0$

【解析】

【分析】 (1) 设所求方程的根为 y , 根据题意可得 $x+y=0$, 所以 $x=-y$, 把 $x=-y$ 代入方程 $x^2+2x-1=0$, 即可得出答案;

(2) 设原方程的根为 x , 则 $x=\frac{1}{y} (x \neq 0)$, 所以 $y=\frac{1}{x} (x \neq 0)$, 代入方程 $cy^2+by+a=0$, 得

$ax^2+bx+c=0$, 再用反证法证明 $a \neq 0$ 即可;

(3) 设所求方程的根为 y , 则 $y=\frac{1}{x} (x \neq 0)$, 所以 $x=\frac{1}{y} (y \neq 0)$, 代入原方程, 得

$4y^2+(4m+8)y+(m^2+4)=0$, 由方程有两个实数根可得 $\Delta=b^2-4ac=64m \geq 0$, 于是可得 $m \geq 0$, 进而可得 $0 \leq m < 15$, 用公式法解一元二次方程可得 $y=-\frac{1}{2}m-1 \pm \sqrt{m}$, 由根是整数可知 m 为偶数且为完全

平方数，因而可得 $m=0$ 或 $m=4$ ，代入方程即可得出答案.

【小问 1 详解】

解：设所求方程的根为 y ，根据题意可得：

$$x+y=0,$$

$$\therefore x=-y,$$

把 $x=-y$ 代入方程 $x^2+2x-1=0$,

$$\text{得: } y^2-2y-1=0,$$

故答案为: $y^2-2y-1=0$;

【小问 2 详解】

解：设原方程的根为 x ，则 $x=\frac{1}{y}(x \neq 0)$ ，所以 $y=\frac{1}{x}(x \neq 0)$ ，

代入方程 $cy^2+by+a=0$ ，得：

$$c\left(\frac{1}{x}\right)^2+b\left(\frac{1}{x}\right)+a=0,$$

去分母，得: $ax^2+bx+c=0$ ，

若 $a=0$ ，则有: $cy^2+by=0$ ，

即: $y(cy+b)=0$ ，

于是，方程 $cy^2+by+a=0$ 有一个根为 0，这不合题意，

$$\therefore a \neq 0,$$

$\therefore$ 原方程为: $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$;

【小问 3 详解】

解：设所求方程的根为 y ，则 $y=\frac{1}{x}(x \neq 0)$ ，所以 $x=\frac{1}{y}(y \neq 0)$ ，

代入原方程，得: $(m^2+4)\left(\frac{1}{y}\right)^2+(4m+8)\left(\frac{1}{y}\right)+4=0$ ，

去分母，得: $4y^2+(4m+8)y+(m^2+4)=0$ ，

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (4m+8)^2 - 4 \times 4(m^2 + 4)$$

$$= 64m \geq 0,$$

$$\therefore m \geq 0,$$

$$\text{又} \because m < 15,$$

$$\therefore 0 \leq m < 15,$$

$$\therefore y = \frac{-(4m+8) \pm \sqrt{64m}}{2 \times 4}$$

$$= -\frac{1}{2}m - 1 \pm \sqrt{m},$$

$\therefore$ 根是整数,

$\therefore m$ 为偶数且为完全平方数,

$$\therefore m = 0 \text{ 或 } m = 4,$$

$\therefore$ 所求方程为:

$$4y^2 + 8y + 4 = 0, \text{ 即: } y^2 + 2y + 1 = 0,$$

$$\text{或 } 4y^2 + 24y + 20 = 0, \text{ 即: } y^2 + 6y + 5 = 0.$$

【点睛】 本题主要考查了相反数的应用，等式的性质1，一元二次方程的解，倒数，等式的性质2，提公因式法分解因式，反证法，根据一元二次方程根的情况求参数，公式法解一元二次方程等知识点，深刻理解“换根法”并能加以运用是解题的关键.