

2025 学年第一学期期末学生学习能力诊断练习八年级数学试卷

说明:

1. 本试卷含四个大题, 共 26 题;
2. 答题时, 请按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列二次根式中, 与 $\sqrt{2}$ 同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{12}$ B. $\sqrt{18}$ C. $\sqrt{24}$ D. $\sqrt{30}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查同类二次根式, 将二次根式化简后, 被开方数相同的二次根式是同类二次根式. 将各选项的二次根式化简, 再进行判断即可.

【详解】解: A、 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式;

B、 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式;

C、 $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式;

D、 $\sqrt{30}$ 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式.

故选: B.

2. 式子 $\sqrt{x+2}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是 ()

- A. $x > -2$ B. $x \geq -2$ C. $x < -2$ D. $x \leq -2$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了二次根式有意义的条件, 二次根式在实数范围内有意义的条件是被开方数非负, 即 $x+2 \geq 0$, 求解即可得出答案.

【详解】解: $\because$ 被开方数必须满足 $x+2 \geq 0$,

$\therefore x \geq -2$,

故选 B.

3. 方程 $(x+2025)^2 = -1$ 的根的情况是 ()

- A. 只有一个实数根
B. 没有实数根
C. 有两个不相等的实数根
D. 有两个相等的实数根

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了求一元二次方程根的情况.

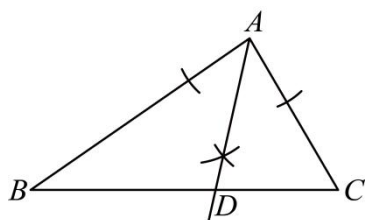
根据平方的非负性作答即可.

【详解】 $\because (x+2025)^2 \geq 0$, $-1 < 0$,

$\therefore$ 方程 $(x+2025)^2 = -1$ 的根的情况是没有实数根,

故选: B.

4. 观察如图所示的尺规作图痕迹, 则线段 AD 是 ABC 的 ()



- A. 中线
B. 高线
C. 中垂线
D. 角平分线

【答案】D

【解析】

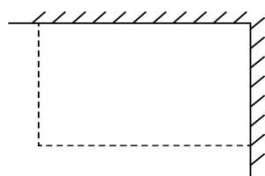
【分析】本题主要考查了尺规基本作图, 掌握角平分线的尺规作图方法是解题的关键.

根据角平分线的尺规作图的作法即可解答.

【详解】解: 由作图过程可得: 线段 AD 是 ABC 的角平分线.

故选: D.

5. 用总长为 6 米的篱笆, 在两边都足够长的直角围墙的一角, 围出一块 8 平方米的长方形, 如图所示. 设长方形的一边长为 x 米, 根据题意可列方程 ()



- A. $6(1+x^2) = 8$
B. $6(1+x)^2 = 8$
C. $x(6-x) = 8$
D. $x(6+x) = 8$

【答案】C

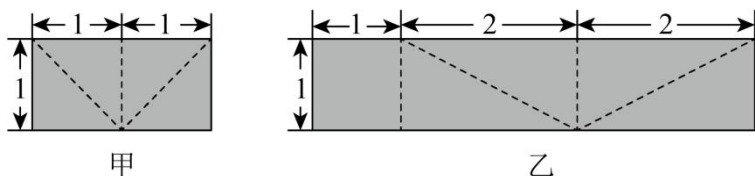
【解析】

【分析】本题考查列一元二次方程解决实际问题. 设长方形的一边长为 x 米, 则邻边长为 $(6-x)$ 米, 根据围成的长方形的面积为 8 平方米列出方程即可.

【详解】解：设长方形的一边长为 x 米，根据题意可列方程 $x(6-x)=8$.

故选: C.

6. 如图是甲、乙两张不同的纸片，将它们分别沿着虚线剪开后，各自要拼一个与原来面积相等的正方形，则（ ）



- A. 甲、乙都可以 B. 甲、乙都不可以
- C. 甲不可以，乙可以 D. 甲可以，乙不可以

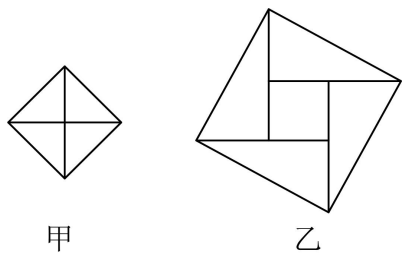
【答案】 A

【解析】

【分析】 本题主要考查了图形剪拼的相关知识，熟练掌握勾股定理与无理数是解决本题的关键.

首先根据图形可得甲可以拼一个边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形;再根据图形可得图乙可以拼一个边长为 $\sqrt{5}$ 的正方形,据此进行解答即可.

【详解】解：所作图形如图所示，



甲乙都可以拼一个与原来面积相等的正方形.

故选 A.

二、填空题 (本题共 12 小题, 每小题 2 分, 满分 24 分)

7.25 的算术平方根是 .

【答案】

5

【解析】

【分析】根据算术平方根的定义，若一个非负数 a 的平方等于 x ，则 a 是 x 的算术平方根．据此求解即可．

【详解】解： $\because 5^2 = 25$ ，

$\therefore 25$ 的算术平方根是 5．

故答案为：5．

8. 已知 $b > 0$ ，化简 $\sqrt{45ab^3} = \underline{\hspace{2cm}}$ ．

【答案】 $3b\sqrt{5ab}$ ## $3b\sqrt{5ba}$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的性质，根据二次根式的性质化简即可，掌握二次根式的性质是解题的关键．

【详解】解： $\because b > 0$ ，

$$\therefore \sqrt{45ab^3} = \sqrt{3^2 b^2 \times 5ab} = 3b\sqrt{5ab}，$$

故答案为： $3b\sqrt{5ab}$ ．

9. 若一个长方形的长为 $2\sqrt{3}$ ，宽为 $\sqrt{6}$ ，则这个长方形的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ．

【答案】 $6\sqrt{2}$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式在长方形面积计算中的应用，明确二次根式乘法运算法则及如何化为最简二次根式是解题的关键．根据长方形面积公式，面积等于长乘以宽，将长 $2\sqrt{3}$ 和宽 $\sqrt{6}$ 相乘，利用二次根式的乘法法则计算．

【详解】解：长方形的面积公式为 $S = \text{长} \times \text{宽}$ ，

$$\text{所以 } S = 2\sqrt{3} \times \sqrt{6}．$$

计算过程：

$$2\sqrt{3} \times \sqrt{6} = 2 \times \sqrt{3 \times 6} = 2 \times \sqrt{18}，$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}，$$

$$\text{因此 } 2 \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}．$$

故答案为： $6\sqrt{2}$ ．

10. 稀土是我国重要的战略矿产资源．2025 年我国预期新增稀土资源量 4960000 吨．这个数据用科学记数法表示为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ．

【答案】

$$4.96 \times 10^6$$

【解析】

【分析】 本题考查了用科学记数法表示绝对值较大的数，关键是熟练应用知识点；

将数字 4960000 用科学记数法表示，即写成 $a \times 10^n$ 的形式（其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数）.

【详解】 解： $\because$ 数字 4960000 共 7 个整数位，

$$\therefore n = 7 - 1 = 6, \quad a = 4.96,$$

$$\therefore 4960000 = 4.96 \times 10^6,$$

故答案为： 4.96×10^6 .

11. 一元二次方程 $x^2=4x$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

【解析】

【分析】 移项并采用因式分解的方法解方程.

【详解】 解： 移项得， $x^2 - 4x = 0$,

$$x(x-4)=0, \text{ 解得 } x=0 \text{ 或 } 4,$$

故答案为 $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

【点睛】 本题考查了因式分解法解方程.

12. 在实数范围内分解因式： $x^2 - 6x + 7 =$ _____.

【答案】 $(x-3+\sqrt{2})(x-3-\sqrt{2})$

【解析】

【分析】 本题考查在实数范围内分解因式，掌握相关知识是解决问题的关键. 将原式变形为 $x^2 - 6x + 9 - 2$,

利用完全平方公式可得 $(x-3)^2 - (\sqrt{2})^2$, 再用平方差公式因式分解即可.

【详解】 解： $x^2 - 6x + 7$

$$= x^2 - 6x + 9 - 2$$

$$= (x-3)^2 - (\sqrt{2})^2$$

$$= (x-3+\sqrt{2})(x-3-\sqrt{2}).$$

故答案为: $(x-3+\sqrt{2})(x-3-\sqrt{2})$.

13. 《九章算术》之“均输篇”中记载了中国古代的“运粟之法”: 今有一批公粮, 需运往距出发地 420km 的储粮站, 若运输这批公粮比原计划每日多行 10km, 则提前 1 日到达储粮站. 设运输这批公粮原计划每日行 x km, 则根据题意列出方程 _____.

【答案】 $\frac{420}{x} = \frac{420}{x+10} + 1$

【解析】

【分析】 本题考查了列分式方程, 根据题意列出方程是解题的关键. 设运输这批公粮原计划每日行 x km, 根据“运输这批公粮比原计划每日多行 10km, 则提前 1 日到达储粮站”, 列出分式方程, 即可求解.

【详解】 设运输这批公粮原计划每日行 x km, 根据题意得,

$$\frac{420}{x} = \frac{420}{x+10} + 1,$$

故答案为: $\frac{420}{x} = \frac{420}{x+10} + 1$.

14. 一个直角三角形斜边上的中线长度为 5, 则斜边的长度为_____.

【答案】 10

【解析】

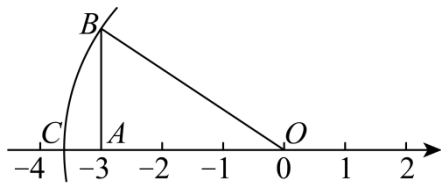
【分析】 本题考查直角三角形斜边上中线的性质, 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半的性质, 直接计算斜边长度.

【详解】 解: $\because$ 直角三角形斜边上的中线长度为 5,

$\therefore$ 斜边的长度为 $5 \times 2 = 10$.

故答案为: 10.

15. 利用勾股定理可以作出长为无理数的线段, 如图, 在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $\angle BAO = 90^\circ$, $AB = 2$, 点 A 恰好落在数轴上表示 -3 的点上, 以原点 O 为圆心, OB 的长为半径画弧交数轴于点 C , 使点 C 落在点 A 的左侧, 则点 C 所表示的数是_____.



【答案】 $-\sqrt{13}$

【解析】

【分析】 本题考查了实数与数轴，勾股定理，任意一个实数都可以用数轴上的点表示；反之，数轴上的任意一个点都表示一个实数.

依据勾股定理即可得到 OB 的长，进而得出 OP 的长，即可得到点 C 所表示的数.

【详解】 解：由题意得 $AO = 3$ ， $OB = OC$ ，

$$\because AB = 2, \angle BAO = 90^\circ,$$

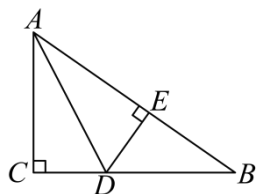
$$\therefore OB = \sqrt{AB^2 + AO^2} = \sqrt{13},$$

$$\therefore OC = \sqrt{13},$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 所表示的数是 } -\sqrt{13},$$

故答案为： $-\sqrt{13}$.

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ， $DE \perp AB$ 于点 E ，如果 $\triangle BDE$ 的周长为 12cm ， AC 长为 4cm ，则 $\triangle ABC$ 的周长为 cm .



【答案】 20

【解析】

【分析】 本题考查了角平分线的性质，全等三角形的判定和性质，掌握相关知识是解题的关键.

根据角平分线的性质得到 $CD = ED$ ，从而根据 $\triangle BDE$ 的周长为 12cm 得到 $BC + BE = 12\text{cm}$ ，再证明 $\text{Rt}\triangle ACD \cong \text{Rt}\triangle AED$ 得到 $AE = AC = 4\text{cm}$ ，根据三角形的周长求解即可.

【详解】 解： $\because AD$ 平分 $\angle BAC$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $DE \perp AB$ ，

$$\therefore CD = ED,$$

$$\therefore C_{\triangle BDE} = DE + BD + BE = 12\text{cm},$$

$$\therefore CD + BD + BE = 12\text{cm},$$

$$\text{即 } BC + BE = 12\text{cm},$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 和 $\text{Rt}\triangle AED$ 中

$$\begin{cases} AD = AD \\ CD = ED \end{cases},$$

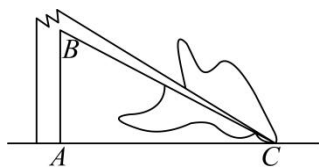
$\therefore \text{Rt}\triangle ACD \cong \text{Rt}\triangle AED$ (直角三角形全等的判定定理),

$$\therefore AE = AC = 4\text{cm},$$

$$\therefore C_{\triangle ABC} = AC + BC + AB = AC + BC + BE + AE = 4 + 12 + 4 = 20(\text{cm}).$$

故答案为：20.

17. 如图，一棵树（树干与地面垂直）原来高10m，在一次强台风中树被强风折断，倒下后的树顶C与树根A的距离AC为6m，则这棵树断裂处点B离地面的高度AB的长为_____m.



【答案】 $\frac{16}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查勾股定理，设 $AB = xm$ ，则 $BC = (10-x)m$ ，根据勾股定理列出方程进行求解即可.

【详解】 解：由题意设 $AB = xm$ ，则 $BC = (10-x)m$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ，即 $x^2 + 6^2 = (10-x)^2$ ，

解得 $x = \frac{16}{5}$ ；

故答案为： $\frac{16}{5}$.

18. 定义：连接三角形的一个顶点和其对边上一点，若所得线段能将该三角形分割成两个等腰三角形，则称该线段为原三角形的“双等线”. 例如：任意直角三角形斜边上的中线就是一条过直角顶点的“双等线”. 问题解决：已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 2$ ，如果 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中存在过锐角顶点的“双等线”，则 BC 的长为_____.

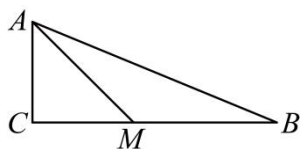
【答案】 $2\sqrt{2} + 2$ 或 $2\sqrt{2} - 2$

【解析】

【分析】 本题考查等腰三角形的性质，勾股定理，掌握分类讨论思想是解题的关键. 考虑“双等线”从锐角顶点 A 或 B 出发的情况，分别讨论使分割后的两个三角形均为等腰三角形的条件，通过几何关系和解方程求得 BC 的可能长度.

【详解】 解：分两种情况讨论：

①若“双等线”从顶点 A 出发，如图， AM 是“双等线”，



则 $\triangle ACM$ ， $\triangle ABM$ 是等腰三角形，

$$\therefore CM = AC = 2,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

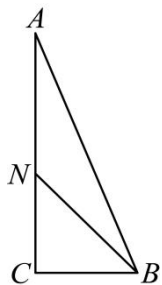
$$\therefore AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = 2\sqrt{2},$$

$\because \triangle ABM$ 是等腰三角形，

$$\therefore BM = AM = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore BC = CM + BM = 2 + 2\sqrt{2}.$$

②若“双等线”从顶点 B 出发，如图， BN 是“双等线”，



则 $\triangle BCN$ ， $\triangle ABN$ 是等腰三角形，

设 $BC = x$ ，

$\because \triangle BCN$ 是等腰三角形，

$$\therefore NC = BC = x,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore BN = \sqrt{BC^2 + CN^2} = \sqrt{2}x,$$

$\because \triangle ABN$ 是等腰三角形，

$$\therefore AN = BN = \sqrt{2}x,$$

$$\because AN + NC = AC,$$

$$\therefore \sqrt{2}x + x = 2,$$

$$\therefore x = 2\sqrt{2} - 2,$$

$$\therefore BC = 2\sqrt{2} - 2.$$

综上所述, BC 的长为 $2\sqrt{2}+2$ 或 $2\sqrt{2}-2$.

故答案为: $2\sqrt{2}+2$ 或 $2\sqrt{2}-2$.

三、解答题 (本题共 5 小题, 每小题 6 分, 满分 30 分)

19. 计算: $\frac{1}{2+\sqrt{3}} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{12}$.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算, 熟练掌握运算是解题的关键.

根据二次根式的性质, 分母有理化进行计算即可.

【详解】 解: $\frac{1}{2+\sqrt{3}} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{12}$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} - (\sqrt{3}-1) + 2\sqrt{3}$$
$$= 2-\sqrt{3}-\sqrt{3}+1+2\sqrt{3}$$
$$= 3.$$

20. 用配方法解方程: $\frac{1}{2}x^2 - x - 1 = 0$

【答案】 $x_1 = 1-\sqrt{3}$, $x_2 = 1+\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程, 解题的关键是选择适当的方法解一元二次方程.

根据配方法求解一元二次方程求解即可.

【详解】 解: $\frac{1}{2}x^2 - x - 1 = 0$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 - 1 - 2 = 0$$
$$(x-1)^2 - 3 = 0$$
$$(x-1)^2 = 3$$
$$\therefore x-1 = \pm\sqrt{3},$$

解得 $x_1 = 1 - \sqrt{3}$, $x_2 = 1 + \sqrt{3}$.

21. 解方程: $\frac{x-10}{x^2-4} + 1 = \frac{3}{x+2}$.

【答案】 $x = 4$

【解析】

【分析】 本题考查解分式方程，掌握解分式方程的方法是解题的关键.

将方程两边同乘 $(x+2)(x-2)$ ，去分母转化为整式方程，求解并检验即可.

【详解】 解: $\frac{x-10}{x^2-4} + 1 = \frac{3}{x+2}$,

方程两边同乘 $(x+2)(x-2)$ ，得 $x-10+(x+2)(x-2)=3(x-2)$,

整理，得 $x^2-2x-8=0$,

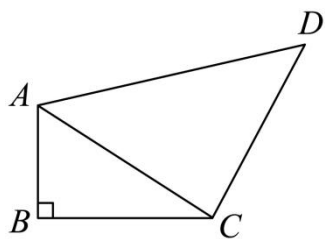
解得 $x_1 = -2$, $x_2 = 4$,

检验: 当 $x_1 = -2$ 时, $(x+2)(x-2) = 0$, 所以 $x_1 = -2$ 不是原分式方程的解;

当 $x_2 = 4$ 时, $(x+2)(x-2) \neq 0$, 所以 $x_2 = 4$ 是原分式方程的解,

$\therefore$ 原分式方程的解为 $x = 4$.

22. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 2$ ， $BC = 4$ ， $CD = 2\sqrt{5}$ ， $AD = 2\sqrt{10}$.



(1) 求 AC 的长;

(2) 求四边形 $ABCD$ 的面积.

【答案】 (1) $2\sqrt{5}$

(2) 14

【解析】

【分析】 本题考查勾股定理及其逆定理，掌握勾股定理及其逆定理是解题的关键.

(1) 根据勾股定理求解即可;

(2) 先运用勾股定理的逆定理判定 $\triangle ADC$ 为直角三角形，再根据四边形 $ABCD$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 与

$\triangle ADC$ 的面积之和, 即可解答.

【小问 1 详解】

解: $\because \angle B = 90^\circ$, $AB = 2$, $BC = 4$,

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}.$$

【小问 2 详解】

解: $\because AC = 2\sqrt{5}$, $CD = 2\sqrt{5}$, $AD = 2\sqrt{10}$

$$\therefore AC^2 + CD^2 = AD^2,$$

$\therefore \triangle ACD$ 是直角三角形, $\angle ACD = 90^\circ$,

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\text{Rt}\triangle ABC} + S_{\text{Rt}\triangle ACD}$$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot BC + \frac{1}{2} AC \cdot CD$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 4 + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}$$

$$= 14.$$

23. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2m-1)x + m^2 - 1 = 0$.

(1) 若方程有两个不相等的实数根, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若方程的两实数根分别为 x_1 和 x_2 , 且满足 $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 0$, 求实数 m 的值.

【答案】(1) $m < \frac{5}{4}$

(2) $m = 0$

【解析】

【分析】本题考查根的判别式, 根与系数之间的关系, 熟练掌握相关知识点是解题的关键:

(1) 根据方程有两个不相等的实数根, 得到 $\Delta > 0$, 进行求解即可;

(2) 根据根与系数之间的关系, 列出方程进行求解即可.

【小问 1 详解】

解: 由题意, $\Delta = (2m-1)^2 - 4(m^2 - 1) > 0$,

解得 $m < \frac{5}{4}$;

【小问 2 详解】

解: $\because x^2 + (2m-1)x + m^2 - 1 = 0$, 方程的两实数根分别为 x_1 和 x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = 1 - 2m, x_1 x_2 = m^2 - 1,$$

$$\therefore x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 1 - 2m + m^2 - 1 = 0,$$

解得 $m = 0$ 或 $m = 2$;

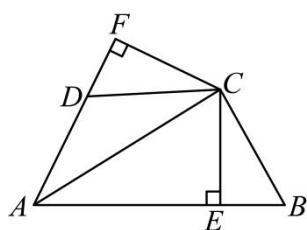
$$\therefore \Delta = (2m-1)^2 - 4(m^2-1) \geq 0,$$

$$\therefore m \leq \frac{5}{4},$$

$$\therefore m = 0.$$

四、解答题 (本题共 3 题, 满分 28 分)

24. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $BC = CD$, 过点 C 作 $CE \perp AB$ 于 E , $CF \perp AD$ 于 F 且 $DF = BE$.



(1) 求证: AC 平分 $\angle DAB$;

(2) 求证: $AB + AD = 2AE$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查全等三角形的判定及性质, 角平分线的判定定理, 掌握相关知识是解题的关键.

(1) 根据直角三角形全等的判定定理证明 $\text{Rt}\triangle CDF \cong \text{Rt}\triangle CBE$, 得到 $CF = CE$, 再由角平分线的判定定理即可证明;

(2) 根据直角三角形全等的判定定理证明 $\text{Rt}\triangle ACF \cong \text{Rt}\triangle ACE$, 得到 $AF = AE$, 再由线段的和差即可证明.

【小问 1 详解】

证明: $\because CE \perp AB$, $CF \perp AD$,

$$\therefore \angle BEC = \angle F = 90^\circ,$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle CDF$ 和 $\text{Rt}\triangle CBE$ 中,

$$\begin{cases} CD = CB \\ DF = BE \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle CDF \cong \text{Rt}\triangle CBE$ (直角三角形全等的判定定理),

$\therefore CF = CE$,
 $\because CE \perp AB, CF \perp AD$,
 $\therefore AC$ 平分 $\angle DAB$.
【小问 2 详解】
 证明: $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ACF$ 和 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} AC = AC \\ CF = CE \end{cases}$$
 $\therefore \text{Rt}\triangle ACF \cong \text{Rt}\triangle ACE$ (直角三角形全等的判定定理),
 $\therefore AF = AE$,
 $\therefore BE = DF$
 $\therefore AB + AD = AE + BE + AF - DF = AE + BE + AE - BE = 2AE$.

25. 根据以下素材，完成探索任务.

情 景	制定芯片生产线扩张方案.
素 材 一	2025 年储存芯片成为了全球稀缺商品. 某芯片公司引进了一条储存芯片生产线. 开工第一季度生产 200 万个，第三季度生产 288 万个.
素 材 二	经调查发现，一条生产线最大满负荷产能是 300 万个/季度，若每增加 1 条生产线，每条生产线的最大产能将减少 20 万个/季度.
问题解决	
任 务 一	根据素材一，若该生产线每季度生产量的增长率相等，求第一季度到第三季度生产量的每季度增长率.
任 务 二	根据素材二，为迎接 2026 年的储存芯片需求，需要增加生产线，现该公司要保证每季度生产储存芯片最大总产能达到 1200 万个，在增加产能同时要节省投入成本的条件下（生产线越多，投入成本越大），请你为该公司决定应该增加多少条生产线.

【答案】

任务一：20%

任务二：5条

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的实际应用，解题的关键是根据题意找到等量关系，列出方程并求解.

任务一：根据第一季度和第三季度的产量，利用平均增长率的公式列方程求解；

任务二：根据生产线数量与每条生产线产能的关系，列方程求解并根据节省成本的条件确定最终答案.

【详解】 解：任务一：

设第一季度到第三季度生产量的每季度增长率为 r ，

根据题意得： $200(1+r)^2 = 288$ ，

解得 $r = 0.2 = 20\%$ ， $r = -2.2$ （不符合题意，舍去），

答：第一季度到第三季度生产量的每季度增长率为20%；

任务二：

设增加 x 条生产线，则每条生产线产能为 $(300-20x)$ 万个/季度，

根据题意得： $(1+x)(300-20x) = 1200$ ，

整理得 $x^2 - 14x + 45 = 0$ ，即 $(x-5)(x-9) = 0$ ，

解得 $x = 5$ 或 $x = 9$ ，

∵在增加产能同时要节省投入成本，

∴ $x = 5$.

答：应增加5条生产线.

26. **【问题背景】** $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle B = \alpha$ ($\alpha < 45^\circ$)，点 D 是 AB 边的中点，点 E 是 BC 边上动点（不与点 B 、点 C 重合），连接 DE ，将线段 DE 绕点 D 逆时针旋转 2α （即 $\angle EDF = 2\angle B$ ），得到线段 DF ，连接 BF .

【研究特例】

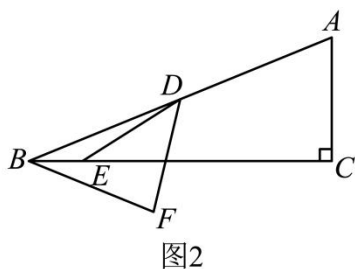
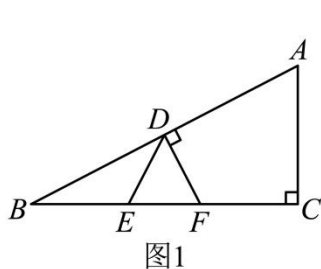
(1) 如图1，若点 F 刚好落在 BC 边上.

①求证： $DF \perp AB$ ；

②求证：线段 AC ， BE ， BF 满足等量关系： $BF^2 = AC^2 + BE^2$.

【问归一般】

(2) 探究：如图 2 当点 F 落在 $\triangle ABC$ 外部时，是否依然成立 $BF^2 = AC^2 + BE^2$ ，请证明你的结论.



【答案】(1) ①见解析；②见解析；(2) 成立，证明见解析

【解析】

【分析】(1) ①由旋转有 $DE = DF$ ，得到 $\angle DEF = \angle DFE = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha$ ，从而 $\angle BDF = 180^\circ - \angle B - \angle DEF = 90^\circ$ ，即可得证 $DF \perp AB$ ；

②连接 CD ，过点 D 作 $DH \perp BC$ 于点 H ，根据直角三角形斜边上中线的性质得到 $CD = BD = \frac{1}{2}AB$ ，根据“三线合一”得到 $BH = CH$ ， $EH = FH$ ，从而可得 $BE = CF$ 。连接 AF ，根据垂直平分线的性质得到 $BF = AF$ ，根据勾股定理有 $AF^2 = AC^2 + CF^2$ ，等量代换即可得证结论；

(2) 过点 A 作 $AG \parallel BC$ ，且取 $AG = BE$ ，证明 $\triangle AGD \cong \triangle BED$ (SAS)，得到 $DG = DE$ ，证明 $\angle DCB = \angle DBC = \alpha$ ，得到 $\angle ADG = 2\alpha = \angle BDE$ ，从而 $\angle GDC = \angle FDB$ ，证明 $\triangle BDF \cong \triangle CDG$ (SAS) 得到 $CG = BF$ ，根据勾股定理有 $CG^2 = AC^2 + AG^2$ ，等量代换即可得证结论。

【详解】(1) 证明：① $\because \angle EDF = 2\alpha$ ，

$$\therefore \angle DEF + \angle DFE = 180^\circ - \angle EDF = 180^\circ - 2\alpha,$$

$\therefore$ 由旋转可得 $DE = DF$ ，

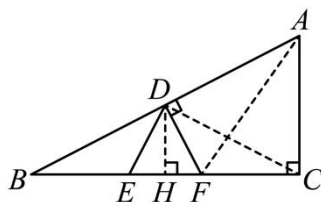
$$\therefore \angle DEF = \angle DFE = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \angle B = \alpha,$$

$$\therefore \angle BDF = 180^\circ - \angle B - \angle DEF = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ,$$

$$\therefore DF \perp AB.$$

②如图，连接 CD ，过点 D 作 $DH \perp BC$ 于点 H ，



$\because \angle ACB = 90^\circ$, 点 D 是 AB 的中点,

$$\therefore CD = BD = \frac{1}{2} AB,$$

$\because DH \perp BC$,

$$\therefore BH = CH,$$

$\because DE = DF$, $DH \perp BC$,

$$\therefore EH = FH,$$

$$\therefore BH - EH = CH - FH, \text{ 即 } BE = CF,$$

连接 AF ,

$\because DF \perp AB$, 点 D 是 AB 的中点,

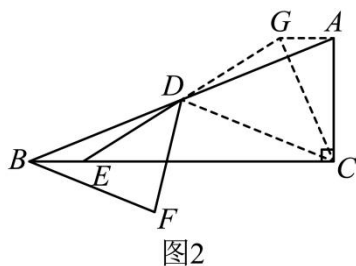
$$\therefore BF = AF,$$

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ACF$ 中, $AF^2 = AC^2 + CF^2$,

$$\therefore BF^2 = AC^2 + BE^2.$$

(2) 解: 结论成立, 理由如下,

如图所示, 过点 A 作 $AG \parallel BC$, 且取 $AG = BE$,



$$\therefore \angle GAD = \angle EBD,$$

$\because$ 点 D 是 AB 边的中点,

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore \triangle AGD \cong \triangle BED (\text{SAS}),$$

$$\therefore DG = DE,$$

$$\because CD = BD,$$

$$\therefore \angle DCB = \angle DBC = \alpha$$

$$\therefore \angle ADC = \angle DBC + \angle DCB = 2\alpha,$$

$$\because \angle EDF = 2\alpha,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle EDF,$$

$$\because \angle ADG = \angle BDE ,$$

$$\therefore \angle ADC + \angle ADG = \angle EDF + \angle BDE ,$$

$$\therefore \angle GDC = \angle FDB ,$$

$$\because DE = DF , \quad DE = DG ,$$

$$\therefore DG = DF ,$$

$\therefore$ 在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle CDG$ 中,

$$\begin{cases} DF = DG \\ \angle BDF = \angle CDG \\ BD = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BDF \cong \triangle CDG (\text{SAS}),$$

$$\therefore CG = BF$$

$$\because AG \parallel BC ,$$

$$\therefore \angle GAC = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ ,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ACG \text{ 中, } CG^2 = AC^2 + AG^2 ,$$

$$\therefore BF^2 = AC^2 + BE^2 .$$

【点睛】 本题考查旋转的性质，等腰三角形的性质，直角三角形斜边上中线的性质，垂直平分线的性质，勾股定理，掌握相关知识是解题的关键.