

2025 学年川中南校第一学期八年级数学期中质量检测

(考试时间: 90 分钟, 满分: 100 分)

一、选择题(本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 在数字 $\frac{1}{7}, 3.33, \frac{\pi}{2}, 0.\dot{2}5, 0, 2.121121112\cdots$ (位数无限且相邻两个 2 之间依次增加 1 个 1), $-\sqrt{0.9}, \sqrt[3]{\frac{1}{27}}$ 中, 无理数的个数是 ()

A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了无理数的定义, 无限不循环小数是无理数.

判断每个数字是否为无理数即可.

【详解】 解: $\frac{1}{7}$ 是分数, 是有理数;

3.33 是有限小数, 是有理数;

$\frac{\pi}{2}$ 含无理数 π , 是无理数;

0.25 是无限循环小数, 是有理数;

0 是整数, 是有理数;

2.121121112 $\cdots$ (位数无限且相邻两个 2 之间依次增加 1 个 1) 是无限不循环小数, 是无理数;

$-\sqrt{0.9} = -\sqrt{\frac{9}{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, 是无理数;

$\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$, 是有理数;

$\therefore$ 无理数有 $\frac{\pi}{2}$ 、2.121121112 $\cdots$ (位数无限且相邻两个 2 之间依次增加 1 个 1)、 $-\sqrt{0.9}$, 共 3 个.

故选: B.

2. 下列说法正确的是 ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是分数

B. 数轴上的每一个点都有一个有理数与它对应

C. 如果 $\sqrt[3]{x} = x$, 那么 $x = 0$

D. 两个无理数的和不一定是无理数

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了实数的分类，无理数与数轴上点的一一对应关系，求一个数的立方根，实数的运算等知识，根据实数的分类，无理数与数轴上点的一一对应关系，求一个数的立方根，实数的运算等知识逐项判断即可求解.

【详解】 解：A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是无限不循环小数，是无理数，不是分数，故原选项错误，不合题意；

B. 数轴上的每一个点都有一个实数与它对应，故原选项错误，不合题意；

C. 如果 $\sqrt[3]{x} = x$ ，那么 $x = 0$ 或 $x = \pm 1$ ，故原选项错误，不合题意；

D. 两个无理数的和不一定是无理数，正确，故原选项正确，符合题意.

故选：D

3. 下列根式中，是最简二次根式的是()

A. $\sqrt{0.2b}$

B. $\sqrt{12a-12b}$

C. $\sqrt{x^2-y^2}$

D. $\sqrt{5ab^2}$

【答案】 C

【解析】

【详解】 解：A. $\sqrt{0.2b} = \frac{\sqrt{5b}}{5}$ ，不是最简二次根式；

B. $\sqrt{12a-12b} = 2\sqrt{3a-3b}$ ，不是最简二次根式；

C. $\sqrt{x^2-y^2}$ 是最简二次根式；

D. $\sqrt{5ab^2} = |b|\sqrt{5a}$ ，不是最简二次根式；

故选 C.

【点睛】 本题考查了最简二次根式，在判断最简二次根式的过程中要注意：(1) 在二次根式的被开方数中，只要含有分数或小数，就不是最简二次根式；(2) 在二次根式的被开方数中的每一个因式（或因数），如果幂的指数大于或等于 2，也不是最简二次根式.

4. $\sqrt{a+b}$ 的一个有理化因式是 ()

A. $\sqrt{a-b}$

B. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

C. $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

D. $\sqrt{a+b}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了有理化因式. 有理化因式的定义是两个含有根式的式子相乘后结果为有理式. 对于形

如 $\sqrt{c}$ 的根式，其有理化因式通常为 $\sqrt{c}$ 本身，因为 $\sqrt{c} \cdot \sqrt{c} = c$ ，结果不含根号。

根据有理化因式的定义作答即可。

【详解】解： $\sqrt{a+b}$ 的一个有理化因式是 $\sqrt{a+b}$ 。

故选：D。

5. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-3)x^2 - 3x + m^2 = 9$ 的常数项为 0，则 m 的值为 ()

A. 3

B. 0

C. -3

D. ± 3

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意可知 $m^2 = 9$ ，求得 $m = \pm 3$ ，再根据一元二次方程中二次项系数不为零即可完成。

【详解】 $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(m-3)x^2 - 3x + m^2 = 9$ 的常数项为 0

$\therefore m^2 = 9$ ，则 $m = \pm 3$

$\because m-3 \neq 0$ 即 $m \neq 3$

$\therefore m = -3$

故选 C

【点睛】本题考查一元二次方程中二次项系数不为零的运用，熟练掌握一元二次方程相关知识点是解题关键。

6. 定义新运算“ $\ast$ ”：对于实数 m, n, p, q ，有 $[m, p] \ast [q, n] = mn + pq$ ，其中等式右边是通常的加法和乘法运算，如： $[2, 3] \ast [4, 5] = 2 \times 5 + 3 \times 4 = 22$ 。若关于 x 的方程 $[x^2 + 1, x] \ast [5 - 2k, k] = 0$ 有两个实数根，则 k 的取值范围是 ()

A. $k < \frac{5}{4}$ 且 $k \neq 0$

B. $k \leq \frac{5}{4}$

C. $k \leq \frac{5}{4}$ 且 $k \neq 0$

D. $k \geq \frac{5}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】按新定义规定的运算法则，将其化为关于 x 的一元二次方程，从二次项系数和判别式两个方面入手，即可解决。

【详解】解： $\because [x^2 + 1, x] \ast [5 - 2k, k] = 0$,

$\therefore k(x^2 + 1) + (5 - 2k)x = 0$ 。

整理得， $kx^2 + (5 - 2k)x + k = 0$ 。

∴方程有两个实数根,

∴判别式 $\Delta \geq 0$ 且 $k \neq 0$.

由 $\Delta \geq 0$ 得, $(5-2k)^2 - 4k^2 \geq 0$,

解得, $k \leq \frac{5}{4}$.

∴ k 的取值范围是 $k \leq \frac{5}{4}$ 且 $k \neq 0$.

故选: C

【点睛】本题考查了新定义运算、一元二次方程的根的判别等知识点, 正确理解新定义的运算法则是解题的基础, 熟知一元二次方程的条件、根的不同情况与判别式符号之间的对应关系是解题的关键. 此类题目容易忽略之处在于二次项系数不能为零的条件限制, 要引起高度重视.

二、填空题(本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 使得等式 $\sqrt{\frac{y-3}{y-6}} = \frac{\sqrt{y-3}}{\sqrt{y-6}}$ 成立的 y 的取值范围是_____

【答案】 $y > 6$

【解析】

【分析】本题考查了分式有意义的条件, 二次根式有意义的条件, 熟练掌握相关知识是解题的关键. 根据被开方数是非负数且分母不为 0 列式计算即可.

【详解】解: ∵等式 $\sqrt{\frac{y-3}{y-6}} = \frac{\sqrt{y-3}}{\sqrt{y-6}}$ 成立,

∴ $y-3 \geq 0$ 且 $y-6 > 0$,

解 $y-3 \geq 0$, 得 $y \geq 3$,

解 $y-6 > 0$, 得 $y > 6$,

综上可得 $y > 6$.

故答案为: $y > 6$.

8. 光在真空中传播 1 米所需要的时间约为 0.0000000033 秒, 用科学记数法表示这个数为: _____.

【答案】 3.3×10^{-9}

【解析】

【分析】本题考查科学记数法表示较小数的方法. 根据科学记数法的定义, 将原数表示为 $a \times 10^n$ 的形式,

其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 对于较小的数, n 为负整数, 其绝对值等于小数点移动的位数.

【详解】解: 原数为 0.0000000033. 将小数点向右移动 9 位, 得到 3.3, 因此原数可表示为 3.3×10^{-9} .

故答案为 3.3×10^{-9} .

9. 若 $5x-6$ 与 $1-2x$ 是同一个正数的平方根, 则 x 的值为_____.

【答案】 $\frac{5}{3}$ 或 1

【解析】

【分析】 本题考查平方根的性质, 一元一次方程, 掌握平方根的性质: 一个正数的平方根有两个, 它们互为相反数是解题的关键. 根据平方根的性质可知, 这两个平方根是同一个正数的同一个平方根或不同的平方根, 即这两个平方根相等或互为相反数, 据此求解即可.

【详解】解: $\because 5x-6$ 与 $1-2x$ 是同一个正数的平方根,

$\therefore 5x-6=1-2x$ 或 $5x-6+1-2x=0$,

解得 $x=1$ 或 $x=\frac{5}{3}$,

故答案为: $\frac{5}{3}$ 或 1.

10. 比较大小: $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ _____ $\sqrt{3}$ (用 “>”、“<” 或 “=” 填空).

【答案】 <

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的大小比较. 通过计算两数的差, 根据差的符号判断大小关系, 即可求解.

【详解】解: $\frac{\sqrt{3}-1}{4} - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}-1-4\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-3\sqrt{3}}{4}$,

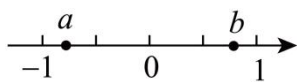
由于 $\sqrt{3} > 0$, 所以 $-1-3\sqrt{3} < 0$,

因此 $\frac{-1-3\sqrt{3}}{4} < 0$,

故 $\frac{\sqrt{3}-1}{4} < \sqrt{3}$.

故答案为: <.

11. 实数 a, b 在数轴上的位置如图所示, 则 $\sqrt{(b-a)^2} + (\sqrt{b})^2 - |a|$ 化简的结果是_____.



【答案】 $2b$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质与化简，实数与数轴，熟练掌握二次根式的性质是解题的关键.

由数轴得 $-1 < a < 0, 0 < b < 1$ ，继而得出 $b - a > 0$ ，再根据二次根式的性质化简即可.

【详解】 解：由数轴得 $-1 < a < 0, 0 < b < 1$ ，

$$\therefore b - a > 0,$$

$$\therefore \sqrt{(b-a)^2} + (\sqrt{b})^2 - |a|$$

$$= |b-a| + |b| - (-a)$$

$$= b - a + b + a$$

$$= 2b,$$

故答案为： $2b$.

12. 将 $x\sqrt{-\frac{6}{x}}$ 根号外的因式移到根号内得_____.

【答案】 $-\sqrt{-6x}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的知识；解题的关键是熟练掌握二次根式的性质，从而完成求解.

根据二次根式的性质，得 $x < 0$ ，再根据二次根式的性质计算，即可得到答案.

【详解】 解：根据题意，得 $-\frac{6}{x} \geq 0$ ，

$$\therefore -6 \neq 0,$$

$$\therefore -\frac{6}{x} > 0,$$

$$\therefore x < 0,$$

$$\therefore x\sqrt{-\frac{6}{x}} = -\sqrt{-\frac{6}{x} \times x^2} = -\sqrt{-6x},$$

故答案为： $-\sqrt{-6x}$.

13. 已知 $\sqrt[3]{7} = a$ ，则 $\sqrt[3]{0.007} + \sqrt[3]{7000}$ 的值是_____. (结果用含字母 a 的代数式表示)

【答案】 $10.1a$

【解析】

【分析】 本题考查了被开方数的变化与立方根的值的变化的变化规律. 当被开方数的小数点每向右(或向左)移动 3 位, 它的立方根的小数点就相应地向右(或向左)移动 1 位.

根据被开方数的变化与立方根的值的变化的变化规律即可得到答案.

【详解】 解: $\because \sqrt[3]{7} = a$,

$$\begin{aligned} &\therefore \sqrt[3]{0.007} + \sqrt[3]{7000} \\ &= \sqrt[3]{\frac{7}{1000}} + \sqrt[3]{1000 \times 7} \\ &= \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{1000}} + \sqrt[3]{1000} \times \sqrt[3]{7} \\ &= \frac{a}{10} + 10a \\ &= 10.1a. \end{aligned}$$

故答案为: $10.1a$.

14. 若 $\sqrt{20}$ 与最简二次根式 $\frac{1}{3}\sqrt{3-m}$ 是同类二次根式, 则 m 的值为_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查的是同类二次根式的概念, 掌握二次根式化成最简二次根式后, 被开方数相同的二次根式叫做同类二次根式是解题的关键. 根据同类二次根式的概念列出方程, 解方程得到答案.

【详解】 解: $\because \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, 且最简二次根式 $\frac{1}{3}\sqrt{3-m}$ 与 $2\sqrt{5}$ 是同类二次根式,

$$\therefore 3-m=5,$$

$$\therefore m=-2$$

故答案为: -2.

15. 设 $4-\sqrt{2}$ 的整数部分为 a , 小数部分为 b . 则 $a-\frac{1}{b} =$ _____.

【答案】 $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 根据实数的估算求出 a, b , 再代入 $a-\frac{1}{b}$ 即可求解.

【详解】 $\because 1 < \sqrt{2} < 2$,

$$\therefore -2 < -\sqrt{2} < -1,$$

$$\therefore 2 < 4 - \sqrt{2} < 3$$

$$\therefore \text{整数部分 } a=2, \text{小数部分为 } 4 - \sqrt{2} - 2 = 2 - \sqrt{2},$$

$$\therefore a - \frac{1}{b} = 2 - \frac{1}{2 - \sqrt{2}} = 2 - \frac{2 + \sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{故填: } 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【点睛】此题主要考查无理数的估算，分母有理化等，解题的关键熟知实数的性质.

16. 关于 x 的方程 $(m - \sqrt{3})x^{m^2-1} - x + 3 = 0$ 是一元二次方程，则 $m =$ _____.

$$\text{【答案】 } -\sqrt{3}$$

【解析】

【分析】由一元二次方程的定义回答即可.

【详解】解： $\because$ 方程 $(m - \sqrt{3})x^{m^2-1} - x + 3 = 0$ 是一元二次方程，

$$\therefore m^2 - 1 = 2 \text{ 且 } m - \sqrt{3} \neq 0.$$

$$\text{解得 } m = -\sqrt{3}.$$

$$\text{故答案为: } -\sqrt{3}.$$

【点睛】本题主要考查的是一元二次方程的定义，解题的关键是掌握一元二次方程的定义.

17. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - \sqrt{2k+4}x + k = 0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是 _____.

$$\text{【答案】 } -2 \leq k < 2$$

【解析】

【分析】本题主要考查了根的判别式，二次根式有意义的条件，解一元一次不等式，对于一元二次方程

$ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)，则有 $b^2 - 4ac \geq 0 \Leftrightarrow$ 方程有两实根， $b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两不等实根，

$b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两相等实根， $b^2 - 4ac < 0$ 方程没有实根.

根据根的判别式与二次根式有意义的条件求解即可.

【详解】解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - \sqrt{2k+4}x + k = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = \left(-\sqrt{2k+4}\right)^2 - 4k > 0,$$

$$\text{即 } 2k+4-4k > 0,$$

$$\therefore k < 2,$$

$\therefore$ 要使该方程有意义, 则 $2k+4 \geq 0$,

$$\therefore k \geq -2,$$

综上, k 的取值范围是 $-2 \leq k < 2$.

故答案为: $-2 \leq k < 2$

18. 若两个一元二次方程有且只有一个公共的实数根, 我们就称这两个方程为“同伴方程”. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + nx + 2 = 0$ 和 $x^2 + 2x + n = 0$ 是“同伴方程”, 则 $n =$ _____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 本题考查新定义——“同伴方程”. 熟练掌握新定义, 解一元二次方程, 一元二次方程的解的定义, 是解题的关键.

设公共根为 r , 代入两个方程后相减, 得到关于 n 和 r 的方程, 通过讨论得出 n 的值.

【详解】 设公共根为 r ,

$$\text{则 } r^2 + nr + 2 = 0 \text{ ①,}$$

$$r^2 + 2r + n = 0 \text{ ②,}$$

$$\text{①式减去②式得: } (r^2 + nr + 2) - (r^2 + 2r + n) = 0.$$

$$\therefore nr + 2 - 2r - n = 0.$$

$$\therefore (n-2)r + (2-n) = 0.$$

$$\therefore (n-2)(r-1) = 0.$$

$$\therefore n-2=0 \text{ 或 } r-1=0.$$

若 $n-2=0$,

则 $n=2$.

此时方程①为 $x^2 + 2x + 2 = 0$,

判别式 $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$, 无实数根, 不符合题意.

若 $r-1=0$,

则 $r=1$.

代入方程①得 $1^2 + n \times 1 + 2 = 0$,

即 $n+3=0$.

$\therefore n=-3$.

当 $n=-3$ 时,

方程①为 $x^2 - 3x + 2 = 0$,

根为 $x=1$ 和 $x=2$;

方程②为 $x^2 + 2x - 3 = 0$,

根为 $x=-3$ 和 $x=1$.

公共根只有 $x=1$.

符合“同伴方程”定义.

三、简答题(本大题共 6 题, 每题 5 分, 满分 30 分)

19. 计算: $2\sqrt{2} \times 3\sqrt{10} + \sqrt{45} + \sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2-\sqrt{5}}$.

【答案】 $\frac{33}{2}\sqrt{5} + 2$

【解析】

【分析】 根据二次根式的混合运算法则进行计算即可求解.

【详解】 解: $2\sqrt{2} \times 3\sqrt{10} + \sqrt{45} + \sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2-\sqrt{5}}$
 $= 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{5} + 3\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{2+\sqrt{5}}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}$
 $= 12\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} + 2 + \sqrt{5}$
 $= \frac{33}{2}\sqrt{5} + 2.$

【点睛】 本题考查了二次根式的混合运算, 掌握二次根式的运算法则是解题的关键.

20. 计算: $\frac{2}{b}\sqrt{ab^3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^2b}\right) \div 3\sqrt{\frac{b}{a}}$

【答案】 $-a^2\sqrt{b}$

【解析】

【分析】先确定结果的符号，再把除法化为乘法，最后进行化简.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 } & \frac{2}{b}\sqrt{ab^3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^2b}\right) \div 3\sqrt{\frac{b}{a}} \\ &= -\frac{2}{b} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \sqrt{ab^3 \cdot a^2b \cdot \frac{a}{b}} \\ &= -\frac{1}{b} \sqrt{a^4b^3} \\ &= -\frac{1}{b} \cdot a^2b\sqrt{b} \\ &= -a^2\sqrt{b}. \end{aligned}$$

【点睛】本题考查了二次根式的混合运算，掌握二次根式的运算法则是解题的关键.

21. 解方程: $3x(x-2) = \sqrt{2}(2-x)$

【答案】 $x = 2$ 或 $x = -\frac{\sqrt{2}}{3}$.

【解析】

【分析】本题主要考查了利用因式分解法解一元二次方程，准确计算是解题的关键.

根据提公因式法解方程即可；

【详解】解: $3x(x-2) = \sqrt{2}(2-x)$,

$$3x(x-2) + \sqrt{2}(x-2) = 0,$$

$$(x-2)(3x + \sqrt{2}) = 0,$$

$$x-2=0 \text{ 或 } 3x + \sqrt{2} = 0,$$

$$x = 2 \text{ 或 } x = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

22. 用配方法解方程: $3x^2 + 6x - 1 = 0$

【答案】 $x_1 = +\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1, x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$

【解析】

【分析】先将二次项系数化为1，然后根据配方法，可即答案.

【详解】解： $x^2 + 2x - \frac{1}{3} = 0$

$$x^2 + 2x + 1 = 1 + \frac{1}{3}$$

$$(x+1)^2 = \frac{4}{3}$$

$$x_1 = +\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1, x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$$

故答案为 $x_1 = +\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1, x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$

【点睛】 本题考查了配方法解一元二次方程，解题时要注意解题步骤的准确应用．选择用配方法解一元二次方程时，最好使方程的二次项的系数为 1，一次项的系数是 2 的倍数．

23. 用公式法解方程： $x - \frac{x^2 - 1}{2} = -\frac{1}{2}$

【答案】 $x_1 = 1 + \sqrt{3}, x_2 = 1 - \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了公式法解一元二次方程．

先将方程整理成一元二次方程的标准形式，然后利用求根公式求解即可．

【详解】 解： 原方程为 $x - \frac{x^2 - 1}{2} = -\frac{1}{2}$ ，

整理得 $x^2 - 2x - 2 = 0$ ，

则 $a = 1, b = -2, c = -2$ ，

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 4 + 8 = 12,$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{12}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3},$$

所以 $x_1 = 1 + \sqrt{3}, x_2 = 1 - \sqrt{3}$ ．

24. 解方程： $(4x-1)^2 - 10(4x-1) = 24$

【答案】 $x_1 = \frac{13}{4}, x_2 = -\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了配方法解一元二次方程，整体数学思想．把 $4x-1$ 看作一个整体，直接利用配方法解方

程即可求解.

【详解】解: $(4x-1)^2 - 10(4x-1) = 24$

配方得 $(4x-1)^2 - 10(4x-1) + 5^2 = 24 + 25$,

即 $(4x-1-5)^2 = 49$,

$\therefore 4x-6 = \pm 7$,

$\therefore x_1 = \frac{13}{4}, x_2 = -\frac{1}{4}$.

四、解答题 (本大题共 4 题, 第 25、26 题每题 6 分, 第 27、28 题每题 8 分, 满分 28 分)

25. 已知 a 、 b 满足 $\sqrt{4a-b+1} + |a+b-6| = 0$, 求 $\frac{1}{a-\sqrt{b}} + \frac{1}{a+\sqrt{b}}$ 的值.

【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的非负性, 绝对值的非负性, 解二元一次方程组, 分母有理化.

根据二次根式的非负性、绝对值的非负性列二元一次方程组, 求出 a 、 b 的值, 进而代入 $\frac{1}{a-\sqrt{b}} + \frac{1}{a+\sqrt{b}}$ 计算即可.

【详解】解: $\because \sqrt{4a-b+1} + |a+b-6| = 0$,

$\therefore 4a-b+1=0, a+b-6=0$,

即 $\begin{cases} 4a-b+1=0 \\ a+b-6=0 \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} a=1 \\ b=5 \end{cases}$,

$\therefore \frac{1}{a-\sqrt{b}} + \frac{1}{a+\sqrt{b}}$

$= \frac{1}{1-\sqrt{5}} + \frac{1}{1+\sqrt{5}}$

$= \frac{1+\sqrt{5}}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} + \frac{1-\sqrt{5}}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{1-5} \\
 &= -\frac{2}{4} \\
 &= -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

26. 若 x, y 是有理数, 且满足 $3(x-2y)-(1-\sqrt{2})y=9+3\sqrt{2}$, 求 $x-y$ 的算术平方根.

【答案】 $\sqrt{7}$

【解析】

【分析】 本题考查了实数的运算. 由于 x 和 y 是有理数, 方程中含有无理数 $\sqrt{2}$, 因此将方程按有理部分和无理部分拆分, 得到两个方程分别求解出 $x=10$, $y=3$, 代入 $x-y$ 计算, 进而求其算术平方根即可.

【详解】 解: 原方程为 $3(x-2y)-(1-\sqrt{2})y=9+3\sqrt{2}$,

展开并整理得 $3x-7y+\sqrt{2}y=9+3\sqrt{2}$,

$\because x, y$ 是有理数,

$\therefore$ 有理部分和无理部分系数分别相等,

即 $3x-7y=9$, $\sqrt{2}y=3\sqrt{2}$,

由 $\sqrt{2}y=3\sqrt{2}$, 得 $y=3$,

代入 $3x-7y=9$, 得 $3x-21=9$,

解得: $x=10$,

$\therefore x-y=10-3=7$,

$\therefore x-y$ 的算术平方根为 $\sqrt{7}$.

27. 已知关于 x 方程 $mx^2+16=2(m+4)x$.

(1) 如果方程只有一个实数根, 求 m 的值, 并求出此时方程的根;

(2) 若等腰 ABC 的一边长 $a=4$, 另两边长 b, c 恰好是这个方程的两个实数根, 求 m 的值和 ABC 的周长.

【答案】 (1) $m=0$ 时, 根为 $x=2$; $m=4$ 时, 根为 $x_1=x_2=2$.

(2) $m=2$, 周长为 10.

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程的根的判别式、等腰三角形的性质，熟练掌握方程根的情况与判别式的关系及等腰三角形的三边关系是解题的关键.

(1) 分方程是一元一次方程和一元二次方程且判别式为 0 两种情况，求 m 的值并解方程的根；

(2) 分 a 为腰和 a 为底两种情况，结合方程根的情况求 m 的值和三角形周长.

【小问 1 详解】

解：当 $m = 0$ 时，方程化为 $16 = 8x$,

解得 $x = 2$.

当 $m \neq 0$ 时，方程化为 $mx^2 - 2(m+4)x + 16 = 0$,

$$\Delta = 4(m+4)^2 - 64m = 4(m-4)^2 = 0,$$

解得 $m = 4$.

此时方程为 $4x^2 - 16x + 16 = 0$ ，即 $(x-2)^2 = 0$,

解得 $x_1 = x_2 = 2$.

综上， $m = 0$ 时，根为 $x = 2$ ； $m = 4$ 时，根为 $x_1 = x_2 = 2$.

【小问 2 详解】

解：当 $a = 4$ 为腰时，

把 $x = 4$ 代入方程 $mx^2 - 2(m+4)x + 16 = 0$,

$$\text{得 } 16m - 8(m+4) + 16 = 0,$$

解得 $m = 2$.

方程为 $2x^2 - 12x + 16 = 0$ ，即 $x^2 - 6x + 8 = 0$,

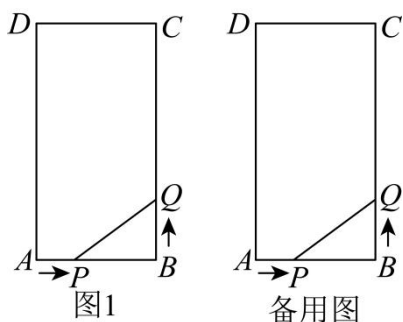
解得 $x_1 = 4$ ， $x_2 = 2$.

周长为 $4 + 4 + 2 = 10$.

当 $a = 4$ 为底时，方程有两个相等实根，由 (1) 知 $m = 4$ ，方程根为 $x_1 = x_2 = 2$ ，但 $2 + 2 = 4$ ，不满足三角形三边关系，舍去.

综上， $m = 2$ ，周长为 10.

28. 如图 1, 在长方形 $ABCD$ 中， $AB = 6\text{cm}$ ， $BC = 12\text{cm}$ ，点 P 从点 A 开始沿 AB 边向点 B 以 1 厘米/秒的速度移动，点 Q 从点 B 开始沿 BC 边向点 C 以 2 厘米/秒的速度移动，如果 P 、 Q 分别从 A 、 B 同时出发，请问：



- (1) 经过几秒时, $\triangle PBQ$ 的面积等于 8 平方厘米?
- (2) 经过几秒时, 五边形 $APQCD$ 的面积最小? 最小值是多少?

【答案】 (1) 2 或 4 (2) 63cm^2

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的应用, 根据已知条件列出解析式是解题的关键.

(1) 设运动时间为 t 秒, 则 $PB = 6 - t$, $BQ = 2t$, 根据三角形的面积公式列出方程, 解方程即可;

(2) 由 (1) 知, $S_{\triangle PBQ} = \frac{1}{2}PB \cdot BQ = -t^2 + 6t$, 该函数图象开口向下, 有最大值, 根据顶点坐标公式求出顶点坐标, 五边形 $APQCD$ 的面积最小值等于矩形面积减去 $\triangle PBQ$ 的面积的最大值, 据此计算求解即可.

【小问 1 详解】

解: 设运动时间为 t 秒, 则 $PB = 6 - t$, $BQ = 2t$

$$\text{则 } S_{\triangle PBQ} = \frac{1}{2}PB \cdot BQ,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}(6-t) \times 2t = 8,$$

解得 $t = 2$ 或 $t = 4$

答: 经过 2 秒或 4 秒时, $\triangle PBQ$ 的面积等于 8 平方厘米;

【小问 2 详解】

解: 设运动时间为 t 秒, 则 $PB = 6 - t$, $BQ = 2t$

$$\text{则 } S_{\triangle PBQ} = \frac{1}{2}PB \cdot BQ = -t^2 + 6t,$$

$$\text{当 } t = -\frac{6}{2 \times (-1)} = 3 \text{ 时, } S_{\triangle PBQ} \text{ 有最大值, 最大值为 } -3^2 + 6 \times 3 = 9 (\text{cm}^2),$$

$$\text{则五边形 } APQCD \text{ 的面积最小值为: } 6 \times 12 - 9 = 63 (\text{cm}^2),$$

答: 经过 3 秒时, 五边形 $APQCD$ 的面积最小, 最小值是 63cm^2 .

