

2025-2026 学年八年级上学期期末模拟卷

数学·全解全析

(考试时间: 90 分钟 试卷满分: 100 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。
4. 测试范围: 沪教版新教材八年级上册 (实数+二次根式+一元二次方程+直角三角形)

第一部分 (选择题 共 18 分)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分。在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的)

1. 用下列长度的三根木条首尾相接组成一个封闭木框, 则能组成一个直角三角形木框的是 ()

- A. 2, 3, 4 B. 3, 4, 5 C. 5, 6, 7 D. 6, 7, 8

【答案】B

【详解】解: A、 $2^2 + 3^2 = 13 \neq 4^2$, 故该选项不符合题意;

B、 $4^2 + 3^2 = 25 = 5^2$, 故该选项符合题意;

C、 $5^2 + 6^2 = 61 \neq 7^2$, 故该选项不符合题意;

D、 $7^2 + 6^2 = 85 \neq 8^2$, 故该选项不符合题意.

故选: B.

2. 若关于 x 的方程 $(a^2 + 1)x^2 - ax + 7 = 0$ 是一元二次方程, 则 a 的取值范围是 ()

- A. a 取任意实数 B. $a \neq -1$ C. $a \neq \pm 1$ D. $a \neq 1$

【答案】A

【详解】解: 由题意可得, 二次项系数 $a^2 + 1 \neq 0$,

又 $\because a^2 \geq 0$,

$\therefore a^2 + 1 \geq 1 > 0$, 恒成立,

$\therefore a$ 取任意实数,

故选 A.

3. 下列二次根式中, 是最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{8a}$ B. $\sqrt{\frac{a}{2}}$ C. $\sqrt{a^2-1}$ D. $\sqrt{a^5}$

【答案】C

【详解】解: A、 $\sqrt{8a} = \sqrt{4 \times 2a} = 2\sqrt{2a}$, 含能开得尽方的因数 4, 不是最简二次根式;

B、 $\sqrt{\frac{a}{2}}$ 被开方数含分母, 不是最简二次根式;

C、 $\sqrt{a^2-1}$ 被开方数不含能开得尽方的因式, 且不含分母, 是最简二次根式;

D、 $\sqrt{a^5} = \sqrt{a^4 \times a}$ 含能开得尽方的因数 a^4 , 不是最简二次根式.

故选: C

4. 一个正数的两个不相等的平方根是 $3a+2$ 和 $-7a+10$, 那么这个数是 ()

- A. 121 B. 100 C. 3 D. 9

【答案】A

【详解】解: $\because$ 一个正数的两个不相等的平方根是 $3a+2$ 和 $-7a+10$,

$$\therefore (3a+2) + (-7a+10) = 0,$$

解得 $a=3$,

$\therefore$ 一个平方根为 $3 \times 3 + 2 = 11$,

$\therefore$ 这个正数为 $11^2 = 121$,

故选: A.

5. 在实数范围内因式分解: x^2-2x-1 , 下列选项中正确的是 ()

- A. $(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})$ B. $(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$
C. $(x-1+2\sqrt{2})(x-1-2\sqrt{2})$ D. $(x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2})$

【答案】B

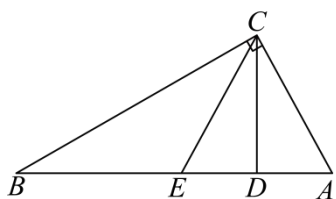
【详解】解: $\because$ 对于 $x^2-2x-1=0$, 判别式 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4+4=8$,

$$\therefore \text{根为 } x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2},$$

$\therefore$ 因式分解为 $[x-(1+\sqrt{2})][x-(1-\sqrt{2})] = (x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$,

故选: B.

6. 如图：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， CD 是斜边 AB 上的高， CE 是斜边上的中线，那么下列结论中错误的是（ ）



A. $\angle ACD = \angle B$

B. $\angle ECB = \angle A - \angle ECD$

C. $\angle ACD = \angle ECB$

D. $\angle ECB = \angle DCE$

【答案】D

【详解】解：A. 因为 $\angle A + \angle B = 90^\circ$, $\angle A + \angle ACD = 90^\circ$, 根据同角的余角相等, 可得 $\angle ACD = \angle B$, 所以该选项正确;

B. 因为 $\angle ACD = \angle A - \angle ECD$, 又由选项 A 知 $\angle ACD = \angle B$, 且 CE 是中线, $AE = CE$, 所以 $\angle A = \angle ACE$, $\angle ECB = \angle ACB - \angle ACE = 90^\circ - \angle A$,

同时 $\angle ACD = \angle B$, $\angle BCD = 90^\circ - \angle ACD$, $\angle ECB = \angle BCD - \angle ECD$,

所以 $\angle ECB = \angle A - \angle ECD$,

该选项正确;

C. 由选项 A 知 $\angle ACD = \angle B$, 因为 $CE = BE$,

所以 $\angle B = \angle ECB$,

所以 $\angle ACD = \angle ECB$,

该选项正确;

D. 在一般情况下, 无法得出 $\angle ECB = \angle DCE$,

该选项错误.

故选: D.

第二部分 (非选择题 共 82 分)

二、填空题 (本大题共 12 小题, 每小题 2 分, 满分 24 分)

7. **新考向** 已知 $\sqrt[3]{5.23} \approx 1.735$, 如果 $\sqrt[3]{x} \approx 173.5$, 则 $x \approx$ _____.

【答案】5230000

【详解】解: 已知 $\sqrt[3]{5.23} \approx 1.735$, 且 $\sqrt[3]{x} \approx 173.5$.

所以 $x \approx 100^3 \times 5.23 = 1000000 \times 5.23 = 5230000$.

故答案为: 5230000.

8. 若二次根式 $\frac{\sqrt{x+1}}{2x-1}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围为_____.

【答案】 $x \geq -1$ 且 $x \neq \frac{1}{2}$

【详解】解: 由题意, 二次根式 $\sqrt{x+1}$ 在实数范围内有意义,

故 $x+1 \geq 0$,

解得 $x \geq -1$;

$\because$ 分式 $\frac{1}{2x-1}$ 有意义,

故 $2x-1 \neq 0$,

解得 $x \neq \frac{1}{2}$;

因此, x 的取值范围为 $x \geq -1$ 且 $x \neq \frac{1}{2}$.

故答案为: $x \geq -1$ 且 $x \neq \frac{1}{2}$.

9. 不等式 $-\sqrt{5}x-1 > 2x$ 的解集是_____.

【答案】 $x < 2 - \sqrt{5}$

【详解】解: $-\sqrt{5}x-1 > 2x$,

$-\sqrt{5}x-2x > 1$,

$-(\sqrt{5}+2)x > 1$,

由于 $\sqrt{5}+2 > 0$, 所以 $-(\sqrt{5}+2) < 0$, 除以负数时不等号方向改变, 得:

$x < \frac{1}{-(\sqrt{5}+2)}$,

即 $x < -\frac{1}{\sqrt{5}+2}$,

分子分母同乘 $\sqrt{5}-2$, 得:

$x < -\frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5})^2-2^2} = -\frac{\sqrt{5}-2}{5-4} = -(\sqrt{5}-2) = 2-\sqrt{5}$,

故答案为: $x < 2-\sqrt{5}$.

10. 在实数范围内分解因式: $2x^2-3xy-y^2 =$ _____.

【答案】 $2\left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4}y\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4}y\right)$

【详解】解：令 $2x^2 - 3xy - y^2 = 0$,

$$\therefore \Delta = (-3y)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-y^2) = 9y^2 + 8y^2 = 17y^2,$$

$$\text{则 } x = \frac{3y \pm \sqrt{17y^2}}{4} = \frac{3y \pm \sqrt{17}|y|}{4},$$

$$\text{当 } y \geq 0 \text{ 时, } x = \frac{(3 \pm \sqrt{17})y}{4},$$

$$\text{当 } y < 0 \text{ 时, } x = \frac{(3 \mp \sqrt{17})y}{4},$$

$$\text{所以根为 } x_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{4}y, \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{4}y,$$

$$\text{因此, } 2x^2 - 3xy - y^2 = 2\left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4}y\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4}y\right).$$

$$\text{故答案为: } 2\left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4}y\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4}y\right).$$

11. 比较大小: $\sqrt{5} + \sqrt{11}$ _____ $\sqrt{6} + \sqrt{10}$ (填“>”“<”或“=”).

【答案】 <

【详解】解：设 $A = \sqrt{5} + \sqrt{11}$, $B = \sqrt{6} + \sqrt{10}$.

$$\therefore A^2 = (\sqrt{5} + \sqrt{11})^2 = 5 + 2\sqrt{55} + 11 = 16 + 2\sqrt{55},$$

$$B^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{10})^2 = 6 + 2\sqrt{60} + 10 = 16 + 2\sqrt{60},$$

$$\text{又} \because \sqrt{60} > \sqrt{55},$$

$$\therefore 2\sqrt{60} > 2\sqrt{55},$$

$$\therefore B^2 > A^2,$$

$$\therefore A, B \text{ 均为正数},$$

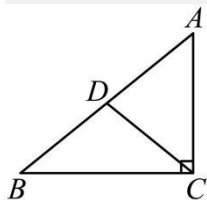
$$\therefore B > A, \text{ 即 } \sqrt{5} + \sqrt{11} < \sqrt{6} + \sqrt{10},$$

故答案为: <.

12. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, CD 是三角形的一条中线, 若 $\angle DCB = 39^\circ$, $\angle CDB$ 的度数是_____.

【答案】 102°

【详解】 解: 如图,



$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, CD 是三角形的一条中线,

$$\therefore CD = DB = \frac{1}{2} AB,$$

$$\therefore \angle DCB = \angle DBC = 39^\circ.$$

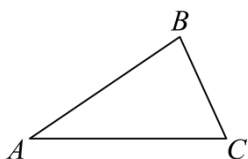
在 $\triangle CDB$ 中, $\angle CDB + \angle DCB + \angle DBC = 180^\circ$,

$$\text{即 } \angle CDB + 39^\circ + 39^\circ = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CDB = 180^\circ - 78^\circ = 102^\circ.$$

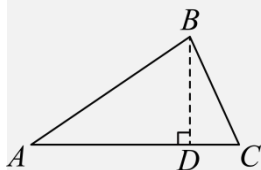
故答案为: 102° .

13. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = 11$, $BC = 7$, $AC = 12$. 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.



【答案】 $12\sqrt{10}$

【详解】 解: 如图, 过点 B 作 $BD \perp AC$ 于点 D ,



则 $\angle BDA = \angle BDC = 90^\circ$,

设 $AD = x$, 则 $CD = 12 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 和 $\text{Rt}\triangle CBD$ 中, 由勾股定理得: $BD^2 = AB^2 - AD^2 = BC^2 - CD^2$,

$$\text{即 } 11^2 - x^2 = 7^2 - (12 - x)^2,$$

解得 $x = 9$,

$$\therefore AD = 9,$$

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{11^2 - 9^2} = 2\sqrt{10},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 12 \times 2\sqrt{10} = 12\sqrt{10},$$

故答案为: $12\sqrt{10}$.

14. 已知关于 x 的一元二次方程 $(2a-1)x^2 - 8x + 6 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a < \frac{11}{6}$ 且 $a \neq \frac{1}{2}$

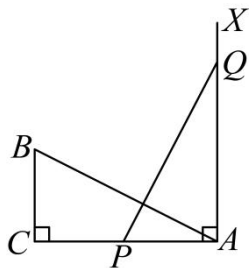
【详解】解: $\because$ 一元二次方程 $(2a-1)x^2 - 8x + 6 = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times (2a-1) \times 6 > 0 \text{ 且 } 2a-1 \neq 0,$$

$$\text{解得 } a < \frac{11}{6} \text{ 且 } a \neq \frac{1}{2},$$

故答案为: $a < \frac{11}{6}$ 且 $a \neq \frac{1}{2}$.

15. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 12$, $BC = 6$, P , Q 两点分别在线段 AC 和 AC 的垂线 AX 上移动, 且 $PQ = AB$, 要使 $\triangle ABC$ 和 $\triangle APQ$ 全等, 则 AP 的长为_____.



【答案】 6 或 12

【详解】解: $\because PQ = AB$, $\angle C = \angle CAQ = 90^\circ$,

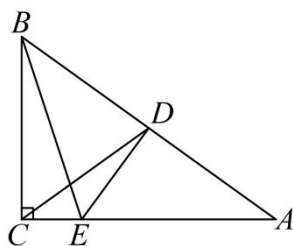
$\therefore$ 要使 $\triangle ABC$ 和 $\triangle APQ$ 全等, 分两种情况:

①当 $AP = BC = 6$ 时, $\triangle ABC \cong \triangle QPA$ (HL),

②当 $AP = AC = 12$ 时, $\triangle ABC \cong \triangle PQA$ (HL).

故答案为 6 或 12.

16. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 斜边 AB 的垂直平分线 DE 分别交 AB 、 AC 于点 D 、 E , $\angle ACD = 2\angle CBE$, 则 $\angle A$ 的度数为_____.



【答案】 36°

【详解】 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，斜边 AB 的垂直平分线 DE 分别交 AB 、 AC 于点 D 、 E ，

$\therefore D$ 是斜边 AB 的中点， $EB = EA$

$$\therefore CD = AD = \frac{1}{2} AB, \quad \angle EBA = \angle A, \quad \angle ACD = \angle A,$$

设 $\angle CBE = x$ ，

$$\because \angle ACD = 2\angle CBE,$$

$$\therefore \angle A = 2x.$$

$$\angle EBA = \angle A = 2x$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABC + \angle A = 90^\circ$$

即 $\angle CBE + \angle EBA + \angle A = 90^\circ$ ，

$$\therefore x + 2x + 2x = 90^\circ$$

$$\therefore x = 18^\circ$$

$$\therefore \angle A = 36^\circ.$$

故答案为： 36° 。

17. **【新考向】** 关于 x 的方程 $\frac{k}{x-1} + k - 1 = \frac{k+1}{x}$ 只有一个实数解，则实数 k 所有可能的值的绝对值之和为_____。

【答案】 $2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$

【详解】 解：原分式方程 $\frac{k}{x-1} + k - 1 = \frac{k+1}{x}$ 的 x 的取值范围为 $x \neq 0$ 且 $x \neq 1$ 。

两边乘以公分母 $x(x-1)$ ，得：

$$x(x-1)\left(\frac{k}{x-1} + k - 1\right) = x(x-1) \cdot \frac{k+1}{x},$$

简化后为： $xk + x(x-1)(k-1) = (x-1)(k+1)$ ，

展开并整理得： $(k-1)x^2 - kx + (k+1) = 0$ ，此为关于 x 的二次方程，但系数含 k 。

①: 当 $k-1=0$, 即 $k=1$ 时, 方程为一次方程.

将 $k=1$ 代入原方程, 解得 $x=2$, 符合题意, 故 $k=1$ 符合条件.

②: 当 $k-1 \neq 0$, 即 $k \neq 1$, 方程为二次方程.

二次方程有唯一实数解时判别式为零:

$$\Delta = (-k)^2 - 4(k-1)(k+1) = k^2 - 4(k^2 - 1) = -3k^2 + 4 = 0, \text{ 解得: } k = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

当 $k = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时, $x = \frac{k}{2(k-1)}$, 经检验均不为 0 或 1, 故 $k = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 符合条件.

情况三: 考虑增根可能性.

若 $x=0$ 是根, 代入二次方程得 $k+1=0$, 即 $k=-1$.

当 $k=-1$, 原方程解得 $x = \frac{1}{2}$, 满足题意, 故 $k=-1$ 符合条件.

若 $x=1$ 是根, 代入二次方程得 $k=0$.

当 $k=0$, 原方程解得 $x=-1$, 满足题意, 故 $k=0$ 符合条件.

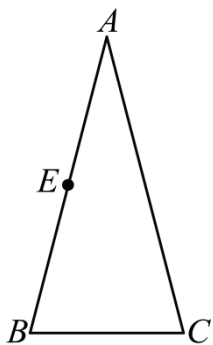
综上, 所有符合条件的 k 值为 $1, 0, -1, \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

其绝对值之和为:

$$|1| + |0| + |-1| + \left| \frac{2\sqrt{3}}{3} \right| + \left| -\frac{2\sqrt{3}}{3} \right| = 1 + 0 + 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

故答案为 $2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

18. **新考向** 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=8$, $\angle A=30^\circ$, 点 E 是 AB 中点, 点 D 在 AC 上, $DE=2\sqrt{2}$, 将 $\triangle ADE$ 沿着 DE 翻折, 点 A 的对应点是点 F , 直线 EF 与 AC 交于点 G , 那么 $\triangle DGF$ 的面积 = _____.



【答案】 $\frac{8\sqrt{3}}{3} - 4$ 或 $\frac{8\sqrt{3}}{3} + 4$

【详解】 解: 过点 E 作 $EH \perp AC$ 交 AC 于点 H , 过点 G 作 $GQ \perp AB$ 交 AB 于点 Q ,

$\because AB=8$, 点 E 是 AB 中点,

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AB = 4.$$

$$\because EH \perp AC,$$

$$\therefore \angle AHE = 90^\circ.$$

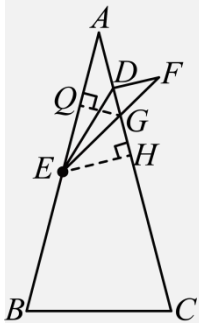
$$\because \angle A = 30^\circ, AE = 4,$$

$$\therefore EH = \frac{1}{2}AE = 2,$$

$$\therefore AH = \sqrt{AE^2 - EH^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}.$$

$$\because DE = 2\sqrt{2}, \therefore \text{分两种情况:}$$

①当点 D 在 H 点上方时, 如图,



$$\therefore DH = \sqrt{DE^2 - EH^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = 2,$$

$$\therefore DH = EH, \quad AD = AH - DH = 2\sqrt{3} - 2,$$

$$\therefore \angle EDH = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = \angle EDH - \angle A = 15^\circ.$$

由折叠的性质可知, $\angle DEF = \angle AED = 15^\circ$,

$$\therefore \angle AEG = 2\angle AED = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AEG = \angle A,$$

$$\therefore AG = GE.$$

$$\text{又} \because GQ \perp AE,$$

$$\therefore AQ = \frac{1}{2}AE = 2.$$

$$\because \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore GQ = \frac{1}{2}AG.$$

$$\therefore GQ^2 + AQ^2 = AG^2,$$

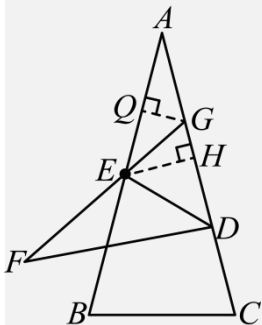
$$\text{即 } GQ^2 + 2^2 = (2GQ)^2,$$

$$\therefore GQ = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore S_{\triangle DGF} = 2S_{\triangle AED} - S_{\triangle AEG},$$

$$\therefore S_{\triangle DGF} = 2 \times \frac{1}{2} AD \cdot EH - \frac{1}{2} AE \cdot GQ = 2 \times \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3} - 2) \times 2 - \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3} - 4;$$

②当点 D 在 H 点下方时, 如图,



同理可得 $DH = EH$, $AD = AH + DH = 2\sqrt{3} + 2$,

$$\therefore \angle DEH = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = 90^\circ - \angle A + \angle DEH = 105^\circ.$$

由折叠的性质可知, $\angle DEF = \angle AED = 105^\circ$,

$$\therefore \angle AEG = 2\angle AED - 180^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AEG = \angle A,$$

$$\therefore AG = GE.$$

$$\text{同理可得 } GQ = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore S_{\triangle DGF} = 2S_{\triangle AED} - S_{\triangle AEG},$$

$$\therefore S_{\triangle DGF} = 2 \times \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3} + 2) \times 2 - \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3} + 4,$$

综上所述, $\triangle DGF$ 的面积为 $\frac{8\sqrt{3}}{3} - 4$ 或 $\frac{8\sqrt{3}}{3} + 4$.

$$\text{故答案为: } \frac{8\sqrt{3}}{3} - 4 \text{ 或 } \frac{8\sqrt{3}}{3} + 4.$$

三.解答题 (本大题共 8 小题, 58 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

19. (3 分) 解方程: $3x(x-2) = 2-x$.

【详解】移项 $3x(x-2) - (2-x) = 0$,

即 $3x(x-2) + (x-2) = 0$, (1 分)

$$(x-2)(3x+1)=0 \cdots \cdots (2 \text{ 分})$$

$$\therefore x-2=0 \text{ 或 } 3x+1=0,$$

$$\text{解得 } x=2 \text{ 或 } x=-\frac{1}{3}. \cdots \cdots (3 \text{ 分})$$

20. (6 分) 计算:

$$(1) \frac{1}{\sqrt{3}-2} - 4\sqrt{\frac{1}{2}} + (\sqrt{48} - \sqrt{24}) \div \sqrt{6};$$

$$(2) \left(\frac{a}{b} \sqrt{ab} \cdot \sqrt{a^3b} \right) \div \left(3\sqrt{\frac{a}{b}} \right) (a > 0, b > 0)$$

$$\text{【详解】(1) 解: } \frac{1}{\sqrt{3}-2} - 4\sqrt{\frac{1}{2}} + (\sqrt{48} - \sqrt{24}) \div \sqrt{6}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} - 2\sqrt{2} + \sqrt{48} \div \sqrt{6} - \sqrt{24} \div \sqrt{6}$$

$$= -\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2$$

$$= -\sqrt{3} - 4; \cdots \cdots (3 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 解: } \left(\frac{a}{b} \sqrt{ab} \cdot \sqrt{a^3b} \right) \div \left(3\sqrt{\frac{a}{b}} \right) (a > 0, b > 0)$$

$$= \left(\frac{a}{b} \sqrt{a^4b^2} \right) \div \left(3\sqrt{\frac{a}{b}} \right)$$

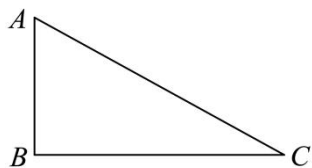
$$= \left(\frac{a}{b} \sqrt{a^4b^2} \right) \times \left(\frac{1}{3} \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$$

$$= \frac{a}{3b} \sqrt{a^3b^3}$$

$$= \frac{a}{3b} \cdot ab\sqrt{ab}$$

$$= \frac{1}{3} a^2 \sqrt{ab}. \cdots \cdots (6 \text{ 分})$$

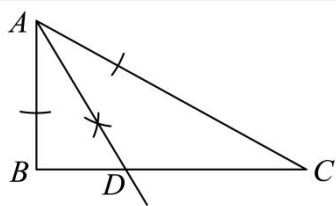
21. (6 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 30^\circ$, $\angle B = 90^\circ$.



(1) 尺规作图: 在边 BC 上作一点 D , 使得点 D 到边 AB 与边 AC 的距离相等 (不写作法, 保留作图痕迹);

(2) 若 $CD = 4\text{cm}$, 求 AB 的长.

【详解】(1) 解: 点 D 如图所示:



(2) 解: $\because \angle ACB = 30^\circ$, $\angle B = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

由 (1) 的作图痕迹, 得出 AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线,

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ = \angle ACB,$$

$$\therefore AD = CD = 4\text{cm},$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $BD = \frac{1}{2}AD = 2\text{cm}$,

$$\therefore AB = \sqrt{AD^2 - BD^2} = 2\sqrt{3}(\text{cm}). \dots\dots (6\text{分})$$

22. **新考向** (7分) 认真阅读下面的材料, 再回答问题.

根据平方根和立方根的定义, 我们可以类比得到四次方根和五次方根的定义: 一般地, 如果一个数 x 的四次方等于 a , 即 $x^4 = a$, 那么这个数 x 叫作 a 的四次方根. 依照上述材料, 我们也可以得到五次方根的定义.

(1) 81 的四次方根为_____; -32 的五次方根为_____;

(2) 若 $\sqrt[4]{1-x}$ 有意义, 则 x 的取值范围是_____; 若 $\sqrt[5]{1-x}$ 有意义, 则 x 的取值范围是_____;

(3) 求 x 的值: $\frac{1}{2}(2x-4)^4 - 8 = 0$.

【详解】(1) 解: $\because 3^4 = 81$, $(-3)^4 = 81$,

$\therefore 81$ 的四次方根为 ± 3 ,

$$\because (-2)^5 = -32,$$

$\therefore -32$ 的五次方根为 -2 ,

故答案为: ± 3 ; -2 ; $\dots\dots (2\text{分})$

(2) 解: 若 $\sqrt[4]{1-x}$ 有意义, 则 $1-x \geq 0$,

故 x 的取值范围是 $x \leq 1$;

若 $\sqrt[5]{1-x}$ 有意义, 则 x 的取值范围是任意实数,

故答案为: $x \leq 1$; 任意实数; $\dots\dots (4\text{分})$

(3) 解: $\because \frac{1}{2}(2x-4)^4 - 8 = 0,$

$\therefore \frac{1}{2}(2x-4)^4 = 8,$

$\therefore (2x-4)^4 = 16,$

$\therefore 2x-4 = 2$ 或 $2x-4 = -2,$

$\therefore x = 3$ 或 $x = 1.$ (7 分)

23. **【新考向】** (8 分) 某建筑工程队, 计划在工地一边的靠墙处 (利用墙, 墙长 100 米), 用 170 米长的建筑材料围成一个长方形仓库,

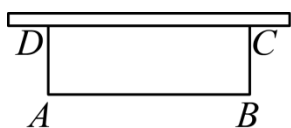


图1

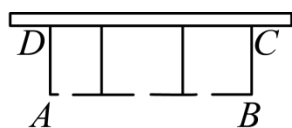


图2

- (1) 如果长方形仓库 (如图 1) 占地面积为 1500 平方米, 求与墙垂直的边 AD 的长;
 (2) 为了便于分类存放和搬运货物, 现决定改变计划, 用原有建筑材料建造并分割出三个小仓库, 并在与墙平行的边 AB 上, 每个仓库预留出 1 个长度为 2 米的门 (如图 2), 长方形 $ABCD$ 面积扩大到 2000 平方米, 若能, 求与墙垂直的边 AD 的长; 若不能, 请说明理由.

【详解】 (1) 解: 设与墙垂直的边 AD 的长为 x m, 则与墙平行的边 AB 的长为 $(170-2x)$ m,

由题意可得: $x(170-2x) = 1500,$

解得: $x_1 = 10, x_2 = 75,$

当 $x = 10$ 时, $170-2x = 170-2 \times 10 = 150 > 100$, 不符合题意;

当 $x = 75$ 时, $170-2x = 170-2 \times 75 = 20 < 100$, 符合题意;

$\therefore$ 与墙垂直的边 AD 的长为 75m; (4 分)

(2) 解: 不能, 理由如下:

设与墙垂直的边 AD 的长为 y m, 则与墙平行的边 AB 的长为 $(170-4y+3 \times 2)$ m,

由题意可得 $y(170-4y+3 \times 2) = 2000,$

整理可得: $y^2 - 44y + 500 = 0,$

$\therefore \Delta = (-44)^2 - 4 \times 1 \times 500 = -64 < 0,$

$\therefore$ 原方程没有实数根,

∴不能使长方形 $ABCD$ 面积扩大到 2000 平方米. …… (8 分)

24. (8 分) 已知 x_1 、 x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ 的两个实数根.

(1) 若 $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 28$, 求 m 的值;

(2) 已知等腰三角形 ABC 的一边长为 7, 另外的两边长恰好是 x_1 、 x_2 , 求 ABC 的周长.

【详解】(1) 解: ∵ x_1, x_2 是方程 $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ 的两个实数根,

$$\therefore x_1 + x_2 = 2(m+1), \quad x_1 x_2 = m^2 + 5,$$

∵ x_1, x_2 是方程 $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ 的两个实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = [-2(m+1)]^2 - 4 \times (m^2 + 5) \times 1 \geq 0,$$

解得 $m \geq 2$.

$$\therefore (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 28,$$

$$\therefore x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1 = 28,$$

$$\therefore m^2 + 5 - 2(m+1) - 27 = 0,$$

整理, 得 $m^2 - 2m - 24 = 0$,

解得 $m = 6$ 或 $m = -4$ (舍去),

故 m 的值为 6. …… (3 分)

(2) 解: ∵ x_1, x_2 是方程 $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ 的两个实数根,

$$\therefore x_1 + x_2 = 2(m+1), \quad x_1 x_2 = m^2 + 5,$$

∵ 等腰三角形 ABC 的一边长为 7,

当 $x_1 = 7$ 时,

$$\therefore 7 + x_2 = 2(m+1), \quad 7x_2 = m^2 + 5,$$

$$\therefore 2(m+1) - 7 = \frac{m^2 + 5}{7},$$

整理, 得 $m^2 - 14m + 40 = 0$,

解得 $m_1 = 4, m_2 = 10$,

$$\text{当 } m = 4 \text{ 时, } x_2 = \frac{m^2 + 5}{7} = 3,$$

此时三角形的三边长为 7, 7, 3, 三角形存在,

故三角形的周长为 $7+7+3=17$;

当 $m=10$ 时, $x_2 = \frac{m^2+5}{7} = 15$,

此时三角形的三边长为 7, 7, 15, 三角形不存在;

同理可证, 当 $x_2 = 7$ 时, 三角形的周长为 17;

$\therefore x_1, x_2$ 是方程 $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ 的两个实数根,

$\therefore x_1 + x_2 = 2(m+1), x_1 x_2 = m^2 + 5$,

$\therefore$ 等腰三角形 ABC 的一边长为 7,

当 $x_1 = x_2$ 时,

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = [-2(m+1)]^2 - 4 \times (m^2 + 5) \times 1 = 0$,

解得 $m = 2$,

$\therefore x_1 = x_2 = 3$,

此时三角形的三边长为 7, 3, 3, 三角形不存在;

综上所述, 三角形周长为 17. $\cdots \cdots$ (8 分)

25. (8 分) 在 ABC 中, 点 D 是边 BC 的中点, 点 E 、 F 分别在边 AB 、 AC 上, 且 $DE \perp DF$, 连接 EF .

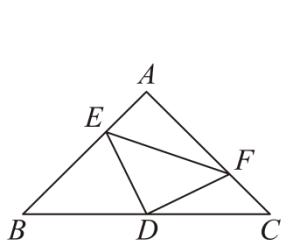


图1

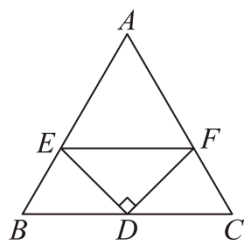
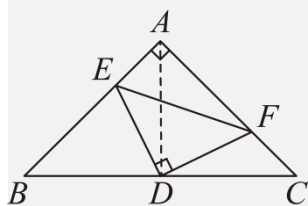


图2

(1) 如图 1, ABC 是等腰直角三角形, $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC$, 求证: $\angle DEF = 45^\circ$;

(2) 如图 2, $\angle DEF = 45^\circ$, ABC 是等边三角形, $DE = DF$, 求证: $AE = AF$;

【详解】(1) 证明: 连接 AD ,



$\therefore \angle A = 90^\circ$, $AB = AC$, 点 D 是边 BC 的中点

$$\therefore AD = \frac{1}{2}BC = DC, \quad \angle C = \angle BAD = 45^\circ$$

又 $\because$ 在四边形 $AEDF$ 中,

$$\angle BAC = 90^\circ, \quad \angle EDF = 90^\circ$$

$$\therefore \angle AED + \angle AFD = 180^\circ$$

$$\text{又} \because \angle CFD + \angle AFD = 180^\circ$$

$$\therefore \angle AED = \angle CFD$$

在 $\triangle AED$ 和 $\triangle CFD$ 中,

$$\begin{cases} \angle C = \angle BAD \\ AD = DC \\ \angle AED = \angle CFD \end{cases}$$

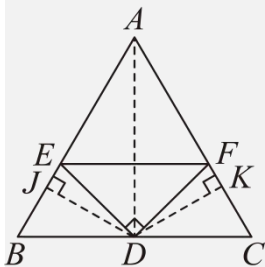
$$\therefore \triangle AED \cong \triangle CFD (AAS)$$

$$\therefore ED = FD$$

$\therefore \triangle EDF$ 为等腰直角三角形

$$\therefore \angle DEF = 45^\circ \cdots \cdots (4 \text{ 分})$$

(2)



连接 AD ，过点 D 作 $DJ \perp AB$ 于 J ，过点 D 作 $DK \perp AC$ 于 K

$\because$ 点 D 是边 BC 的中点， $\triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$

$$\therefore DJ = KD$$

又 $\because$ 在等腰 $\text{Rt}\triangle EDF$ 中，

$$ED = FD$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle EDJ$ 和 $\text{Rt}\triangle FDK$ 中

$$\begin{cases} DJ = KD \\ ED = FD \end{cases}$$

$$\text{Rt}\triangle EDJ \cong \text{Rt}\triangle FDK \text{ (HL)}$$

$$\therefore EJ = FK$$

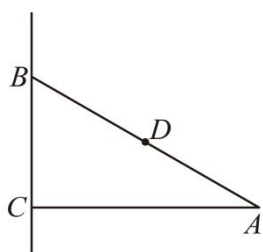
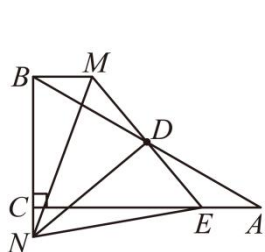
$$\text{同理可证 } \text{Rt}\triangle ADJ \cong \text{Rt}\triangle ADK \text{ (HL)}$$

$$\therefore AJ = AK$$

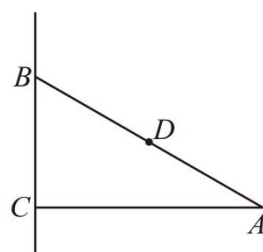
$$\therefore AJ - EJ = AK - FK$$

$$\therefore AE = AF \cdots \cdots \text{ (8分)}$$

26. (12分) 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $AC = 2\sqrt{3}$, 点 D 是边 AB 的中点, E 是边 AC 上的一动点 (点 E 不与点 A 重合), 过点 B 作 $BM \parallel AC$ 交 ED 的延长线于点 M , 过点 D 作 $DN \perp ME$ 交直线 BC 于点 N , 连接 NE .



备用图1



备用图2

(1) 填空: $BC = \underline{\hspace{2cm}}$, $AB = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 如图, 当点 N 在 BC 的延长线上时, 设 $CN = x$, $BM = y$, 试用含 x 的代数式表示 y ;

(3) 当 $\triangle ADE$ 是等腰三角形时, 直接写出 CN 的长.

【详解】 (1) 解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 $\angle A = 30^\circ$, $\angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore AB = 2BC, \text{ 且 } AB^2 = AC^2 + BC^2,$$

$$\therefore (2BC)^2 = (2\sqrt{3})^2 + BC^2,$$

解得: $BC = 2$, 负值舍去,

$$\therefore AB = 2BC = 4; \cdots \cdots \text{ (2分)}$$

(2) 解: $\because BM \parallel AC$,

$$\therefore \angle BMD = \angle AED, \angle MBD = \angle EAD,$$

$\because$ 点 D 为边 AB 的中点,

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore \triangle BDM \cong \triangle ADE \text{ (AAS)},$$

$$\therefore MD = DE, AE = BM = y,$$

$$\because DN \perp ME,$$

$$\therefore DN \text{ 垂直平分 } ME,$$

$$\therefore MN = EN,$$

$$\because AC = 2\sqrt{3}, \quad CN = x,$$

$$\therefore CE = AC - AE = 2\sqrt{3} - y, \quad BN = BC + CN = 2 + x,$$

$$\text{根据勾股定理得: } MN^2 = BM^2 + BN^2, \quad EN^2 = CE^2 + CN^2,$$

$$\because MN = EN,$$

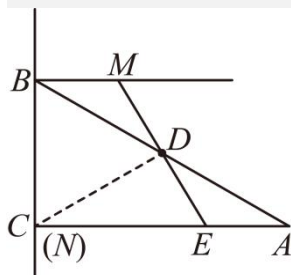
$$\therefore BM^2 + BN^2 = CE^2 + CN^2,$$

$$\therefore y^2 + (2+x)^2 = (2\sqrt{3}-y)^2 + x^2,$$

$$\text{整理得: } 4x + 4\sqrt{3}y = 8,$$

$$\text{解得: } y = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}x}{3}. \quad \cdots \cdots (6 \text{ 分})$$

(3) 解: 当 $AE = DE$ 时, 连接 CD , 如图所示:



$$\because AB = 4, \quad D \text{ 为 } AB \text{ 的中点},$$

$$\therefore AD = BD = \frac{1}{2} AB = 2,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle A = 30^\circ,$$

$$\because AE = DE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CED = \angle ADE + \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = 180^\circ - \angle DCE - \angle CED = 90^\circ,$$

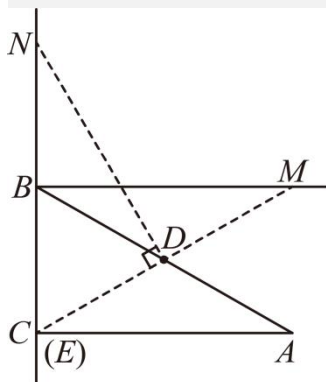
$$\therefore CD \perp ME,$$

$$\because ND \perp ME,$$

$$\therefore \text{此时点 } N \text{ 与点 } C \text{ 重合},$$

$$\therefore CN = 0;$$

当 $DE = AD$ 时，如图所示：



$\because$ $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ，

$\because AD = DE$ ，

$\therefore \angle AED = \angle A = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle BDE = \angle A + \angle AED = 60^\circ$ ，

$\because AD = BD$ ，

$\therefore DE = BD$ ，

$\therefore \triangle DEB$ 为等边三角形，

$\therefore \angle DBE = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle DBE = \angle DBC = 60^\circ$ ，

$\therefore$ 此时点 E 与点 C 重合，

$\because DN \perp ME$ ，

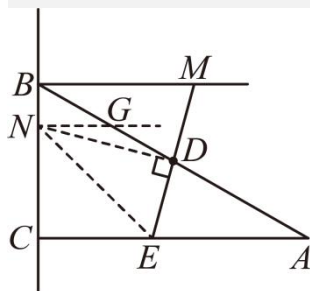
$\therefore \angle NDE = 90^\circ$ ，

$\because \angle END = 90^\circ - \angle BED = 30^\circ$ ，

$\therefore EN = 2ED = 2CD = 2 \times 2 = 4$ ，

即此时 $CN = 4$ ；

当 $AE = AD = 2$ 时，过点 N 作 $NG \parallel AC$ 交 AB 于点 G ，如图所示：



$$\therefore \angle BGN = \angle A = 30^\circ, \quad \angle BNG = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore BN = \frac{1}{2}BG,$$

$$\because AD = AE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AED = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ,$$

$$\because ND \perp ME,$$

$$\therefore \angle NDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDN = 180^\circ - 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle DNG = \angle BGN - \angle BDN = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle DNG = \angle BDN,$$

$$\therefore NG = GD,$$

$$\text{设 } BN = x, \text{ 则 } BG = 2x, \quad NG = GD = BD - BG = 2 - 2x,$$

$$\because BG^2 = NG^2 + BN^2,$$

$$\therefore (2x)^2 = (2 - 2x)^2 + x^2,$$

$$\text{解得: } x = 4 - 2\sqrt{3}, \quad x = 4 + 2\sqrt{3} \quad (\text{舍去}),$$

$$\therefore BN = 4 - 2\sqrt{3},$$

$$\therefore CN = 2 - BN = 2 - 4 + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 2;$$

综上分析可得: CN 的长为 **0 或 4 或 $2\sqrt{3} - 2$** . …… (12 分)