

2025-2026 学年八年级数学上学期期末模拟卷

强化卷·考试版

(考试时间: 100 分钟 试卷满分: 100 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。
4. 测试范围: 沪教版 2024 五四制八年级上册。

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 3 分, 共 18 分. 下列各题四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题卡的相应位置上.)

1. 下列二次根式中, 属于最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{45}$ B. $\sqrt{\frac{xy}{3}}$ C. $\sqrt{a^2 - b^2}$ D. $\sqrt{a^2 + 2a + 1}$

【答案】C

【分析】本题考查了最简二次根式. 根据最简二次根式的定义 (被开方数不含分母, 且不含能开得尽方的因数或因式), 逐一分析各选项, 即可作答.

【详解】解: A、 $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{3^2 \times 5}$, 含有能开得尽方的因数, 故不是最简二次根式;

B、 $\sqrt{\frac{xy}{3}}$ 含分母, 故不是最简二次根式;

C、 $\sqrt{a^2 - b^2}$ 属于最简二次根式,

D、 $\sqrt{a^2 + 2a + 1} = \sqrt{(a+1)^2}$ 含有能开得尽方的因式, 故不是最简二次根式;

故选: C

2. 下列说法正确的是 ()

- A. 27 的立方根是 ± 3 B. $\sqrt{(-5)^2} = -5$
C. 无理数都是无限小数 D. -9 的平方根是 -3

【答案】C

【分析】本题考查立方根、平方根和无理数的基本概念, 熟练掌握相关知识点是解题的关键. 根据定义逐一判断: 立方根只有一个实根; 平方根运算结果非负; 无理数是无限不循环小数; 负数无实数平方根.

【详解】选项 A：27 的立方根是 3，不是 ± 3 ，不符合题意；

选项 B： $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 \neq -5$ ，不符合题意；

选项 C：无理数是无限不循环小数，所以无理数都是无限小数，符合题意；

选项 D：负数没有实数平方根，不符合题意。

故选：C。

3. 下列计算正确的是（ ）

A. $\sqrt{4} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ B. $3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{18}}{3} = \sqrt{6}$

【答案】B

【分析】本题考查了二次根式的混合运算，熟练掌握二次根式的性质、二次根式的乘法法则和除法法则是解决问题的关键。根据二次根式的减法运算对 A 选项进行判断；根据二次根式的加法运算对 B 选项进行判断；根据二次根式的乘法法则对 C 选项进行判断；根据二次根式的性质对 D 选项进行判断。

【详解】解：A. $\sqrt{4} - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$ ，所以 A 选项不符合题意；

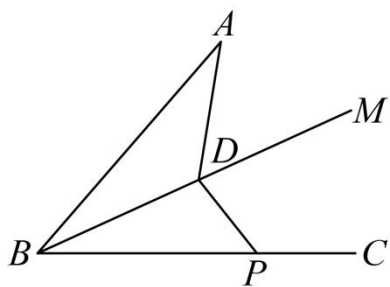
B. $3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ ，所以 B 选项符合题意；

C. $\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{3 \times \frac{5}{3}} = \sqrt{5}$ ，所以 C 选项不符合题意；

D. $\frac{\sqrt{18}}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$ ，所以 D 选项不符合题意。

故选：B。

4. 如图，BM 是 $\angle ABC$ 的平分线，点 D 是 BM 上一点，点 P 为直线 BC 上的一个动点。若 $\triangle ABD$ 的面积为 9， $AB = 6$ ，则线段 DP 的长不可能是（ ）

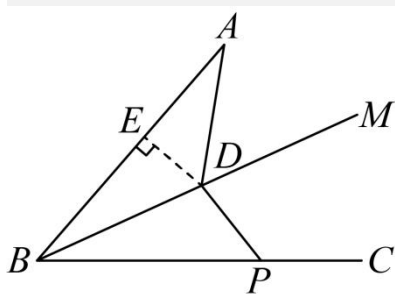


- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5.5

【答案】A

【分析】本题考查角平分线的性质定理，垂线段最短，过点 D 作 $DE \perp AB$ ，利用三角形的面积公式求出 DE 的长，根据垂线段最短得到 $DP \perp BC$ 时，DP 最短，此时 $DP = DE$ ，进行判断即可。

【详解】解：过点 D 作 $DE \perp AB$ ，



则: $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DE = \frac{1}{2} \times 6DE = 9$,

$\therefore DE = 3$,

$\because$ 点 P 为直线 BC 上的一个动点,

$\therefore$ 当 $DP \perp BC$ 时, DP 最短,

$\because BM$ 是 $\angle ABC$ 的平分线,

$\therefore$ 当 $DP \perp BC$ 时, $DP = DE = 3$,

$\therefore$ 线段 DP 的长不可能是 2;

故选 A.

5. 请判断关于 x 的一元二次方程 $x^2 - kx + k - 1 = 0$ 根的情况, 其中 k 为常数且 $k \neq 2$ ()

- A. 两个实数根 B. 两个不相等的实数根 C. 两个相等的实数根 D. 没有实数根

【答案】B

【分析】根据一元二次方程根的判别式进行判断即可.

【详解】解: 一元二次方程 $x^2 - kx + k - 1 = 0$,

$\therefore a = 1, b = -k, c = k - 1$,

$\therefore \Delta = (-k)^2 - 4 \times 1 \times (k - 1) = k^2 - 4k + 4 = (k - 2)^2$,

$\because k \neq 2$,

$\therefore \Delta = (k - 2)^2 > 0$,

$\therefore$ 原方程有两个不相等的实数根,

故选: B.

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式, 熟知一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, 方程有两个不相等的实数根; $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, 方程有两个相等的实数根; $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, 方程没有实数根; 是解本题的关键.

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的对边分别是 a , b , c , 则下列条件中不能说明 $\triangle ABC$ 是直角三角形的

是 ()

A. $\angle B = \angle C + \angle A$

B. $a:b:c=3:4:5$

C. $a^2 = b^2 - c^2$

D. $\angle A:\angle B:\angle C=2:3:4$

【答案】D

【分析】本题考查了三角形内角和定理，以及勾股定理的逆定理，熟练掌握各知识点是解答本题的关键. 根据三角形内角和定理可判断 A 和 D，根据勾股定理可判断 B 和 C，在一个三角形中，如果三角形两边的平方和等于第三边的平方，那么这个三角形是直角三角形.

【详解】解：A、 $\because \angle B = \angle C + \angle A$ ， $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ，
 $\therefore 2\angle B = 180^\circ$ ， $\therefore \angle B = 90^\circ$ ，
 $\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形，不符合题意；
B、 $\because a:b:c=3:4:5$ ，
设 $a=3k(k \neq 0)$ ，则 $b=4k, c=5k$ ，
 $\therefore a^2 + b^2 = (3k)^2 + (4k)^2 = 25k^2 = (5k)^2 = c^2$ ，
 $\therefore \angle C = 90^\circ$ ，不符合题意；
C、 $a^2 = b^2 - c^2$ ，则 $a^2 + c^2 = b^2$ ， $\triangle ABC$ 为直角三角形，不符合题意；
D、 $\because \angle A:\angle B:\angle C=2:3:4$ ，
 $\therefore$ 设 $\angle A=2x^\circ, \angle B=3x^\circ, \angle C=4x^\circ$ ，
 $\therefore 2x+3x+4x=180$ ，解得 $x=20$ ，
 $\therefore \angle C=80^\circ$ ，
 $\therefore \triangle ABC$ 不是直角三角形，符合题意；
故选：D.

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 2 分，共 24 分.)

7. 比较大小： $-2\sqrt{3}$ _____ $-\sqrt{15}$ (填“>”“<”或“=”)

【答案】>

【分析】本题考查了比较二次根式的大小. 先整理 $-2\sqrt{3} = \sqrt{-12}$ ，根据 $\sqrt{15} > \sqrt{12}$ ，得 $-\sqrt{12} > -\sqrt{15}$ ，则 $-2\sqrt{3} > -\sqrt{15}$ ，即可作答.

【详解】解：依题意， $-2\sqrt{3} = -\sqrt{2^2 \times 3} = -\sqrt{12}$ ，

$$\therefore 15 > 12,$$

$$\therefore \sqrt{15} > \sqrt{12},$$

$$\therefore -\sqrt{12} > -\sqrt{15},$$

$$\text{即 } -2\sqrt{3} > -\sqrt{15},$$

故答案为：>.

8. $\sqrt{a+b}$ 的有理化因式是_____.

【答案】 $\sqrt{a+b} / \sqrt{b+a}$

【分析】本题考查了有理化因式，如果两个含有二次根式的非零代数式相乘，它们的积不含有二次根式，就说这两个非零代数式互为有理化因式.

根据有理化因式的定义：两个根式相乘的积不含根号即可解答.

【详解】解： $\because \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{a+b} = a+b$ ，

$\therefore \sqrt{a+b}$ 的有理化因式为 $\sqrt{a+b}$.

故答案为： $\sqrt{a+b}$.

9. 化简 $|3-\pi| + \sqrt{(4-\pi)^2} =$ _____.

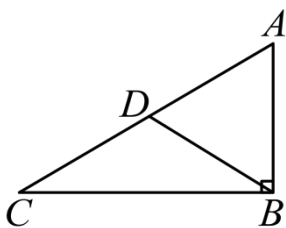
【答案】 1

【分析】本题考查了化简绝对值，二次根式的化简，熟练掌握以上知识点是解题的关键. 根据绝对值和二次根式的性质化简即可.

【详解】解： $|3-\pi| + \sqrt{(4-\pi)^2} = \pi-3 + |4-\pi| = \pi-3 + 4-\pi = 1$ ，

故答案为： 1.

10. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle A = 60^\circ$ ， D 为 AC 的中点， $AB = 6\text{cm}$ ，则 $BD =$ _____.



【答案】 6cm

【分析】本题考查的是 30° 的直角三角形的性质和直角三角形斜边的中线等于斜边的一半，熟练掌握相关定理是解决本题的关键。根据含 30° 度角的直角三角形的性质求出 AC ，根据直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半解答即可。

【详解】解： $\because \angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle C = 90^\circ - \angle A = 30^\circ$ 。
 $\because AB = 6\text{cm}$ ，
 $\therefore AC = 2AB = 12\text{cm}$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， D 为 AC 的中点，

$\therefore BD = \frac{1}{2}AC = 6\text{cm}$ 。

故答案为：6cm。

11. 在实数范围内因式分解： $3x^2 - 2x - 2 =$ _____。

【答案】 $3\left(x - \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$

【分析】本题主要考查了解因式，解一元二次方程，令 $3x^2 - 2x - 2 = 0$ ，求出方程的两个根即可得到答案。

【详解】解：令 $3x^2 - 2x - 2 = 0$ ，
解得 $x = \frac{2+2\sqrt{7}}{6} = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$ 或 $x = \frac{2-2\sqrt{7}}{6} = \frac{1-\sqrt{7}}{3}$ ，

$\therefore 3x^2 - 2x - 2 = 3\left(x - \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$ ，

故答案为： $3\left(x - \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$ 。

12. 不等式 $-\sqrt{5}x - 1 > 2x$ 的解集是_____。

【答案】 $x < 2 - \sqrt{5}$

【分析】本题主要考查了解一元一次不等式，分母有理化，严格遵循解不等式的基本步骤是解本题的关键，尤其需要注意不等式两边都乘以或除以同一个负数，不等号方向要改变。通过移项、合并同类项、系数化为1，再根据二次根式分母有理化化简即可求出不等式的解集。

【详解】解： $-\sqrt{5}x - 1 > 2x$ ，
 $-\sqrt{5}x - 2x > 1$ ，

$$-(\sqrt{5}+2)x > 1,$$

由于 $\sqrt{5}+2 > 0$ ，所以 $-(\sqrt{5}+2) < 0$ ，除以负数时不等号方向改变，得：

$$x < \frac{1}{-(\sqrt{5}+2)},$$

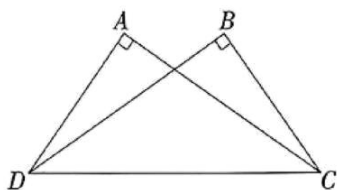
$$\text{即 } x < -\frac{1}{\sqrt{5}+2},$$

分子分母同乘 $\sqrt{5}-2$ ，得：

$$x < -\frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5})^2-2^2} = -\frac{\sqrt{5}-2}{5-4} = -(\sqrt{5}-2) = 2-\sqrt{5},$$

故答案为： $x < 2-\sqrt{5}$.

13. 如图，在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BDC$ 中， $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ， $AD = BC$ ， $\angle ACD = 35^\circ$ ，则 $\angle ADB$ 的度数为_____.



【答案】 20° /20 度

【分析】 本题考查了直角三角形的判定及性质，直角三角形的特征，由 HL 可判定 $\text{Rt}\triangle ADC \cong \text{Rt}\triangle BCD$ ，由全等三角形的性质得 $\angle ACD = \angle BDC = 35^\circ$ ，由 $\angle ADB = \angle ADC - \angle ACD$ 即可求解.

【详解】 解： $\because AD = BC$ ，

$$DC = CD,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADC \cong \text{Rt}\triangle BCD \quad (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BDC = 35^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ - \angle ACD = 55^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ADC - \angle ACD = 20^\circ,$$

故答案为： 20° .

14. 已知 α 和 β 是一元二次方程 $x^2 - 4x - 1 = 0$ 的两个根，则 $\alpha^2 + 4\beta - 1$ 的值为_____.

【答案】 16

【分析】 根据题意，利用根与系数关系，变形计算解答即可.

本题考查了根与系数关系，求代数式的值，掌握解答的方法是解题的关键.

【详解】解：∵ a 和 β 是一元二次方程 $x^2 - 4x - 1 = 0$ 的两个根，

$$\therefore a + \beta = 4, a\beta = -1, a^2 - 4a - 1 = 0,$$

$$\therefore a^2 - 1 = 4a,$$

$$\therefore a^2 + 4\beta - 1 = 4a + 4\beta = 4(a + \beta) = 16,$$

故答案为：16.

15. 利用方程可以将无限循环小数化成分数，例如：将 $0.\dot{7}$ 化成分数，可以先设 $0.\dot{7} = x$ ，由 $0.\dot{7} = 0.777\cdots$ 可知， $10x = 7.777\cdots$ ，所以 $10x - x = 7$ ，解方程得 $x = \frac{7}{9}$ ，于是得 $0.\dot{7} = \frac{7}{9}$ 。仿此方法， $0.\dot{7}\dot{3} = 0.7373\cdots$ 用分数表示为_____。

【答案】 $\frac{73}{99}$

【分析】设 $0.\dot{7}\dot{3} = x$ ，由 $0.\dot{7}\dot{3} = 0.7373\cdots$ ，可得 $100x = 73.73\cdots$ ，进而可列方程 $100x - x = 73$ ，计算求解即可。

【详解】解：设 $0.\dot{7}\dot{3} = x$

$$\therefore 0.\dot{7}\dot{3} = 0.7373\cdots$$

$$\therefore 100x = 73.73\cdots$$

$$\therefore 100x - x = 73$$

合并同类项得： $99x = 73$

系数化为 1 得： $x = \frac{73}{99}$

故答案为： $\frac{73}{99}$ 。

【点睛】本题考查了解一元一次方程。解题的关键在于根据题意列正确的方程。

16. 电动车每小时比自行车多行驶 20 千米，自行车行驶 30 千米比电动车行驶 40 千米多用了 1 小时，求两车的平均速度各为多少。设电动车的平均速度为 x 千米/小时，应列方程为_____。

【答案】 $\frac{30}{x-20} - 1 = \frac{40}{x}$

【分析】本题主要考查分式方程的应用，根据电动车与自行车速度相差 20 千米可设自行车的平均速度为 $(x-20)$ 千米/时，然后再用路程与速度的商表示出两种交通工具各自行驶里程所用的时间，最后用相差的时间建立分式方程。根据两种交通工具行驶时间相差 1 小时建立方程是解题的关键。

【详解】解：因为电动车的平均速度为 x 千米/小时，则自行车的平均速度为 $(x-20)$ 千米/时。

故自行车行驶 30 千米所用的时间为 $\frac{30}{x-20}$ 小时，电动车行驶 40 千米所用的时间为 $\frac{40}{x}$ ，

根据两种交通工具所用时间相差 1 小时，可得： $\frac{30}{x-20}-1=\frac{40}{x}$ 。

故答案为： $\frac{30}{x-20}-1=\frac{40}{x}$ 。

17. 若两个一元二次方程有且只有一个公共的实数根，我们就称这两个方程为“同伴方程”。若关于 x 的一元二次方程 $x^2+nx+2=0$ 和 $x^2+2x+n=0$ 是“同伴方程”，则 $n=$ _____。

【答案】 -3

【分析】 本题考查新定义——“同伴方程”。熟练掌握新定义，解一元二次方程，一元二次方程的解的定义，是解题的关键。

设公共根为 r ，代入两个方程后相减，得到关于 n 和 r 的方程，通过讨论得出 n 的值。

【详解】 设公共根为 r ，

则 $r^2+nr+2=0$ ①，

$r^2+2r+n=0$ ②，

①式减去②式得： $(r^2+nr+2)-(r^2+2r+n)=0$ 。

$\therefore nr+2-2r-n=0$ 。

$\therefore (n-2)r+(2-n)=0$ 。

$\therefore (n-2)(r-1)=0$ 。

$\therefore n-2=0$ 或 $r-1=0$ 。

若 $n-2=0$ ，

则 $n=2$ 。

此时方程①为 $x^2+2x+2=0$ ，

判别式 $\Delta=2^2-4\times 1\times 2=-4<0$ ，无实数根，不符合题意。

若 $r-1=0$ ，

则 $r=1$ 。

代入方程①得 $1^2+n\times 1+2=0$ ，

即 $n+3=0$ 。

$\therefore n=-3$ 。

当 $n=-3$ 时，

方程①为 $x^2-3x+2=0$ ，

根为 $x=1$ 和 $x=2$ ；

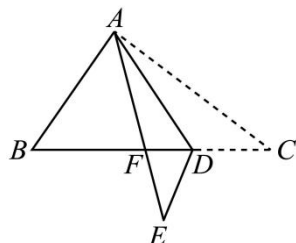
方程②为 $x^2 + 2x - 3 = 0$,

根为 $x = -3$ 和 $x = 1$.

公共根只有 $x = 1$.

符合“同伴方程”定义.

18. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 3$, $AC = 4$, 点 D 是 BC 上的一动点, 将 $\triangle ACD$ 沿 AD 折叠得到 $\triangle ADE$, 设 AE 与 BC 相交于点 F , 当 $\triangle EFD$ 为直角三角形时, $CD =$ _____.



【答案】2 或 $\frac{4}{5}$

【分析】本题主要考查的是翻折的性质、勾股定理, 根据题意画出符合题意的图形是解题的关键.

分三种情况: 当 $\angle DFE = 90^\circ$ 时, 根据等面积法得出 $AF = \frac{12}{5}$, 由勾股定理可求得 $BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} = \frac{9}{5}$,

$EF = AE - AF = \frac{8}{5}$, 然后继续利用勾股定理求解即可; ② $\angle FDE = 90^\circ$ 时, 连接 CE , 延长 AD 交 CE 于点 G ,

过点 A 作 $AH \perp BC$, 然后证明 $AH = DH$, 设 $CD = x$, 则 $DH = CH - CD = \frac{16}{5} - x$, 建立方程即可求解; 根

据题意得出 $\angle C = \angle E$, 确定 $\angle E \neq 90^\circ$, 即可求解.

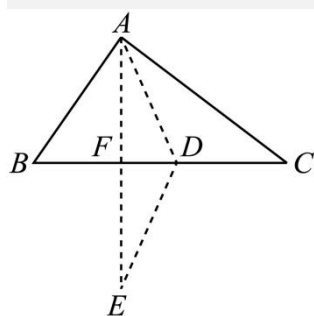
【详解】解: $\because \angle BAC = 90^\circ$, $AB = 3$, $AC = 4$,

$\therefore BC = 5$,

$\because$ 折叠,

$\therefore AE = AC = 4$,

当 $\angle DFE = 90^\circ$ 时, 如图所示,



$\therefore AE \perp BC$,

$\therefore \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} BC \times AF$ 即 $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times AF$,

解得： $AF = \frac{12}{5}$ ，

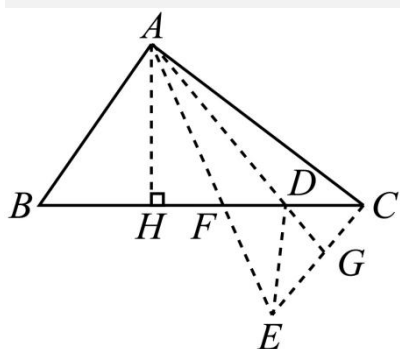
$$\therefore BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} = \frac{9}{5}, \quad EF = AE - AF = \frac{8}{5},$$

设 $CD = x$ ，则 $CD = DE = x, DF = 5 - CD - BF = \frac{16}{5}x$ ，

$$\therefore \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5} - x\right)^2 = x^2,$$

解得： $x = 2$ ，即 $CD = 2$ ；

当 $\angle FDE = 90^\circ$ 时，连接 CE ，延长 AD 交 CE 于点 G ，过点 A 作 $AH \perp BC$ ，如图所示，



由第一种情况得： $AH = \frac{12}{5}, BH = \frac{9}{5}$ ，

$$\therefore CH = BC - BH = \frac{16}{5},$$

$\because$ 折叠，

$$\therefore AE = AC = 4, \quad DE = CD,$$

$$\therefore AG \perp CE, \quad DG \perp CE,$$

$$\therefore \angle ADH = \angle CDG = \angle DCE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle HAD = \angle ADH = 45^\circ,$$

$$\therefore AH = DH,$$

设 $CD = x$ ，则 $DH = CH - CD = \frac{16}{5} - x$ ，

$$\therefore \frac{16}{5} - x = \frac{12}{5},$$

解得： $x = \frac{4}{5}$ ，即 $CD = \frac{4}{5}$ ；

$$\therefore \angle C = \angle E,$$

$$\therefore \angle E \neq 90^\circ,$$

综上所述： $CD = 2$ 或 $CD = \frac{4}{5}$ ，

故答案为：2 或 $\frac{4}{5}$.

三、解答题：(本大题共 11 题，共 58 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

19. 计算：

$$(1) \frac{1}{\sqrt{3}-2} - 4\sqrt{\frac{1}{2}} + (\sqrt{48} - \sqrt{24}) \div \sqrt{6};$$

$$(2) \left(\frac{a}{b} \sqrt{ab} \cdot \sqrt{a^3b} \right) \div \left(3\sqrt{\frac{a}{b}} \right) (a > 0, b > 0)$$

【答案】(1) $-\sqrt{3}-4$

(2) $\frac{1}{3}a^2\sqrt{ab}$

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算，熟练掌握运算是解题的关键，

(1) 按顺序根据二次根式的运算法则进行计算即可；

(2) 先分别化简每个二次根式，然后再按运算顺序进行计算即可.

【详解】(1) 解： $\frac{1}{\sqrt{3}-2} - 4\sqrt{\frac{1}{2}} + (\sqrt{48} - \sqrt{24}) \div \sqrt{6}$

$$= \frac{(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} - 2\sqrt{2} + \sqrt{48} \div \sqrt{6} - \sqrt{24} \div \sqrt{6}$$

$$= -\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2$$

$$= -\sqrt{3} - 4;$$

(2) 解： $\left(\frac{a}{b} \sqrt{ab} \cdot \sqrt{a^3b} \right) \div \left(3\sqrt{\frac{a}{b}} \right) (a > 0, b > 0)$

$$= \left(\frac{a}{b} \sqrt{a^4b^2} \right) \div \left(3\sqrt{\frac{a}{b}} \right)$$

$$= \left(\frac{a}{b} \sqrt{a^4b^2} \right) \times \left(\frac{1}{3} \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$$

$$= \frac{a}{3b} \sqrt{a^3b^3}$$

$$= \frac{a}{3b} \cdot ab\sqrt{ab}$$

$$= \frac{1}{3}a^2\sqrt{ab}.$$

20. 解方程:

$$(1) \frac{1}{2}x^2 - 3x - 5 = 0. \quad (\text{配方法})$$

$$(2) 2x^2 + 2\sqrt{7}x + 1 = 0$$

【答案】 (1) $x_1 = 3 + \sqrt{19}, x_2 = 3 - \sqrt{19}$;

$$(2) x_1 = \frac{-\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}.$$

【分析】 本题考查了一元二次方程的解法（配方法、公式法），熟练掌握不同解法的步骤和公式是解题的关键.

(1) 利用配方法的步骤：先将二次项系数化为1，再通过移项、配方将方程转化为完全平方式，进而求解；

(2) 通过判断判别式的符号确定方程有实数根，再代入一元二次方程的求根公式计算求解.

【详解】 (1) 解： $\frac{1}{2}x^2 - 3x - 5 = 0$

$$x^2 - 6x - 10 = 0$$

$$(x-3)^2 - 19 = 0$$

$$(x-3)^2 = 19$$

$$x-3 = \pm\sqrt{19}$$

$$x_1 = 3 + \sqrt{19}, x_2 = 3 - \sqrt{19};$$

(2) 解： $2x^2 + 2\sqrt{7}x + 1 = 0$

$$a = 2, b = 2\sqrt{7}, c = 1,$$

$$\Delta = (2\sqrt{7})^2 - 4 \times 2 \times 1 = 20 > 0,$$

$$x = \frac{-2\sqrt{7} \pm \sqrt{20}}{2 \times 2}$$

$$x = \frac{-2\sqrt{7} \pm 2\sqrt{5}}{2 \times 2}$$

$$x = \frac{-\sqrt{7} \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}.$$

21. 已知 $2a+7b+3$ 立方根是 3, $a+b-1$ 的算术平方根是 4, c 是 $\sqrt{14}$ 的整数部分. 求 $3a-b+c$ 的平方根.

【答案】 ± 4

【分析】 本题考查了数的开方，熟记“如果一个数的平方等于 a 那么这个数叫做 a 的平方根；正数 a 的正平方根加 a 的算术平方根；如果一个数的立方等于 a ，那么这个数叫做 a 的立方根”是解题关键.

【详解】 解： $\because 2a+7b+3$ 立方根是 3， $3a+b-1$ 的算术平方根是 4，

$$\therefore \begin{cases} 2a+7b+3=27 \\ 3a+b-1=16 \end{cases},$$

解得： $\begin{cases} a=5 \\ b=2 \end{cases},$

$$\because 9 < 14 < 16,$$

$$\therefore 3 < \sqrt{14} < 4,$$

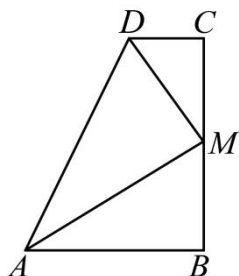
$$\therefore \sqrt{14} \text{ 的整数部分是 } 3,$$

$$\therefore c=3,$$

$$\therefore 3a-b+c=3 \times 5-2+3=15-2+3=16,$$

$$\therefore 3a-b+c \text{ 的平方根是 } \pm 4.$$

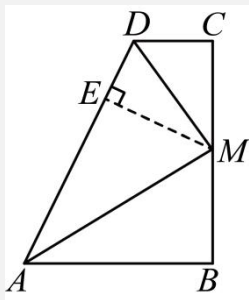
22. 如图， $\angle B = \angle C = 90^\circ$ ， M 是 BC 的中点， DM 平分 $\angle ADC$ ， 求证： AM 平分 $\angle DAB$.



【答案】 见解析

【分析】 本题考查了角平分线的判定与性质，作 $ME \perp AD$ 于 E ，由角平分线性定理可得 $ME = CM$ ，结合题意推出 $EM = BM$ ，再由角平分线的判定定理判断即可得解，熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

【详解】 证明： 如图， 作 $ME \perp AD$ 于 E ，



$\because DM$ 平分 $\angle ADC$, $ME \perp AD$, $\angle C = 90^\circ$,

$\therefore ME = CM$,

$\because M$ 是 BC 的中点,

$\therefore CM = BM$,

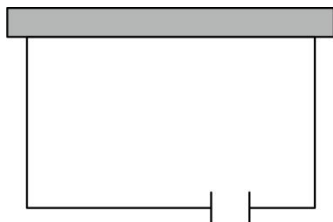
$\therefore EM = BM$,

$\because ME \perp AD$, $\angle B = 90^\circ$,

$\therefore$ 点 M 在 $\angle DAB$ 的角平分线上,

$\therefore AM$ 平分 $\angle DAB$.

23. 如图, 某建筑工程队, 在工地一边的靠墙处 (墙长 61.8 米), 用 120 米长的栅栏围成一个所占地面为长方形的临时仓库, 栅栏只围三边. 长方形仓库的面积是 1860 平方米, 且有一个 2 米宽的进出铁门. 分别求长方形仓库的长和宽.



【答案】 长方形仓库的长和宽分别是 60 米、31 米

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用, 设垂直于墙的一边长为 x 米, 则平行于墙的一边长为 $(120 - 2x + 2)$ 米, 根据长方形的面积为 1860 平方米, 可列出关于 x 的一元二次方程, 解方程得出 x 的值, 再结合墙长 61.8 米, 即可确定结论.

【详解】 解: 设垂直于墙的一边长为 x 米, 则平行于墙的一边长为 $(120 - 2x + 2)$ 米,

根据题意得: $x(120 - 2x + 2) = 1860$,

整理得: $x^2 - 61x + 930 = 0$,

解得: $x_1 = 30$, $x_2 = 31$,

当 $x = 30$ 时, $120 - 2x + 2 = 120 - 2 \times 30 + 2 = 62 > 61.8$, 不符合题意, 舍去;

当 $x = 31$ 时, $120 - 2x + 2 = 120 - 2 \times 31 + 2 = 60 < 61.8$, 符合题意.

答: 长方形仓库的长和宽分别是 60 米、31 米.

24. 已知关于 x 的方程 $x^2 - (2m-1)x + m^2 - 2m - 1 = 0$.

(1) 若方程有实数根, 求 m 的取值范围.

(2) 若 x_1 、 x_2 是方程的两个根, 且 $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$, 求 m 的值

【答案】(1) $m \geq -\frac{5}{4}$

(2) 1

【分析】(1) 根据所给一元二次方程有实数根, 得出关于 m 的不等式, 据此可解决问题.

(2) 利用一元二次方程根与系数的关系即可解决问题.

本题主要考查了根与系数的关系及根的判别式, 熟知一元二次方程根与系数的关系及根的判别式是解题的关键.

【详解】(1) 解: $\because$ 一元二次方程 $x^2 - (2m-1)x + m^2 - 2m - 1 = 0$ 有实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = [-(2m-1)]^2 - 4 \times (m^2 - 2m - 1) \times 1 \geq 0,$$

$$\text{解得 } m \geq -\frac{5}{4}.$$

(2) 解: x_1, x_2 是方程 $x^2 - (2m-1)x + m^2 - 2m - 1 = 0$ 的两个根,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = 2m - 1, \quad x_1x_2 = m^2 - 2m - 1,$$

$$\because x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7,$$

$$\therefore (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 7,$$

$$\therefore (2m-1)^2 - 3(m^2 - 2m - 1) = 7,$$

$$\text{整理, 得 } m^2 + 2m - 3 = 0,$$

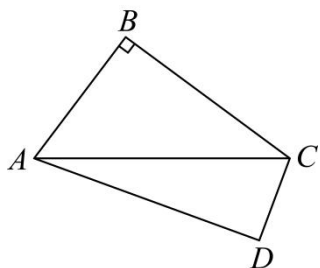
$$\text{解得 } m_1 = 1, m_2 = -3.$$

$$\text{又 } m \geq -\frac{5}{4},$$

$$\text{故 } m = 1.$$

25. 某校劳动基地的形状是类似如图所示的四边形 $ABCD$, 测得 $AB = 15\text{m}$, $BC = 20\text{m}$, $CD = 7\text{m}$, $AD = 24\text{m}$,

且 $\angle ABC = 90^\circ$ ，现需将菜地分成两块，分别种上白菜和萝卜. 为了区分两块区域，劳动老师决定沿对角线 AC 修一条仅供一个人走的小路（小路的宽度忽略不计），小路上方种白菜，下方种萝卜.



(1) 求小路 AC 的长；

(2) 通过计算说明种白菜和萝卜的菜地哪块大？大多少？

【答案】 (1) AC 的长为 25m；

(2) 种白菜的菜地大，大 66m^2 .

【分析】 本题考查勾股定理的应用、勾股定理的逆定理以及三角形面积，熟练掌握勾股定理和勾股定理的逆定理是解题的关键.

(1) 利用勾股定理求出 AC 的长即可；

(2) 利用勾股定理的逆定理证明 $\triangle ADC$ 是直角三角形，且 $\angle ADC = 90^\circ$ ，再计算两个直角三角形的面积，然后比较即可解决问题.

【详解】 (1) 解：在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 15\text{m}$ ， $BC = 20\text{m}$ ，

由勾股定理得： $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25(\text{m})$ ，

答： AC 的长为 25m；

(2) 解：在 $\triangle ADC$ 中， $CD = 7\text{m}$ ， $AD = 24\text{m}$ ， $AC = 25\text{m}$ ，

$\therefore AD^2 + DC^2 = 24^2 + 7^2 = 625 = AC^2$ ，

$\therefore \triangle ADC$ 是直角三角形，且 $\angle ADC = 90^\circ$ ，

$\therefore S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \times 24 \times 7 = 84(\text{m}^2)$ ，

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 15\text{m}$ ， $BC = 20\text{m}$ ，

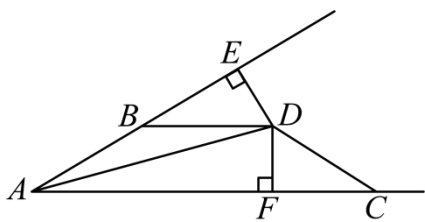
$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 20 \times 15 = 150(\text{m}^2)$ ，

$\therefore 150 > 84$ ， $150 - 84 = 66$ ，

$\therefore$ 种白菜的菜地大，大 66m^2 ，

答：种白菜的菜地大，大 66m^2 .

26. 如图， AD 平分 $\angle BAC$ ， $DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ，垂足分别为点 E, F ， $DB = DC$.



(1)求证: $BE = CF$;

(2)如果 $BD \parallel AC$, $\angle DAF = 15^\circ$, $DF = 2$, 求 AB 的长度.

【答案】 (1)见解析

(2)4

【分析】 本题主要考查了全等三角形的判定, 角平分线的性质, 含 30° 角的直角三角形的性质, 熟悉相关性质是解题的关键.

(1) 证明 $DE = DF$, $\angle E = \angle DFC = 90^\circ$, 进而证明 $\text{Rt}\triangle BDE \cong \text{Rt}\triangle CDF$ (HL), 即可得证;

(2) 根据平行线的性质和含 30° 的直角三角形的性质解答即可.

【详解】 (1) 证明: $\because AD$ 平分 $\angle BAC$, $DE \perp AB$, $DF \perp AC$,

$\therefore DE = DF$, $\angle BED = \angle DFC = 90^\circ$;

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 和 $\text{Rt}\triangle CDF$ 中,

$$\begin{cases} BD = CD \\ DE = DF \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle BDE \cong \text{Rt}\triangle CDF$ (HL),

$\therefore BE = CF$;

(2) 解: 由 (1) 可知 $DE = DF = 2$,

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$, $\angle DAF = 15^\circ$,

$\therefore \angle BAC = 2\angle DAF = 30^\circ$, $\angle BAD = \angle DAF$,

$\because BD \parallel AC$,

$\therefore \angle DBE = \angle BAC = 30^\circ$, $\angle DAF = \angle BDA$,

$\therefore \angle BAD = \angle BDA$,

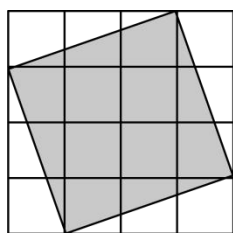
$\therefore AB = BD$,

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中, $\angle DBE = 30^\circ$,

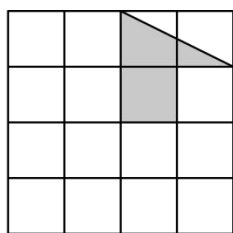
$\therefore BD = 2DE = 2 \times 2 = 4$,

$\therefore AB = BD = 4$.

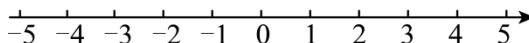
27. 如图两个 4×4 网格都是由 16 个边长为 1 的小正方形组成.



图①



图②



图③

(1) 图①中的阴影正方形的顶点在网格的格点上, 这个阴影正方形的面积为_____, 若这个正方形的边长为 a , 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 观察图②, 请先写出阴影部分的面积为_____, 并在阴影部分的基础上将其补全为面积是 5 的正方形 (顶点都在网格的格点上), 若这个正方形的边长为 b , 则 $b = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) 请你利用以上结论, 在图③的数轴上表示实数 a 和 $-b$ 的大概位置.

【答案】 (1) 10, $\sqrt{10}$

(2) 2, $\sqrt{5}$

(3) 见解析

【分析】 本题主要考查了实数与数轴, 算术平方根:

(1) 用小正方形的面积加上三角形的面积即可求出阴影部分的面积; 根据正方形面积公式即可求出 a 的值;

(2) 仿照题意作图, 然后根据正方形面积公式求出 b 的值即可;

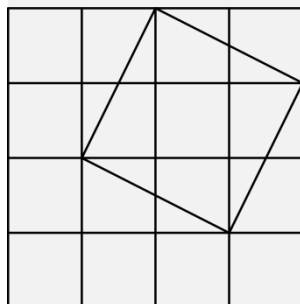
(3) 根据 (1) (2) 所求, 在数轴上表示出 2 个数, 即可.

【详解】 (1) 解: 这个阴影正方形的面积 $= 4 \times 4 - 4 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 3 = 10$,

若这个正方形的边长为 a , 则 $a = \sqrt{10}$;

故答案为: 10; $\sqrt{10}$

(2) 解: 如图, 四边形即为所求;



图②

阴影部分的面积为 $1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 2$;

$\therefore$ 这个正方形的边长为 b , 面积是 5,

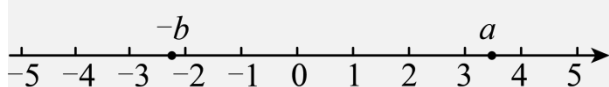
$$\therefore b = \sqrt{5};$$

故答案为: 2, $\sqrt{5}$

(3) 解: $3 < \sqrt{10} < 4, 2 < \sqrt{5} < 3$,

$$\therefore -4 < -b < -3, 2 < a < 3,$$

如图, 即为所求.



28. 恒等变形是代数求值的一个重要方法, 利用恒等变形, 可以把无理数运算转化为有理数运算, 可以把次数较高的代数式转化为次数较低的代数式.

【阅读材料】当 $x = \sqrt{3} - 1$ 时, 求 $2x^3 + 5x^2 - 2x + 1$.

方法: 将条件变形 $x + 1 = \sqrt{3}$, 两边同时平方得: $(x + 1)^2 = (\sqrt{3})^2$,

所以 $x^2 + 2x + 1 = 3$ 移项得: $x^2 = 2 - 2x$, 两边同时乘 x 得: $x^3 = 2x - 2x^2$,

$$\text{原式} = 2x^3 + 5x^2 - 2x = 2(2x - 2x^2) + 5x^2 - 2x + 1 = 4x - 4x^2 + 5x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x + 1 = 2 + 1 = 3$$

【类比应用】(1) 已知 $x = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}$, 求 $x^2 - 6x + 9$ 的值.

【深入思考】(2) 已知 $y = \sqrt{6} - 2$, 求 $y^3 + 5y^2 + 2y - 3$ 的值.

【拓展延伸】(3) 已知 $a = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024} + \sqrt{2025}}$, 求 $\frac{a^4 + 3a^3 - 2025a^2 - 2030a - 2}{2a^2 + 4a - 4046}$ 的值.

【答案】(1) 8; (2) -1; (3) -3037

【分析】本题主要考查了二次根式的化简求值, 分母有理化, 正确理解题意是解题的关键.

(1) 先分母有理化得到 $x = 3 + 2\sqrt{2}$, 则 $x - 3 = 2\sqrt{2}$, 再利用完全平方公式即可得到答案;

(2) 先得到 $y + 2 = \sqrt{6}$, 则可求出 $y^2 + 4y = 2$, $y^3 + 4y^2 = 2y$, 进而把所求式子变形得 $(y^3 + 4y^2) + (y^2 + 4y) - 2y - 3$, 进一步变形得到 $2y + 2 - 2y - 3$, 据此可得答案;

(3) 先分母有理化求出, 从而得 $a + 1 = 45$, 两边平方得 $(a + 1)^2 = 45^2 = 2025$, 即 $a^2 + 2a + 1 = 2025$, 得出 $a^2 + 2a - 2024 = 0$,

再把所求式子的分母变形为 $2a^2 + 4a - 4046 = 2(a^2 + 2a - 2023)$ ，从而求出分母值；进一步把分子可变形为 $a^4 + 3a^3 - 2025a^2 - 2030a - 2 = (a^2 + 2a - 2024)(a^2 + a - 3) - 6074$ ，从而求出分子值，据此代值计算即可。

【详解】解： $\because x = \frac{1}{3-2\sqrt{2}} = \frac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2}) \times (3+2\sqrt{2})} = \frac{3+2\sqrt{2}}{9-8} = 3+2\sqrt{2}$ ，

$$\therefore x-3=2\sqrt{2},$$

$$\therefore (x-3)^2 = (2\sqrt{2})^2,$$

$$\therefore x^2 - 6x + 9 = 8;$$

(2) $\because y = \sqrt{6} - 2$,

$$\therefore y+2 = \sqrt{6},$$

$$\therefore (y+2)^2 = (\sqrt{6})^2,$$

$$\therefore y^2 + 4y + 4 = 6,$$

$$\therefore y^2 + 4y = 2,$$

$$\therefore y(y^2 + 4y) = 2y, \text{ 即 } y^3 + 4y^2 = 2y,$$

$$\therefore y^3 + 5y^2 + 2y - 3$$

$$= (y^3 + 4y^2) + (y^2 + 4y) - 2y - 3$$

$$= 2y + 2 - 2y - 3$$

$$= -1;$$

(3) $\because \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

$$\therefore a = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}$$

$$= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{2025} - \sqrt{2024}$$

$$= \sqrt{2025} - 1$$

$$= 45 - 1$$

$$= 44,$$

$$\therefore a+1 = 45,$$

两边平方得 $(a+1)^2 = 45^2 = 2025$, 即 $a^2 + 2a + 1 = 2025$,

$$\therefore a^2 + 2a - 2024 = 0 ,$$

$$\therefore 2a^2 + 4a - 4046 = 2(a^2 + 2a - 2023) = 2(2024 - 2023) = 2 ,$$

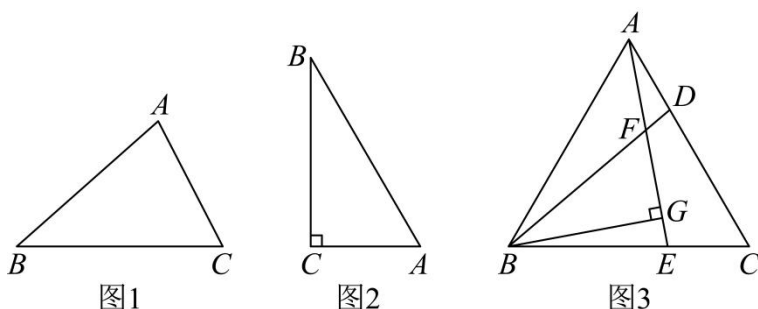
$$a^4 + 3a^3 - 2025a^2 - 2030a - 2 = (a^2 + 2a - 2024)(a^2 + a - 3) - 6074 = 0 - 6074 = -6074 ,$$

$$\therefore \frac{a^4 + 3a^3 - 2025a^2 - 2030a - 2}{2a^2 + 4a - 4046}$$

$$= \frac{-6074}{2}$$

$$= -3037 .$$

29. 定义：若三角形满足：两边的平方和与这两边乘积的差等于第三边的平方，则称这个三角形为“类勾股三角形”。如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC = BC^2$ ，则 $\triangle ABC$ 是“类勾股三角形”。



(1) 等边三角形_____ (填“是”或“不是”) “类勾股三角形”。

(2) 如图 2，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ；

①若 $\angle B = 30^\circ$ ， $AC = 1$ ，判断 $\triangle ABC$ 是不是“类勾股三角形”，并说明理由。

②若 $\triangle ABC$ 是“类勾股三角形”， $AB = c$ ， $AC = b$ ， $BC = a$ ，且 $a > b$ ，求 $a:b:c$ 。

(3) 如图 3，在等边 $\triangle ABC$ 的边 AC ， BC 上各取一点 D 、 E ，且 $AD < CD$ ， AE ， BD 相交于点 F ， BG 是 $\triangle BEF$ 的高，若 $\triangle BGF$ 是“类勾股三角形”，且 $BG > FG$ 。

①求证： $AD = CE$ 。

②连接 CG ，若 $\angle GCB = \angle ABD$ ， $FG = 1$ ，求等边 $\triangle ABC$ 的边长。

【答案】(1)是

(2)①是，证明见解析；② $a:b:c = \sqrt{3}:1:2$

(3)①证明见解析；②等边 $\triangle ABC$ 的边长为 $\sqrt{7}$ 。

【分析】(1) 根据等边三角形的性质，“类勾股三角形”的定义判断；

(2) ①求解 $AB = 2AC = 2$ ， $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{3}$ ，结合

$AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC = 2^2 + 1^2 - 2 \times 1 = 3 = (\sqrt{3})^2 = BC^2$ ，可得结论；

②根据勾股定理得到 $a^2 + b^2 = c^2$ ，分三种情况，根据“类勾股三角形”的定义解答；

(3) ①根据“类勾股三角形”的定义得到 $\angle BFG = 60^\circ$ ，证明 $\triangle ABD \cong \triangle CAE$ ，根据全等三角形的性质证明结论；

②证明 $\triangle ABF \cong \triangle CAG$ ，得到 $AG = BF$ ，结合 $FG : BG : BF = 1 : \sqrt{3} : 2$ ， $FG = 1$ ，可得 $BG = \sqrt{3}$ ， $BF = 2$ ， $AG = BF = 2$ ，再进一步利用勾股定理求解即可。

【详解】(1) 解：当 ABC 为等边三角形时，

$$AB = AC = BC,$$

$$\therefore AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC = BC^2 + BC^2 - BC \cdot BC = BC^2,$$

$\therefore$ 等边三角形一定是“类勾股三角形”

故答案为：是

(2) 解：①在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ； $\angle B = 30^\circ$ ， $AC = 1$ ，

$$\therefore AB = 2AC = 2, \quad BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC = 2^2 + 1^2 - 2 \times 1 = 3 = (\sqrt{3})^2 = BC^2,$$

$\therefore ABC$ 是“类勾股三角形”。

② $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = c$ ， $AC = b$ ， $BC = a$ ，且 $a > b$ ，

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2,$$

$\because ABC$ 是“类勾股三角形”，

$\therefore$ 当 $a^2 + b^2 - ab = c^2$ 时，则 $-ab = 0$ (舍去)，

当 $a^2 + c^2 - ac = b^2$ 时，则，

$$a^2 + c^2 - ac = c^2 - a^2,$$

$$\therefore ac = 2a^2,$$

$$\therefore c = 2a,$$

$$\therefore b = \sqrt{3}a,$$

$$\therefore a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2 \quad (\text{不符合题意，舍去})$$

当 $b^2 + c^2 - bc = a^2$ 时，则，

$$b^2 + c^2 - bc = c^2 - b^2,$$

$$\therefore bc = 2b^2,$$

$$\therefore c = 2b,$$

$$\therefore a = \sqrt{3}b,$$

$$\therefore a:b:c = \sqrt{3}:1:2.$$

综上: ABC 是“类勾股三角形”, $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, 且 $a>b$, $a:b:c=\sqrt{3}:1:2$.

(3) 解: ① $\because ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore AB = AC = BC, \angle ABC = \angle ACB = \angle BAC = 60^\circ,$$

$\because BG$ 是 $\triangle BEF$ 的高, $\triangle BGF$ 是“类勾股三角形”, $BG > FG$,

$$\therefore \text{由 (2) 可得 } FG:BG:BF = 1:\sqrt{3}:2, \angle BFG = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle FAB + \angle FBA = \angle BFG = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle FAB + \angle EAC = \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle FBA = \angle EAC,$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CAE$ 中,

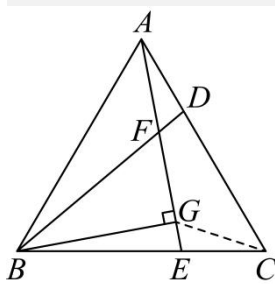
$$\begin{cases} \angle BAD = \angle ACE \\ BA = AC \\ \angle DBA = \angle EAC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CAE (\text{ASA}),$$

$$\therefore AD = CE.$$

$$\textcircled{2} \because \angle GCB = \angle ABD, AB = AC,$$

$$\therefore \angle FAB = 60^\circ - \angle ABD = 60^\circ - \angle GCB = \angle ACG,$$



在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle CAG$ 中,

$$\begin{cases} \angle FAB = \angle GCA \\ BA = AC \\ \angle ABF = \angle CAG \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CAG,$$

$$\therefore AG = BF,$$

$$\therefore FG:BG:BF=1:\sqrt{3}:2, \quad FG=1,$$

$$\therefore BG=\sqrt{3}, \quad BF=2,$$

$$\therefore AG=BF=2,$$

$$\therefore AB=\sqrt{AG^2+BG^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}.$$

$$\therefore \text{等边 } ABC \text{ 的边长为 } \sqrt{7}.$$

【点睛】 本题考查的是等边三角形的性质、全等三角形的判定和性质，勾股定理的含义，含 30° 角的直角三角形的性质，“类勾股三角形”的定义，掌握全等三角形的判定定理和性质定理是解题的关键.