

2025 学年第一学期八年级学业质量调研数学试卷

(考试时间 90 分钟, 满分 100 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 27 题.

2. 答题时、考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.

3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出解答的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分, 下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 请选择正确选项的代号并填涂在答题纸的相应位置上)

1. 在下列各数中, 是无理数的是 ()

- A. $\sqrt{4}$ B. $\sqrt[3]{6}$ C. $\frac{22}{7}$ D. $2.\dot{3}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查无理数的定义, 无理数是指无限不循环小数, 根据定义逐一分析每个选项.

【详解】 解: $\because \sqrt{4} = 2$, 2 是整数, 属于有理数;

$\sqrt[3]{6}$ 是无限不循环小数, 属于无理数;

$\frac{22}{7}$ 是分数, 属于有理数;

$2.\dot{3}$ 是无限循环小数, 属于有理数;

$\therefore$ 是无理数的是 $\sqrt[3]{6}$.

故选: B.

2. 在下列二次根式中, 是最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{a^3}$ B. $\sqrt{a^2 + 2a + 1}$ C. $\sqrt{\frac{a}{2}}$ D. $\sqrt{a^2 - 1}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查最简二次根式的判定, 关键是明确最简二次根式的两个条件: ①被开方数不含分母; ②被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.

根据最简二次根式的定义逐项判断即可.

【详解】解：选项 A： $\sqrt{a^3} = \sqrt{a^2 \cdot a} = a\sqrt{a}$ ，被开方数含能开得尽方的因式 a^2 ，不是最简二次根式；

选项 B： $\sqrt{a^2 + 2a + 1} = \sqrt{(a+1)^2} = |a+1|$ ，被开方数是完全平方式，不是最简二次根式；

选项 C： $\sqrt{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{2a}}{2}$ ，被开方数含分母，不是最简二次根式；

选项 D： $\sqrt{a^2 - 1}$ ，被开方数不含分母，且 $a^2 - 1$ 无法分解为能开得尽方的因式，是最简二次根式；

故选：D.

3. 在下列方程中没有实数解的是 ()

A. $x^2 + x + 2 = 0$

B. $x + y = 0$

C. $\frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{x-3}$

D. $\sqrt{2}x = \sqrt{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程根的判别式，二元一次方程的解，解分式方程，分母有理化.

通过计算每个方程的实数解情况，选项 A 的一元二次方程判别式为负，无实数解；选项 B 有无数实数解；

选项 C 经求解和检验有实数解 $x = -3$ ；选项 D 有实数解.

【详解】解：选项 A： $x^2 + x + 2 = 0$ ，判别式 $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7 < 0$ ，无实数解；

选项 B： $x + y = 0$ 是二元一次方程，有无数组实数解，有实数解；

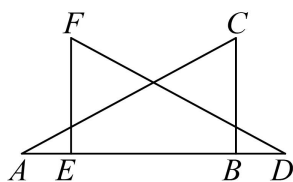
选项 C： $\frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{x-3}$ ，去分母得 $x^2 = 9$ ，解得 $x = 3$ 或 $x = -3$ ，但 $x = 3$ 使分母为零为增根， $x = -3$ 为实

数解，即有实数解；

选项 D： $\sqrt{2}x = \sqrt{3}$ ，解得 $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 为实数，有实数解；

故选：A.

4. 如图，已知点 A、E、B、D 在同一直线上， $AC = DF$ ， $AE = BD$ ，增加下列条件不能推导出 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 的是 ()



A. $\angle A = \angle D$

B. $\angle C = \angle F$

C. $\angle ABC = \angle DEF = 90^\circ$

D. $EF = BC$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查三角形全等的判定定理，关键是结合已知条件，逐一分析每个选项是否满足全等判定条件.

【详解】 解： $\because AE = BD$,

$\therefore AE + EB = BD + EB$, 即 $AB = DE$.

已知 $AC = DF$, 结合各选项分析:

选项 A: $\angle A = \angle D$, 此时有 $AC = DF$, $\angle A = \angle D$, $AB = DE$, 满足 SAS 判定, 可推出 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$;

选项 B: $\angle C = \angle F$, 此时有 $AC = DF$, $\angle C = \angle F$, $AB = DE$, 为 SSA, 不满足全等判定条件, 不能推出 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$;

选项 C: $\angle ABC = \angle DEF = 90^\circ$, 此时为直角三角形, 有 $AC = DF$, $AB = DE$, 满足 HL 判定, 可推出 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$;

选项 D: $EF = BC$, 此时有 $AB = DE$, $AC = DF$, $EF = BC$, 满足 SSS 判定, 可推出 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$;

故选: B.

5. 定义: 对于自然数 n , 我们用 $【n】$ 表示不大于 $\sqrt{n}$ 的最大整数, 称之为 n 的根号整数. 例如 15 的根号整数 $【15】=3$, 17 的根号整数 $【17】=4$. 那么满足 $【n】=1$ 的自然数 n 有 ()

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题结合新定义“根号整数”考查估算算术平方根, 关键是根据定义转化为不等式, 再结合自然数的范围确定 n 的取值.

【详解】 解: 根据“根号整数”的定义, 若 $【n】=1$,

则 $1 \leq \sqrt{n} < 2$;

两边平方, 得 $1 \leq n < 4$.

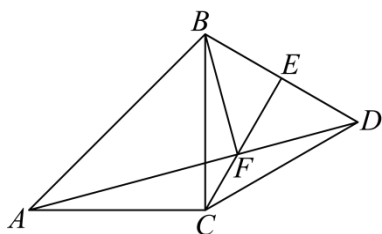
$\therefore n$ 是自然数,

$\therefore n$ 的取值为 1、2、3，共 3 个.

故选: C.

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $CA = CB$, $\angle ACB = 90^\circ$, 以 BC 为边在 $\triangle ABC$ 的外部作等边三角形 BCD , 点 E 为 BD 的中点, 分别连接 CE 和 AD , 交于点 F , 连接 BF . 某同学在研究这个图形时有两个猜想:

① $BD = \sqrt{2}DF$; ② $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle BFD}$, 关于这两个猜想, 你的判断是 ()



A. ①正确, ②错误

B. ①错误, ②正确

C. ①、②都错误

D. ①、②都正确

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了等边三角形的性质, 勾股定理, 等腰三角形的判定与性质, 三角形内角和定理, 二次根式的除法运算等知识点.

先证明 $\triangle BFD$ 为等腰直角三角形, 然后由勾股定理得到 $BD = \sqrt{BF^2 + DF^2} = \sqrt{2}DF$, 即可判断①; 设

$BE = DE = x$, 则由等边三角形 BCD 可知 $BC = BD = 2x$, 则 $CA = CB = 2x$, 则

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}CA \times CB = 2x^2$, 然后由 $BD = \sqrt{2}DF$ 得到 $DF = \sqrt{2}x$, 再由三角形面积公式求解 $S_{\triangle BFD}$, 即可判断②.

【详解】解: $\because$ 等边三角形 BCD , 点 E 为 BD 的中点,

$$\therefore \angle BCD = \angle BDC = 60^\circ, CE \perp BD, CB = CD$$

$$\because CA = CB, \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore CA = CD, \angle ACD = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ,$$

$$\therefore \angle CDA = \angle CAD = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle BDF = \angle BDC - \angle CDA = 45^\circ,$$

$$\because CE \perp BD, \text{点 } E \text{ 为 } BD \text{ 的中点},$$

$$\therefore FB = FD,$$

$$\therefore \angle FBD = \angle FDB = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle BFD$ 为等腰直角三角形,

$\therefore BD = \sqrt{BF^2 + DF^2} = \sqrt{2}DF$, 故①正确;

设 $BE = DE = x$,

则由等边三角形 BCD 可知 $BC = BD = 2x$,

$\therefore CA = CB = 2x$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}CA \times CB = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2x = 2x^2,$$

$$\because BD = \sqrt{2}DF$$

$$\therefore 2x = \sqrt{2}DF,$$

$$\therefore DF = \sqrt{2}x,$$

$$\therefore S_{\triangle BFD} = \frac{1}{2}FD \times FB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}x \cdot \sqrt{2}x = x^2,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle BFD},$$

故②正确,

故选: D.

二、填空题 (本大题共 12 题每题 2 分, 满分 24 分)

7. $\frac{16}{25}$ 的平方根是_____.

【答案】 $\pm \frac{4}{5}$

【解析】

【分析】 本题主要考查平方根的定义, 熟练掌握平方根的定义是解决本题的关键.

根据平方根的定义解决此题.

【详解】 解: $\frac{16}{25}$ 的平方根是 $\pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5}$.

故答案为: $\pm \frac{4}{5}$.

8. 如果二次根式 $\sqrt{2x-1}$ 有意义, 那么实数 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式有意义的条件, 根据“二次根式中被开方数大于等于 0”即可求解.

【详解】解：如果二次根式 $\sqrt{2x-1}$ 有意义，则 $2x-1 \geq 0$ ，

解得 $x \geq \frac{1}{2}$ 。

故答案为： $x \geq \frac{1}{2}$ 。

9. 分母有理化： $\frac{1}{\sqrt{a+b}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\frac{\sqrt{a+b}}{a+b}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的分母有理化，关键是确定分母的有理化因式，通过分子分母同乘该因式消去分母中的根号。

【详解】 解：分子分母同乘 $\sqrt{a+b}$ ，得原式 $= \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{a+b}} = \frac{\sqrt{a+b}}{a+b}$ 。

故答案为： $\frac{\sqrt{a+b}}{a+b}$ 。

10. 计算： $\sqrt{xy^2} \div \sqrt{\frac{x}{y}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $y\sqrt{y}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的除法。

根据二次根式的除法法则计算即可。

【详解】 解： $\sqrt{xy^2} \div \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{xy^2 \div \frac{x}{y}} = \sqrt{y^3} = y\sqrt{y}$ 。

故答案为： $y\sqrt{y}$ 。

11. 在实数范围内因式分解： $x^2 - 8 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})$

【解析】

【分析】 根据平方差公式分解因式即可。

【详解】 解： $x^2 - 8$

$$= x^2 - (2\sqrt{2})^2$$

$$= (x + 2\sqrt{2})(x - 2\sqrt{2}),$$

故答案为: $(x + 2\sqrt{2})(x - 2\sqrt{2})$.

【点睛】 本题考查实数范围内分解因式, 掌握 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ 是解题的关键.

12. 用配方法解方程 $x^2 - 2x - 4 = 0$ 时, 将它配成 $(x + m)^2 = n$ 的形式是_____.

【答案】 $(x - 1)^2 = 5$

【解析】

【分析】 本题考查配方法解一元二次方程, 关键是通过移项、配方, 将方程转化为完全平方形式.

【详解】 解: $x^2 - 2x - 4 = 0$,

移项, 得 $x^2 - 2x = 4$;

配方, 得 $x^2 - 2x + 1 = 4 + 1$;

即 $(x - 1)^2 = 5$.

故答案为: $(x - 1)^2 = 5$.

13. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 4x + m = 0$ 的一个根是 $2 + \sqrt{3}$, 则 m 的值为_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 将 $x = 2 + \sqrt{3}$ 代入方程中得到关于 m 的一元一次方程, 即可求出 m 的值.

【详解】 解: $\because 2 + \sqrt{3}$ 是关于 x 的方程 $x^2 - 4x + m = 0$ 的一个根,

$$\therefore (2 + \sqrt{3})^2 - 4 \times (2 + \sqrt{3}) + m = 0,$$

整理得, $m - 1 = 0$,

$$\therefore m = 1,$$

故答案为: 1.

【点睛】 本题考查一元二次方程的根的意义及二次根式的运算, 正确计算是解题的关键.

14. 若 $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{30} \approx 5.477$, 则 $\sqrt{3000} \approx$ _____.

【答案】 54.77

【解析】

【分析】根据二次根式的性质把 $\sqrt{3000}$ 进行化简，再把已知数据代入计算即可.

【详解】解： $\because \sqrt{30}=5.477$,

$$\therefore \sqrt{3000}=10\sqrt{30}$$

$$=54.77,$$

故答案为：54.77.

【点睛】本题考查的是算术平方根的性质和二次根式的化简，掌握一个非负数的正的平方根是这个数的算术平方根和二次根式的性质是解题的关键.

15. 春节前夕一群学生举行一次聚会，聚会时每两个人之间都互赠一张贺卡，这样共送出了210张贺卡. 设这群学生共有 x 人，根据题意可列一元二次方程是_____.

【答案】 $x(x-1)=210$

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程的实际应用，解题关键是明确“每两个人之间都互赠一张贺卡”意味着每个人需要向除自己外的所有人各送一张，从而推导总贺卡数的表达式. 据此解答即可.

【详解】解：设这群学生共有 x 人，

$\because$ 每个人需要向除自己外的 $(x-1)$ 人各赠送1张贺卡，

$\therefore$ 总共送出的贺卡数为 $x(x-1)$ 张.

已知共送出210张贺卡，

$$\therefore \text{可列方程为 } x(x-1)=210.$$

故答案为： $x(x-1)=210$.

16. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2m-1)x+m-2=0$ 的两个实数根分别为 a ， b ，且满足

$(a-1)(b-1)+8=0$ ，那么实数 m 的值是_____.

【答案】 8

【解析】

【分析】本题考查了根与系数的关系，根据根与系数的关系，得到 $a+b=2m-1$ ， $ab=m-2$ ，将根与系数的关系代入整理后的条件 $ab-(a+b)+9=0$ 中得 $(m-2)-(2m-1)+9=0$ ，解出 m 的值，并验证判别式非负以确保实数根存在即可，掌握知识点的应用是解题的关键.

【详解】解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2m-1)x + m-2 = 0$ 的两个实数根分别为 a, b ,

$$\therefore a+b=2m-1, \quad ab=m-2,$$

$$\therefore (a-1)(b-1)+8=0$$

$$ab-(a+b)+1+8=0,$$

$$ab-(a+b)+9=0,$$

$$\therefore (m-2)-(2m-1)+9=0,$$

$$-m+8=0,$$

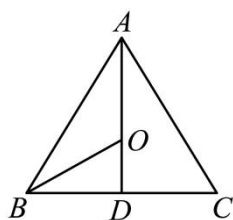
解得 $m=8$.

$$\text{当 } m=8 \text{ 时, } \Delta = 4 \times 64 - 8 \times 8 + 9 = 256 - 64 + 9 = 201 > 0,$$

满足实数根条件,

故答案为: 8.

17. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=10\text{cm}$, $BC=12\text{cm}$, 点 D 是 BC 的中点, 连接 AD , $\angle ABC$ 的平分线交 AD 于点 O , 那么 OD 的长度是_____ cm .

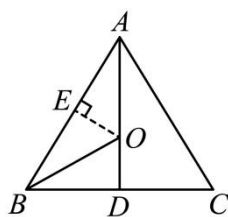


【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查了等腰三角形的性质, 勾股定理, 角平分线的性质定理, 解题的关键是正确添加辅助线求解. 过点 O 作 $OE \perp AB$ 于点 E , 先由等腰三角形的性质以及勾股定理得到 $AD \perp BC$, $BD=CD=6\text{cm}$, $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 8\text{cm}$, 再由角平分线性质的定理得到 $OE=OD$, 设 $OE=OD=x\text{cm}$, 最后根据面积法建立方程求解.

【详解】解: 过点 O 作 $OE \perp AB$ 于点 E ,



$\because AB = AC = 10\text{cm}$, $BC = 12\text{cm}$, 点 D 是 BC 的中点,

$\therefore AD \perp BC$, $BD = CD = 6\text{cm}$,

$\therefore AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 8\text{cm}$,

$\because \angle ABC$ 的平分线交 AD 于点 O , $OE \perp AB$, $AD \perp BC$

$\therefore OE = OD$,

设 $OE = OD = x\text{cm}$, 则 $AO = AD - OD = (8 - x)\text{cm}$

$\because S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} AB \times EO = \frac{1}{2} AO \times BD$,

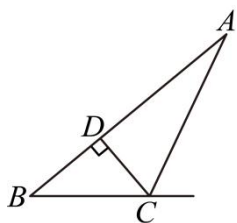
$\therefore \frac{1}{2} \times 10x = \frac{1}{2} \times (8 - x) \times 6$,

解得 $x = 3$,

$\therefore OD$ 的长度是 3cm ,

故答案为: 3.

18. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB$ 为钝角, $\angle B = a$, $CD \perp AB$, 垂足为点 D , 将 $\triangle ACD$ 绕点 A 旋转, 点 C 和 D 的对应点分别为点 C' 和 D' , 当点 C' 、 D' 恰好都落在 BC 的延长线上时, $\angle BAC' = \underline{\hspace{2cm}}$. (用含 a 的式子表示).



【答案】 $\frac{270^\circ - 3a}{2}$

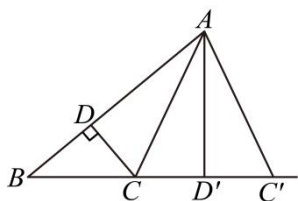
【解析】

【分析】 本题考查了旋转的性质, 等腰三角形的性质, 三角形外角的性质, 三角形内角和定理.

先根据题意作出图形, 设 $\angle CAD = b$, 根据旋转的性质得到 $\angle C'AD' = b$, $\angle C'D'A = 90^\circ$, $C'A = CA$, 根据三线合一得到 $\angle C'AD' = \angle CAD' = b$, 根据等边对等角得到 $\angle ACC' = \angle AC'C$, 根据三角形外角的性质得到 $\angle ACC' = \angle AC'C = a + b$, 根据三角形内角和得到 $a + b + a + b + b + b = 180^\circ$, 即 $b = \frac{90^\circ - a}{2}$,

根据 $\angle BAC' = \angle C'AD' + \angle CAD' + \angle CAD$ 计算即可.

【详解】 解: 如图,



设 $\angle CAD = b$,

$\therefore CD \perp AB$

$\therefore \angle CDA = 90^\circ$

$\therefore$ 将 $\triangle ACD$ 绕点 A 旋转, 点 C 和 D 的对应点分别为点 C' 和 D' ,

$\therefore \angle C'AD' = b$, $\angle C'D'A = 90^\circ$, $C'A = CA$,

$\therefore \angle C'AD' = \angle CAD' = b$, $\angle ACC' = \angle AC'C$,

$\therefore \angle ACC' = \angle CBA + \angle CAB = a + b$,

$\therefore \angle ACC' = \angle AC'C = a + b$,

$\therefore \angle AC'B + \angle B + \angle C'AD' + \angle CAD' + \angle CAD = 180^\circ$,

$\therefore a + b + a + b + b + b = 180^\circ$,

$\therefore 2a + 4b = 180^\circ$,

即 $a + 2b = 90^\circ$,

即 $b = \frac{90^\circ - a}{2}$

$\therefore \angle BAC' = \angle C'AD' + \angle CAD' + \angle CAD = 3b = 3 \times \frac{90^\circ - a}{2} = \frac{270^\circ - 3a}{2}$.

故答案为: $\frac{270^\circ - 3a}{2}$.

三、解答题 (本大题共 9 题, 满分 64 分)

19. 计算: $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + |1-\sqrt{2}| + \sqrt[3]{-8}$.

【答案】 $2\sqrt{2} - 4$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算.

先分母有理化, 再计算绝对值和立方根, 最后计算加减即可.

【详解】 解: $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + |1-\sqrt{2}| + \sqrt[3]{-8}$

$= \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} + |1-\sqrt{2}| + \sqrt[3]{-8}$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} + |1-\sqrt{2}| + \sqrt[3]{-8}$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{-1} + |1-\sqrt{2}| + \sqrt[3]{-8}$$

$$= \sqrt{2}-1 + |1-\sqrt{2}| + \sqrt[3]{-8}$$

$$= \sqrt{2}-1 + \sqrt{2}-1 + (-2)$$

$$= 2\sqrt{2}-4.$$

20. 计算: $6\sqrt{\frac{x}{4}} - 2x\sqrt{\frac{1}{x}} + \frac{2}{3}\sqrt{9x}.$

【答案】 $3\sqrt{x}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的化简，二次根式的加减运算.

先化简二次根式，再计算乘法，最后计算加减即可.

【详解】 解: $6\sqrt{\frac{x}{4}} - 2x\sqrt{\frac{1}{x}} + \frac{2}{3}\sqrt{9x}$

$$= 6 \times \frac{\sqrt{x}}{2} - 2x \times \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{2}{3} \times 3\sqrt{x}$$

$$= 3\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$$

$$= 3\sqrt{x}.$$

21. 解方程: $(x+3)^2 = 3(x+3).$

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = -3$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程.

移项后根据因式分解法求解即可.

【详解】 解: $(x+3)^2 = 3(x+3),$

移项得 $(x+3)^2 - 3(x+3) = 0,$

因式分解得 $(x+3)(x+3-3) = 0,$

即 $x(x+3)=0$,

所以 $x=0$ 或 $x+3=0$,

解得 $x_1=0, x_2=-3$.

22. 解方程: $2\sqrt{3}x=\sqrt{2}(x^2-1)$.

【答案】

$$x_1 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{10}}{2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{10}}{2}$$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的解法, 熟练掌握以上知识点是解题的关键.

根据公式法计算即可.

【详解】 解: $2\sqrt{3}x=\sqrt{2}(x^2-1)$

$$2\sqrt{3}x=\sqrt{2}x^2-\sqrt{2}$$

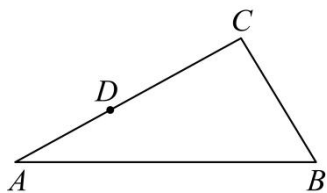
$$\sqrt{2}x^2-2\sqrt{3}x-\sqrt{2}=0$$

$$\therefore \Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times \sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = 12 + 8 = 20,$$

$$\therefore x = \frac{2\sqrt{3} \pm 2\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{10}}{2},$$

$$\therefore x_1 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{10}}{2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{10}}{2}.$$

23. 如图, 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ, AC>BC$.



(1) 用直尺和圆规在边 AB 上求作一点 P , 使点 P 到边 CA 和 CB 的距离相等 (保留作图痕迹, 写出结论, 不写作法);

(2) 如果 $\angle B=60^\circ$, 点 D 是边 AC 上一点, 且 $CD=CB, AD=2$, 求 BP 的长.

【答案】 (1) 见解析 (2) 2

【解析】

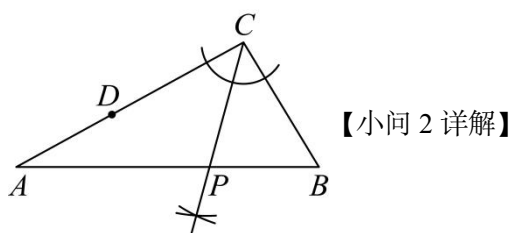
【分析】 本题考查了尺规作图---作角平分线，角平分线的性质定理，直角三角形的性质，全等三角形的判定与性质，三角形的外角定理，等腰三角形的判定等知识点.

(1) 作出 $\angle ACB$ 的平分线与 AB 的交点即为点 P ，根据角平分线的性质定理即可求解；

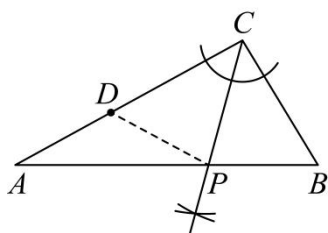
(2) 连接 PD ，先证明 $\triangle DCP \cong \triangle BCP$ (SAS)，则 $DP = BP$, $\angle CDP = \angle B = 60^\circ$ ，再由直角三角形锐角互余得到 $\angle A = 90^\circ - \angle B = 30^\circ$ ，再证明 $\triangle DAP$ 为等腰三角形即可.

【小问 1 详解】

解：如图，点 P 即为所求；



解：连接 PD ，



$\because CP$ 平分 $\angle ACB$,

$\therefore \angle DCP = \angle BCP$,

$\because CD = CB, CP = CP$

$\therefore \triangle DCP \cong \triangle BCP$ (SAS),

$\therefore DP = BP, \angle CDP = \angle B = 60^\circ$,

$\because \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle A = 90^\circ - \angle B = 30^\circ$,

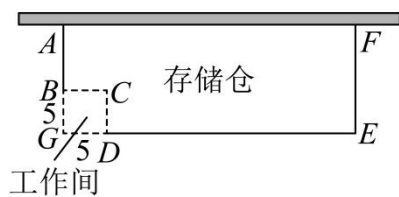
$\therefore \angle DPA = \angle CDP - \angle A = 30^\circ = \angle A$,

$\therefore DA = DP = 2$,

$\therefore BP = 2$.

24. 如图，现需靠一段长为 80 米的墙围一个所占地面为长方形的仓库 $AGEF$ (只围三面)，仓库的一角是一个正方形工作间 $BGDC$ ，其他区域为存储仓、已知仓库的工作间四面都是用边长为 5 米的玻璃材料所围成，其余部分是用总长为 110 米的防潮隔板来围。如果要使存储仓的面积为 1775 平方米，且防潮隔板正好用完

(不计损耗), 求垂直于墙面的隔板 AB 的长.



【答案】 垂直于墙面的隔板 AB 的长为 25 米

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的实际应用, 关键是明确防潮隔板的围建部分与各边长的关系, 结合面积条件列方程, 并验证解的合理性.

【详解】 解: 设垂直于墙面的隔板 AB 的长为 x 米, 则 $AG = AB + BG = x + 5$,

根据题意, $x + (x + 5) + DE = 110$, $\therefore DE = 105 - 2x$,

$\therefore GE = GD + DE = 110 - 2x$,

则 $AG \cdot GE - 25 = (x + 5)(110 - 2x) - 25 = 1775$,

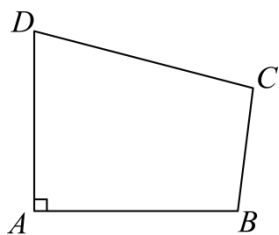
展开并化简得 $x^2 - 50x + 625 = 0$,

因式分解得 $(x - 25)^2 = 0$, 解得 $x = 25$.

验证: 当 $x = 25$ 时, $GE = 110 - 2 \times 25 = 60$ 米, $60 \leq 80$ (墙长), 符合题意.

答: 垂直于墙面的隔板 AB 的长为 25 米.

25. 如图: 有一块由四条小路 AB, BC, CD 和 DA 围成的绿地, 其中 AB 长 160m, BC 长 100m, CD 长 $100\sqrt{3}$ m, DA 长 120m, $\angle A = 90^\circ$.



(1) 求绿地 $ABCD$ 的面积 (结果保留根号);

(2) 计划在绿地内部建一座凉亭, 希望凉亭 (用一个点 M 来表示) 到四个路口 (即点 A, B, C 和 D) 的距离都相等: 小海同学认为连接 BD , 线段 BD 的中点就是凉亭 M 的位置: 你同意他的观点吗? 如果同意, 试证明点 M 到点 A, B, C, D 的距离都相等; 如果不同意, 请说明理由.

【答案】 (1) $(9600 + 5000\sqrt{3})\text{m}^2$

(2) 同意，见解析

【解析】

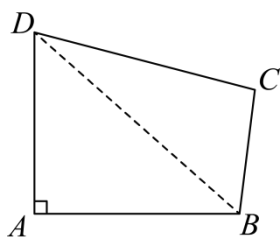
【分析】 本题考查了勾股定理及其逆定理，直角三角形斜边中线的性质，解题的关键是熟练掌握各知识点并灵活运用.

(1) 连接 BD ，先由勾股定理求解 BD ，再由勾股定理逆定理证明 $\angle C = 90^\circ$ ，然后根据绿地 $ABCD$ 的面积 $= S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$ 求解即可；

(2) 根据直角三角形斜边中线的性质即可求解.

【小问 1 详解】

解：连接 BD ，



$\because \angle A = 90^\circ$ ， AB 长 160m ， DA 长 120m ，

$$\therefore BD^2 = AB^2 + AD^2 = 160^2 + 120^2 = 40000，$$

$\because BC$ 长 100m ， CD 长 $100\sqrt{3}\text{m}$ ，

$$\therefore BC^2 + CD^2 = 100^2 + (100\sqrt{3})^2 = 40000，$$

$$\therefore BC^2 + CD^2 = BD^2，$$

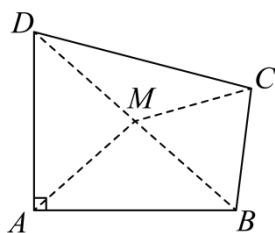
$\therefore \angle C = 90^\circ$ ，

$$\therefore \text{绿地 } ABCD \text{ 的面积} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 160 \times 120 + \frac{1}{2} \times 100 \times 100\sqrt{3} = (9600 + 5000\sqrt{3}) \text{ m}^2$$

【小问 2 详解】

解：同意小海的观点，理由如下：

如图：



$\because$ 点 M 是 BD 的中点， $\angle BCD = 90^\circ$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ，

$$\therefore MA = MB = MC = MD = \frac{1}{2}BD,$$

$\therefore$ 线段 BD 的中点就是凉亭 M 的位置.

26. 理财能力是现代人对人的基本要求之一, 掌握基本的理财知识, 有助于培养合理的消费观念和对个人未来、家庭的责任心, 为一生的行稳致远打好基础.

生活中我们发现, 同一笔存款在 1 年、2 年乃至未来 n 年后的金额不同, 且会逐年增加. 这意味着, 对于同一理财计划, 不宜将不同时刻的金额直接作比较. 在金融业务中需要将不同时刻的金额折算到同一时间点后再作比较, 这个时间点, 一般选为当前时刻. 这种将未来某个时间点上的金额折算成当前时刻的价值的做法, 称为折现, 其中这个折算的百分比称为折现率. 例如: 当折现率为 5% 时, 1 年后的 1000 元折算成

当前时刻的价值为 $\frac{1000}{1+5\%}$ 元, 2 年后折算成当前时刻的价值为 $\frac{1000}{(1+5\%)^2}$ 元; 同时, 合理的折现率应该是

能使返回的金额折现后的总金额等于其本金, 此时的折现率也称为理财方案的收益率.

(1) 当折现率为 r 时, 2 年后的 m 元折现成当前时刻的价值可表示为_____元 (用含 r , m 的代数式表示);

(2) 表格所列的是一个分 2 年返回的理财方案:

方案	本金 (元)	1 年后返回的金额 (元)	2 年后返回的金额 (元)	收益率
	8000	6000	5000	

请求出此方案的收益率 r .

【答案】 (1) $\frac{m}{(1+r)^2}$

(2) 25%

【解析】

【分析】 本题考查了代数式, 分式方程的应用, 解题的关键是理解题意, 并正确找出等量关系.

(1) 根据例题求解即可;

(2) 由题意得 $\frac{6000}{1+r} + \frac{5000}{(1+r)^2} = 8000$, 令 $1+r = x$, 则 $\frac{6000}{x} + \frac{5000}{x^2} = 8000$, 求出 x , 进而即可求出 r .

【小问 1 详解】

解: 当折现率为 r 时, 2 年后的 m 元折现成当前时刻的价值可表示为 $\frac{m}{(1+r)^2}$,

故答案为: $\frac{m}{(1+r)^2}$;

【小问2详解】

解：由题意得 $\frac{6000}{1+r} + \frac{5000}{(1+r)^2} = 8000$,

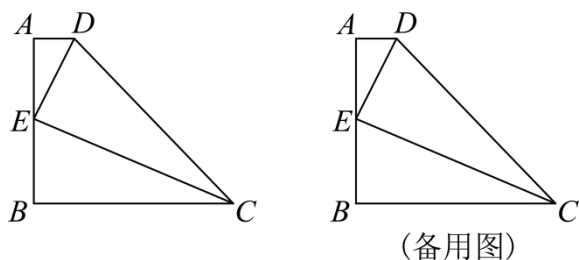
令 $1+r=x$, 则 $\frac{6000}{x} + \frac{5000}{x^2} = 8000$,

解得 $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ (舍去),

$\therefore r = x - 1 = \frac{5}{4} - 1 = 0.25 = 25\%$,

答：此方案的收益率 r 为 25% .

27. 如图, 已知 $AD \parallel BC$, $BC > AD$, $\angle A = 90^\circ$, 点 E 是线段 AB 的中点, DE 平分 $\angle ADC$.



(1) 求证: CE 平分 $\angle BCD$;

(2) 如果 $AD = 1$, $BC = 4$, 求四边形 $ABCD$ 的周长;

(3) 将线段 EC 沿着经过点 E 的一条直线翻折, 点 C 恰好落在射线 AD 上的点 P 处, 过点 P 作 $PQ \parallel DE$, 交边 CD 于点 Q , 试猜想线段 AD 与 CQ 之间的数量关系, 并进行证明.

【答案】(1) 见解析 (2) 14

(3) $CQ = 2AD$, 证明见解析

【解析】

【分析】本题考查了角平分线的性质定理及其逆定理, 全等三角形的判定与性质, 勾股定理, 折叠的性质, 等腰三角形的判定等知识点.

(1) 过点 E 作 $ET \perp CD$ 于点 T , 根据角平分线的性质定理得到 $EA = ET$, 然后结合已知条件得到 $EB = ET$, 再根据角平分线的逆定理即可证明;

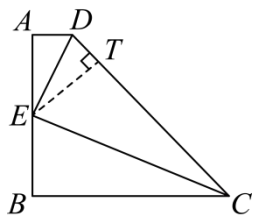
(2) 过点 D 作 $DR \perp BC$ 于点 R , 先由直角三角形全等的判定定理证明 $\text{Rt} \triangle ADE \cong \text{Rt} \triangle TDE$, 则 $AD = TD = 1$, 同理可证明 $CT = CB = 4$, 可得 $AB = DR$, 同理可证明 $AD = BR = 1$, 由勾股定理求解 $DR = 4$, 则 $AB = 4$, 即可求解四边形 $ABCD$ 的周长;

(3) 由翻折可得, $EC = EP$, 先证明 $\text{Rt} \triangle AEP \cong \text{Rt} \triangle BEC$, 则 $BC = AP = AD + DP$, 由 (2) 知

$BC = CT = CQ + QT$ ，则 $AD + DP = CQ + QT$ ，然后证明 $DP = DQ = DT + TQ$ ，再代入证明即可。

【小问 1 详解】

证明：过点 E 作 $ET \perp CD$ 于点 T ，



$$\because AD \parallel BC, \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ - \angle A = 90^\circ,$$

$$\because DE \text{ 平分 } \angle ADC, \angle A = 90^\circ, ET \perp CD$$

$$\therefore EA = ET,$$

$\because$ 点 E 是线段 AB 的中点,

$$\therefore EA = EB,$$

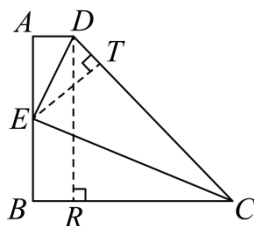
$$\therefore EB = ET,$$

$$\because ET \perp CD, \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore CE \text{ 平分 } \angle BCD;$$

【小问 2 详解】

解：过点 D 作 $DR \perp BC$ 于点 R ，



在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 和 $\text{Rt}\triangle TDE$ 中,

$$\begin{cases} AE = TE \\ DE = DE \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle TDE \text{ (直角三角形全等的判定定理)},$$

$$\therefore AD = TD = 1,$$

同理可证明 $CT = CB = 4$,

$$\therefore DC = DT + CT = 1 + 4 = 5,$$

$$\because AD \parallel BC, \angle B = 90^\circ, DR \perp BC,$$

$$\therefore AB = DR,$$

同理可证明 $AD = BR = 1$,

$$\therefore CR = BC - BR = 4 - 1 = 3,$$

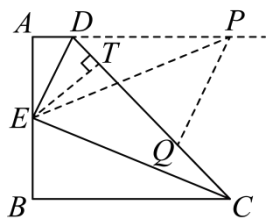
$$\therefore DR = \sqrt{DC^2 - CR^2} = 4,$$

$$\therefore AB = 4,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 的周长} = AD + CD + BC + AB = 1 + 5 + 4 + 4 = 14;$$

【小问 3 详解】

解: $CQ = 2AD$, 理由如下:



由翻折可得, $EC = EP$,

$$\because AE = EB, \angle A = \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle AEP \cong \text{Rt} \triangle BEC \text{ (直角三角形全等的判定定理)}$$

$$\therefore BC = AP = AD + DP$$

由 (2) 知 $BC = CT = CQ + QT$,

$$\therefore AD + DP = CQ + QT,$$

$$\because DE \text{ 平分 } \angle ADC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle TDE,$$

$$\because PQ \parallel DE,$$

$$\therefore \angle DPQ = \angle ADE, \angle DQP = \angle TDE$$

$$\therefore \angle DPQ = \angle DQP,$$

$$\therefore DP = DQ = DT + TQ,$$

$$\therefore AD + DP = CQ + QT,$$

$$\therefore AD + DT + TQ = CQ + QT,$$

$$\therefore AD + DT = CQ ,$$

由 (2) 得 $AD = TD$,

$$\therefore AD + AD = CQ ,$$

$$\therefore CQ = 2AD .$$